

축방향 경계 조건을 고려한 두꺼운 실린더의 점소성 응력해

윤삼손* · 이순복†

(2003년 2월 24일 접수, 2003년 7월 5일 심사완료)

Viscoplastic Solution of Thick Walled Cylinder Considering Axial Constraint

Samson Yoon and Soon-Bok Lee

Key Words : Viscoplastic Constitutive Equation(점소성 구성식), Finite Element Method(유한요소해석), Time Integration(시간 적분법), Thick Walled Cylinder(두꺼운 실린더), Generalized Plane Stress Condition(일반 평면응력조건), Generalized Plane Strain Condition(일반 평면변형률조건)

Abstract

Finite element analysis using modern constitutive equation is one of the most general tools to simulate the deformation behavior and to predict the life of the structure. Constitutive equation becomes complicated so as to predict the material behavior more accurately than the classical models. Because of the complexity of constitutive model, numerical treatment becomes so difficult that the calculation should be verified carefully. One-element tests, simple tension or simple shear, are usually used to verify the accuracy of finite element analysis using complicated constitutive model. Since this test is mainly focused on the time integration scheme, it is also necessary to verify the equilibrium iteration using material stiffness matrix and to compare FE results with solutions of structures. In this investigation, viscoplastic solution of thick walled cylinder was derived considering axial constraints and was compared with the finite element analysis. All the numerical solutions showed a good coincidence with FE results. This numerical solution can be used as a verification tool for newly developed FE code with complicated constitutive model.

1. 서론

발전소의 터빈 로터나 보일러, 항공기의 가스터빈, 액체 급속로의 압력 용기나 배관등과 같은 구조물들은 고온, 고압의 취약한 운전 조건에서 장시간 노출되어 크립 변형과 소성 변형과 같은 비탄성 변형이 발생하고 이들의 상호작용으로 인하여 구조물의 수명이 급격히 감소하게 된다. 고온 구조물의 안정성 평가를 수행하기 위해 재료의 거동을 정확히 예측할 수 있는 비탄성 구성식이 요구된다. Bodner,⁽¹⁾ Miller,⁽²⁾ Chaboche⁽³⁾는 통합형 점

소성 구성식을 제안하였으며, Inoue 등⁽⁴⁾은 다양한 구성식들의 비교 평가를 수행하였다.

점소성 구성식은 상태변수의 발전식과 유동법칙이 얽혀있는 미분 방정식 형태이고 비선형성이 강하여 해를 구하기가 쉽지 않다. 대부분의 점소성 구성식은 형태의 복잡성과 재료 상수 결정의 어려움으로 인하여 상용 유한요소 해석코드에 제한적으로 사용되고 있다. 최근에 개발된 점소성 구성식을 이용한 해석은 주로 사용자가 작성한 코드를 사용하거나 상용 유한요소 해석코드에 구성식을 정의할 수 있는 루틴을 사용하는 경우가 많다. 두 경우 모두 작성된 프로그램의 정확성을 이르기까지 예제를 통해 검증하여야 한다.

한 개의 요소를 사용하고 요소내의 응력 및 변형률 분포가 균일(uniform)할 경우 유한 요소 해석 결과는 안정적 적분법(즉, Runge-Kutta method, Bulirsch-Stoer method)을 사용하여 구한 정밀해와

† 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : sblee@kaist.ac.kr

TEL : (042)869-3029, FAX : (042)869-3095

* 한국과학기술원 기계공학과

비교함으로써 그 결과를 검증할 수 있다. 일반적으로 단순 인장이나 단순 전단 등의 간단한 변형에 대한 결과 비교를 통해 유한요소 해석의 정확성을 검증한다.

응력이나 변형률의 분포가 균일하지 않는 일반적인 구조물의 경우 구성식의 복잡성으로 인하여 완전해(closed form solution)는 거의 존재하지 않으며 몇몇 특수한 경우에 대한 수치해가 있다. 수치해가 존재하는 대표적인 예로 두꺼운 파이프의 변형 문제가 있으며 내압, 외압, 축력 등의 외부 하중과 임의의 온도 분포에 대한 탄성 해⁽⁵⁾와 소성 해가 있다. Arya⁽⁶⁾는 두꺼운 실린더 문제에서 점소성 구성식을 적용할 수 있는 수치해를 유도하였으며 시간 의존적 변형에 적용하였다. 그의 수치해에서는 축방향의 경계조건이 평면 변형률 조건인 경우만 고려하였다. 하지만 두꺼운 축대칭 실린더의 경우 축방향 경계조건에 따라 평면변형률(plane strain: 이하 PE), 일반 평면변형률(generalized plane strain: 이하 GPE), 일반 평면응력(generalized plane stress: 이하 GPS)조건으로 분류할 수 있다. 각각의 경우 그 해의 형태가 다르기 때문에 축방향 경계조건을 고려하여 해를 유도하여야 한다. 본 연구에서는 두꺼운 축대칭 실린더의 시간 의존성 변형에 관한 일반 해를 유도하였으며 축방향의 경계조건에 따른 여러 특수해를 유도하였다. 유도된 수치해의 정확성을 검증하기 위하여 여러가지 축방향 경계 조건에 대해 유한요소해석을 수행하여 두 결과를 비교하였다.

2. Chaboche model

Chaboche model⁽⁷⁾은 등방성 재료에 대해 개발되었으며 시간 의존성 변형기구와 소성 변형, 반복 변형의 변형기구를 포함하는 통합형 점소성 구성식이다. 본 절에서 서술되는 수식은 미소 변위, 미소 변형률 조건에서 유효하다.

변형률 속도는 식 (1)과 같이 탄성 변형률 속도, 소성 변형률 속도로 분리할 수 있다.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_y = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_y^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_y^p + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_y^h \quad (1)$$

탄성 변형률 속도는 식 (2)와 같이 Hooke's law에 의해 응력 속도와 관련된다.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_y = \lambda \delta_{ij} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{kk}^e + 2\mu \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij}^e \quad (2)$$

여기서 λ 와 μ 는 Lamé 상수이다. 열 변형률은 식 (3)과 같이 온도변화에 선형적인 관계로 표현된다.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_y^h = \alpha \dot{T} \delta_{ij} \quad (3)$$

여기서 α 는 열팽창률이다.

등가 소성 변형률 속도는 식 (4)의 유동법칙에 의해 정의된다.

$$\dot{p} = \left\langle \frac{J(\mathbf{s} - \mathbf{X}) - R - k}{K} \right\rangle^n \quad (4)$$

여기서 $J(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{x}_y : \mathbf{x}_y}$ 이다. 식 (4)의 \mathbf{s} 는 편차응력이다. k, n, K 는 온도 의존성 재료 상수이다. 소성 변형률은 식 (4)의 유동 법칙과 소성 변형률 방향 \mathbf{n} 으로 정의된다.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_y^p = \frac{3}{2} \dot{p} \mathbf{n} \quad (5)$$

$$\mathbf{n}_y = \frac{\mathbf{s}_y - \mathbf{X}_y}{J(\mathbf{s} - \mathbf{X})} \quad (6)$$

이력현상을 모사하기 위해 도입된 역응력(back stress)의 발전식은 식 (7)과 같다.

$$\dot{X}_y = \frac{2}{3} C \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_y^p - \gamma(p) \dot{p} X_y \quad (7)$$

여기서 $\gamma(p) = \gamma [a_0 + (1 - a_0) e^{-bp}]$ 이고 C, γ, a_0 는 재료 상수이다.

반복 경화 혹은 반복 연화를 고려하기 위한 저지 응력(drag stress)의 발전식은 식 (8)과 같다.

$$\dot{R} = \beta(Q - R) \dot{p} \quad (8)$$

여기서 β 와 Q 는 재료상수이다.

식 (7)과 식 (8)은 모두 경화 항과 회복 항을 가지고 있으며 Bailey-Orowan law의 형태와 일치하며 고온에서 발생하는 경화와 회복의 정합 작용을 모사하기 위한 것이다.

3. Solution Procedure

내경이 a , 외경이 b 인 두꺼운 실린더의 응력해를 유도하였다. 좌표 r, θ, z 는 각각 반경방향, 원주방향, 축방향을 의미한다. 변수 위의 '·'은 시간에 대한 미분을 나타낸다. 온도나 기계적 하중은 모두 시간의 함수이다.

두꺼운 실린더의 평형 방정식(equilibrium equation)은 식 (9)와 같다.

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{\sigma}_r) = \dot{\sigma}_\theta \quad (9)$$

적합 방정식(compatibility equation)은 식 (10)과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{\epsilon}_\theta) = \dot{\epsilon}_r \quad (10)$$

반경 방향 변형률 속도는 Hooke's law 에 의해 식 (11)과 같이 응력 속도와 연관된다.

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \dot{\epsilon}_r^p + \dot{\epsilon}_r^i + \dot{\epsilon}_r^{ih} \\ &= \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_r - \nu(\dot{\sigma}_\theta + \dot{\sigma}_z)] + \dot{\epsilon}_r^p + \alpha \dot{T} \end{aligned} \quad (11)$$

$\dot{\epsilon}_\theta$ 와 $\dot{\epsilon}_z$ 도 식 (11)과 유사한 형태로 표현된다. 일반적으로 소성 변형률 속도의 합은 항상 0 이라고 가정할 수 있다.

$$\dot{\epsilon}_r^p + \dot{\epsilon}_\theta^p + \dot{\epsilon}_z^p = 0 \quad (12)$$

$\dot{\epsilon}_\theta$ 와 $\dot{\epsilon}_r$ 의 구성식과 식 (10)을 이용하여, $\dot{\epsilon}_\theta$, $\dot{\epsilon}_r$, $\dot{\sigma}_z$ 를 소거하면 식 (13)을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_r + \dot{\sigma}_\theta &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\int_a^r \frac{\dot{\epsilon}_r^{in} - \dot{\epsilon}_\theta^{in}}{x} dx - \nu \dot{\epsilon}_\theta^{in} + \dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_z^{in} \right) \\ &+ \frac{\alpha E}{(1-\nu)} \dot{T} + A \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 A 는 적분 상수이며 경계조건에 의해 결정되는 값이다. 식 (9)를 이용하며 식 (14)의 관계를 유도할 수 있다.

$$\dot{\sigma}_r + \dot{\sigma}_\theta = \dot{\sigma}_r + \frac{\partial}{\partial r}(r\dot{\sigma}_r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r^2\dot{\sigma}_r) \quad (14)$$

식 (13)과 식 (14)를 연립하면 식 (15)를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_r &= \frac{E}{r^2(1-\nu^2)} \left(\int_a^r x\Phi(x)dx - \int_a^r x\dot{\epsilon}_\theta^{in} dx + \nu \int_a^r x(\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_z^{in}) dx \right) \\ &- \frac{\alpha E}{(1+\nu)} \int_a^r x\dot{T} dx + \frac{r^2 - a^2}{2r^2} A + \frac{B}{r^2} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $\Phi(r) = \int_a^r \frac{\dot{\epsilon}_r^{in} - \dot{\epsilon}_\theta^{in}}{x} dx$ 이고 B 는 적분 상수이다. 반경 방향 응력 속도($\dot{\sigma}_r$)의 경계조건은 식 (16)와 같이 주어진다.

$$\dot{\sigma}_r = -\dot{p}_{in} \text{ at } r = a, \quad \dot{\sigma}_r = -\dot{p}_{out} \text{ at } r = b \quad (16)$$

식 (15)의 우변의 첫번째 항이 이중 적분인데 부분 적분 공식을 이용하여 전개하고 식 (16)의 경계조건을 사용하여 적분 상수 A, B 를 결정한다.

적분 함수를 사용하여 식을 간단히 정리하면 반경 방향 응력 속도($\dot{\sigma}_r$)의 일반해(식 (17))를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_r &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(I_1 - \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{r^2} I_2 \right) + \frac{E(1-2\nu)}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{r^2} \left(I_3 - \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} I_4 \right) \\ &- \frac{\alpha E}{(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left(I_5 - \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} I_6 \right) + \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \frac{1}{r^2} \left(I_7 - \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} I_8 \right) \\ &- \dot{p}_{in} \frac{b^2 - r^2}{b^2 - a^2} \frac{a^2}{r^2} - \dot{p}_{out} \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{r^2} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^r \frac{\dot{\epsilon}_r^{in} - \dot{\epsilon}_\theta^{in}}{x} dx \\ I_2 &= \int_a^b \frac{\dot{\epsilon}_r^{in} - \dot{\epsilon}_\theta^{in}}{x} dx = (I_1)_{r=b} \\ I_3 &= \int_a^r x\dot{\epsilon}_z^{in} dx \\ I_4 &= \int_a^b x\dot{\epsilon}_z^{in} dx = (I_3)_{r=b} \\ I_5 &= \int_a^r x\dot{T} dx \\ I_6 &= \int_a^b x\dot{T} dx = (I_5)_{r=b} \\ I_7 &= \int_a^r x\dot{\epsilon}_z dx \\ I_8 &= \int_a^b x\dot{\epsilon}_z dx = (I_7)_{r=b} \end{aligned}$$

이다.

식 (13)에서 식 (17)을 빼면 원주방향 응력속도($\dot{\sigma}_\theta$)를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_\theta &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(I_1 - \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{r^2} I_2 \right) - \frac{E(1-2\nu)}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{r^2} \left(I_3 + \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} I_4 \right) \\ &+ \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left(I_5 + \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} I_6 - \dot{T}r^2 \right) - \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \frac{1}{r^2} \left(I_7 + \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} I_8 - \dot{\epsilon}_z r^2 \right) \\ &- \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{\epsilon}_\theta^{in} + \nu \dot{\epsilon}_z^{in}) + \dot{p}_{in} \frac{b^2 + r^2}{b^2 - a^2} \frac{a^2}{r^2} - \dot{p}_{out} \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{r^2} \end{aligned} \quad (18)$$

축방향 변형률 속도($\dot{\epsilon}_z$)의 구성식으로부터 축방향 응력 속도($\dot{\sigma}_z$)를 식 (19)와 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_z &= \frac{E\nu}{1-\nu^2} \left(I_1 - \frac{b^2}{b^2 - a^2} I_2 \right) - \frac{E\nu(1-2\nu)}{1-\nu^2} \frac{1}{b^2 - a^2} I_4 \\ &+ \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{2\nu}{b^2 - a^2} I_6 - \dot{T} \right) - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{2\nu^2}{b^2 - a^2} I_8 - \dot{\epsilon}_z \right) \\ &- \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \dot{\epsilon}_\theta^{in} + \dot{\epsilon}_z^{in}) + \dot{p}_{in} \frac{2\nu a^2}{b^2 - a^2} - \dot{p}_{out} \frac{2\nu b^2}{b^2 - a^2} \end{aligned} \quad (19)$$

식 (17) ~ (19)는 축방향의 경계조건을 고려하지 않은 일반해이다. 이 일반해는 유동법칙이 정의되는 점소성 구성식에 적용되는 식이며 소성 변형을 고려하지 않으면 곧바로 탄성 해로 전환된다. 소성 변형이 발생하지 않는다고 가정하면 적분 함수 I_1, I_2, I_3, I_4 가 모두 0 이 된다. 온도변화가 없다고 가정하면 I_5 와 I_6 이 0 이 되고 평면 변형률 ($\epsilon_z = 0$) 상태라고 하면 I_7 와 I_8 역시 0 이 된다. 따라서 식 (17)~(19)에서 적분 함수를 모두 소거하면 다음과 같은 탄성 해를 구할 수 있다.

$$\sigma_r = -p_{in} \frac{b^2 - r^2}{b^2 - a^2} \frac{a^2}{r^2} - p_{out} \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{r^2} \quad (20)$$

$$\sigma_\theta = p_{in} \frac{b^2 + r^2}{b^2 - a^2} \frac{a^2}{r^2} - p_{out} \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \frac{a^2}{r^2} \quad (21)$$

$$\sigma_z = p_{in} \frac{2\nu a^2}{b^2 - a^2} - p_{out} \frac{2\nu b^2}{b^2 - a^2} \quad (22)$$

식 (20)~(22)의 탄성해는 응력 속도가 아닌 응력 성분으로 표현된다. 탄성체이고 PE 조건일 경우 식 (22)에 알 수 있듯이 축방향 응력은 균일하다. 만일 축하중을 고려할 경우에는 4 절의 특수해에서 소성변형률성분이 포함된 적분함수를 모두 제거하면 응력해를 구할 수 있다.

4. 축방향 경계조건을 고려한 특수해

4.1 평면 변형률(PE) 조건

PE 조건을 적용할 경우 축방향 변형률(ϵ_z)이 모두 0 이고 적분 함수 I_7 과 I_8 가 0 이 된다. 축방향 변형률이 0 이라고 하더라도 축방향 소성 변형률 (ϵ_z^p)이 0 이 되는 것이 아니다. 다만 소성 변형률과 탄성 변형률의 합이 0 되는 것이기 때문에 축방향의 소성 변형률이 포함된 I_3 와 I_4 는 0 이 아니다. 식 (17)~(19)의 일반해에서 I_7 과 I_8 을 소거하면 PE 조건에 대한 해를 구할 수 있다.

4.2 일반 평면변형률(GPE) 조건

GPE 조건은 식 (23)과 같이 축방향의 변형률이 반경(r)과 무관하고 축변형률이 모두 같은 것을 의미한다. 앞 절의 평면 변형률 조건은 축방향 변형률을 0 으로 제한한 것에 비하면 훨씬 완화된 조건이다.

$$\frac{\partial \epsilon_z}{\partial r} = 0 \quad (23)$$

식 (23)에서 알 수 있듯이 축방향 변형률은 위치의 함수가 아니고 시간의 함수이다. 이 경우 I_7 와 I_8 은 0 이 아니지만 다음의 항들은 0 이 된다.

$$I_7 - \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} I_8 = 0 \quad (24)$$

$$I_7 + \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} I_8 - \epsilon_z r^2 = 0 \quad (25)$$

한 자유도에 하중 조건과 변위 조건을 동시에 부가할 수 없다. 때문에 PE 의 경우 축방향의 변위가 모두 0 으로 정해져있기 때문에 축방향 하중을 경계조건으로 부가할 수 없다. 하지만 GPE 조건의 경우 축방향 변위가 일정할 뿐 정해진 값이 아니기 때문에 축방향으로 하중이 작용하는 경우도 고려할 수 있다. 축방향으로 하중이 가해질 경우 축방향 응력은 일정하지 않기 때문에 식 (26)과 같이 면적 적분을 수행하여 축방향 하중을 역으로 계산하였다.

$$\begin{aligned} \dot{F} &= 2\pi \int_a^b r \dot{\sigma}_z dr \\ &= 2\pi E [I_8 - I_7 - \alpha I_6] + 2\pi \nu [\dot{p}_{out} b^2 - \dot{p}_{in} a^2] \end{aligned} \quad (26)$$

GPE 조건에서는 적분 변수 I_8 이 식 (27)과 같이 된다.

$$I_8 = \frac{b^2 - a^2}{2} \dot{\epsilon}_z \quad (27)$$

식 (26)과 식 (27)을 이용하여 식 (19)에서 $\dot{\epsilon}_z$ 를 소거하면 식 (28)과 같은 축방향 응력 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_z &= \frac{E\nu}{1-\nu^2} \left(I_1 - \frac{b^2}{b^2 - a^2} I_2 \right) + \frac{E\nu(2-\nu)}{(1-\nu^2)(b^2 - a^2)} I_4 \\ &+ \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{2(1+\nu)}{b^2 - a^2} I_6 - \dot{T} \right) - \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \dot{\epsilon}_\theta^m + \dot{\epsilon}_z^m) + \frac{\dot{F}}{\pi(b^2 - a^2)} \end{aligned} \quad (28)$$

식 (28)에서 주목할 점은 우변의 제일 마지막 항에 축하중 속도(\dot{F})가 포함되어 있다는 점이다. 이 항 때문에 GPE 의 특수해와 PE 의 특수해는 서로 다른 형태를 보이게 된다.

4.3 일반 평면응력(GPS) 조건

Table 1 Material Parameter of Chaboche Model⁽⁷⁾

Material	T(°C)	n	K(MPa)	k(MPa)	C(MPa)	r	Q(MPa)	β	a ₀	E(MPa)
316L stainless steel	600	12	150	6	24800	300	80	10	1	149760

GPS 조건은 축방향의 응력이 일정한 경우를 의미한다. 이 경우 축방향 응력은 식 (29)과 같이 균일하다.

$$\dot{\sigma}_z = \frac{\dot{F}}{\pi(b^2 - a^2)} \quad (29)$$

식 (29)을 이용하여 I₇ 과 I₈ 을 계산하여 식 (17)과 식 (18)에 대입하면 식 (30)와 식 (31)과 같은 특수해를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_r = & \frac{E}{2} \left(I_1 - \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} I_2 \right) + \frac{E}{2r^2} \left(I_3 - \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} I_4 \right) \\ & - \frac{\alpha E}{r^2} \left(I_5 - \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} I_6 \right) - \dot{p}_{in} \frac{b^2 - r^2}{b^2 - a^2} - \dot{p}_{out} \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_\theta = & \frac{E}{2} \left(I_1 + \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} I_2 \right) - \frac{E}{2r^2} \left(I_3 + \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} I_4 \right) \\ & + \frac{\alpha E}{r^2} \left(I_5 + \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} I_6 - \nu \dot{r}^2 \right) - E \dot{\epsilon}_\theta^p \\ & + \frac{r^2 + b^2}{b^2 - a^2} \frac{a^2}{r^2} \dot{p}_{in} - \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{r^2} \dot{p}_{out} - \frac{\nu \dot{F}}{\pi(b^2 - a^2)} \end{aligned} \quad (31)$$

축하중 속도(\dot{F})가 0 이면 평면 응력 상태로 변환된다.

5. Numerical Application

앞 절에서 두꺼운 실린더의 점소성 거동에 관한 일반해를 유도하였다. 그리고 축방향 경계조건에 따라 3 종류의 해를 구하였다. 유도된 수치해의 정확성을 검증하기 위하여 유한요소 해석을 수행하였다. Chaboche 모델을 적용한 유한요소 해석을 위해 ABAQUS 의 UMAT 루틴을 이용하였다. 이 루틴에서는 Chaboche model 을 일반 중간점 법 (General midpoint rule)을 이용해 적분하고 일관된 접선강성 행렬을 계산한다. 여기에 대한 자세한 설명은 참고문헌⁽⁸⁾에 수록되어 있다.

유한요소 해석 예제는 내압이 작용하는 실린더 (내경 40mm, 외경 60mm)의 축대칭 모형이다. 내압은 Fig. 1 과 같이 초기 10 초 동안 26MPa 까지 증가된 후 2000 시간동안 유지하였다. 해석에 사용된 재료 상수는 316L 스테인레스 강의 600°C 의 값을 사용하였으며 Table 1 에 정리되어 있다. 해석은 PE,

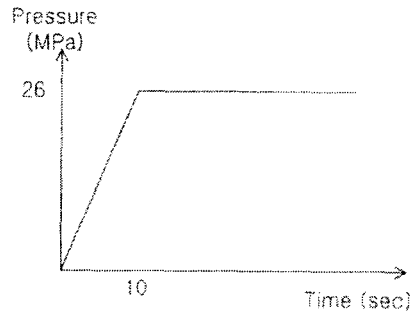


Fig. 1 Internal pressure history

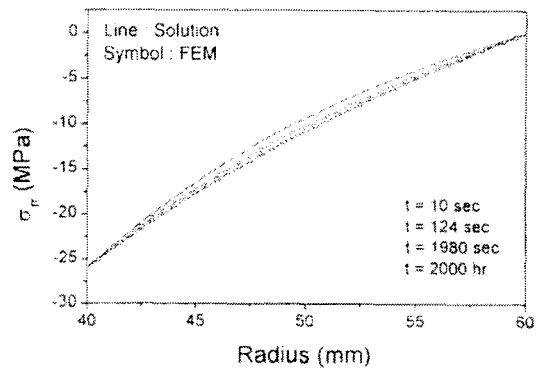


Fig. 2 Radial stress distribution in a thick-walled cylinder under plane strain condition

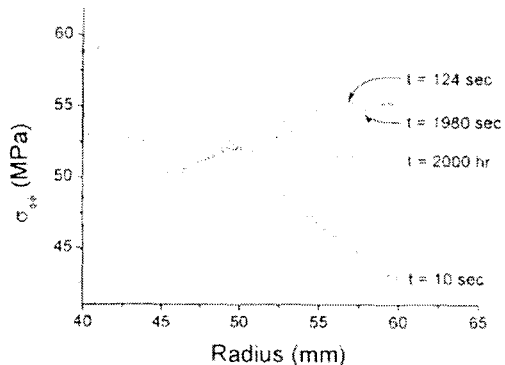


Fig. 3 Circumferential stress distribution in a thick-walled cylinder under plane strain condition

GPE, GPE 의 세조건에서 모두 수행하였다. 각각의 경우에 대해 수치해를 계산하여 유한요소 해석결과와 비교하였다. Fig. 2 ~ 7 에서 실선은 수치해의 결과이며 점선은 유한요소 해석결과이다.

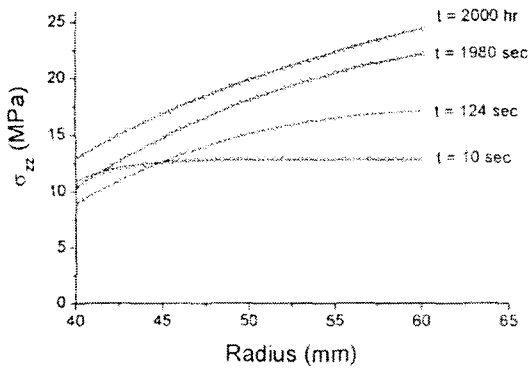


Fig. 4 Axial stress distribution in a thick-walled cylinder under plane strain condition

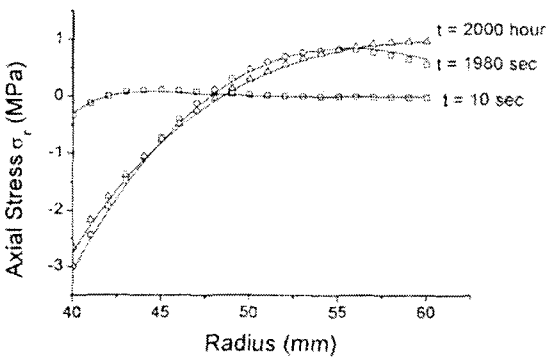


Fig. 5 Axial stress distribution in a thick-walled cylinder (Generalized Plane strain condition)

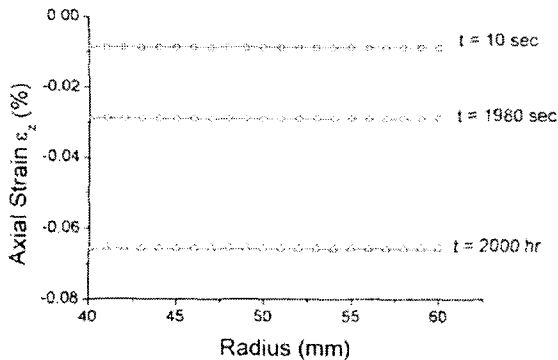


Fig. 6 Axial strain distribution in a thick-walled cylinder (Generalized Plane strain condition)

유한요소 해석에서는 변형률이나 응력은 적분점에서 계산되는 값이므로 내삽 방법을 사용하여 절점에서의 값을 계산하였다

축방향 변위를 0 으로 고정한 PE 조건에서 수행한 해석 결과는 Fig. 2 부터 Fig. 4 에 나타내었다. Fig. 2 의 반경 방향 응력은 시간에 대해 거의 변화가 없다. 이것은 내압이 26MPa, 외압이 0MPa 로 고정이 되어 있기 때문이다. 반경 방향 응력은 GPE 조건이나 GPS 조건의 경우에도 마찬가지로 큰 변화를 보이지 않는다. 유한요소해석에 의해 계산된 하중 시작 점의 응력에서 2000 시간이 지난 후의 응력까지 모두 수치해와 잘 일치하고 있다.

원주 방향 응력(Fig. 3)의 분포는 독특한 거동을 보인다. 초기(10sec)에는 내부의 응력이 더 크고 바깥쪽의 응력이 작는데 시간이 124sec 에 이르면 응력 분포가 역전되어 바깥쪽의 응력이 더 커진다. 유지 시간이 길어짐에 따라 기울기가 점점 감소하여 2000 hr 에서는 응력 분포가 거의 일정해진다. 시간 의존성 변형에 의해 응력 분포가 상당히 변하는 경우의 유한요소 해석 역시 수치해와 잘 일치한다.

축방향 응력(Fig. 4)은 초반에는 거의 일정한 분포를 보이다가 바깥 쪽의 응력이 점차 증가하는 경향을 보인다. 이 경우에도 수치해와 유한 요소 해석 결과는 모든 시간에서 잘 일치하고 있다.

Fig. 5 와 Fig. 6 은 GPE 조건의 축방향 응력과 변형률의 분포를 나타낸 그림이다. 유한요소해석에서 GPE 조건을 위해 상단의 절점의 축방향 변위를 모두 같게하는 제한조건을 부가하였다. (ABAQUS 에서는 *Equation 사용한다.) 축하중 F 는 0 으로 규정하였다. 원주 응력과 축 응력은 PE 의 경우와 유사한 경향을 보이며 수치해와 유한요소해석이 잘 일치하였다.

GPE 조건의 경우 축응력(Fig. 5)이 초기에는 거의 0 이고 시간 의존성 변형으로 인하여 안쪽의 응력이 감소하고 대신 바깥쪽의 응력이 증가하는 경향을 보인다. 이것은 축하중을 0 으로 고정하였기 때문인데 전체적으로 증가하는 PE 조건의 경우와 차이가 있다. Fig. 6 은 축방향 변형률이 위치에 무관하게 같은 값이며 시간이 따라 감소하는 경향을 보여주고 있다. 이로써 수치해에서 경계조건을 올바르게 고려했음을 알 수 있다. 축방향 변형률은 GPE 조건에서 구한 응력해를 식 (2)의 구성식에 대입하여 구한 것이다.

Fig. 7 은 GPS 조건의 축방향 변형률의 분포를 나타낸 것이다. 축응력은 모두 0 으로 고정하였기 때문에 평면 응력조건과 동일하다. 축방향 변형률은 초기에는 일정한 값을 갖지만 계속 감소하고 변형률의 편차는 조금씩 커진다. Fig. 6 과 Fig. 7 을 비교하면 GPE 조건과 GPS 조건의 차이를 알 수

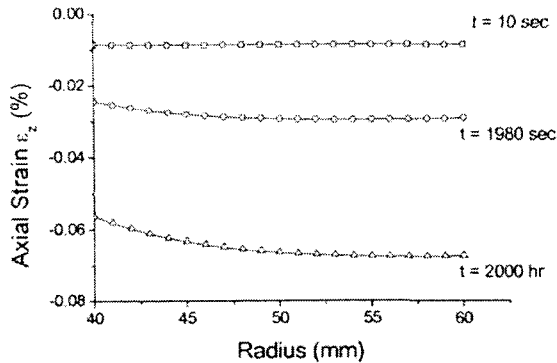


Fig. 7 Axial strain distribution in a thick-walled cylinder under generalized plane stress condition

있다. 두 경우 모두 축력이 0 이지만 GPE 조건에서는 응력의 재분배와 변형률의 감소가 동시에 일어나고 GPS 조건에서는 응력은 일정하고 변형률의 감소와 재분배가 일어난다.

PE, GPE, GPS 조건에서 유도된 수치해가 유한요소 해석결과와 잘 일치하였다. 하중을 가하기 시작한 점은 물론 시간의존적 거동이 충분히 발생한 2000 시간 이후의 응력분포에서도 정확히 일치하고 있다. 축 방향 경계조건을 고려한 수치해는 점소성 구성식을 적용한 유한요소 해석코드의 정확성을 평가하는데 유용하게 사용될 수 있다.

6. 결론

점소성 구성식을 적용한 유한요소 해석코드의 정확성을 검증하기 위하여 두꺼운 실린더의 열접소성 변형거동의 일반해를 유도하였다. 축방향 경계조건에 따라 평면 변형률, 일반 평면 변형률, 일반 평면 응력 상태로 분류하고 각각의 조건에 대한 특수해를 유도하였다.

내압이 작용하는 실린더의 유한요소해석을 수행하였으며 충분히 긴 시간동안 유지되는 내압에 의해 나타나는 시간의존적 변형거동을 수치해와 비교하였다. 경계 조건에 따라 서로 다른 응력 분

포를 나타내었으며 원주 응력이 상당히 많은 변화를 보였다. 각각의 경우에서 유한요소해석과 수치해는 모두 정확한 일치를 보였으며 점소성 구성식을 적용한 해석코드의 정확성을 평가하는데 유용하게 사용될 것이다.

후 기

본 연구는 국가지정 연구실 CARE Lab.의 지원 하에 수행되었으며 이에 감사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Bodner, S. R. and Partom, Y., 1975, "Constitutive Equations for Elasto-Viscoplasticity Strain Hardening Materials," *J. Appl. Mech.*, Vol. 42, p. 235.
- (2) Miller, A. K., 1976, "An Inelastic Constitutive Model for Monotonic, Cyclic and Creep Deformation: Part 1, Equations, Development and Analytical Procedures," *J. Engng. Mat. Tech.*, Vol. 98, p. 97.
- (3) Chaboche, J. L., and Nouaihas, D., 1989, "A Unified Constitutive Model for Cyclic Viscoplasticity and Its Application to Various Stainless Steels," *J. Pres. Vessel. Tech.*, Vol. 111, p. 424.
- (4) Inoue, T., Yoshida, F., Ohno, N., Kawai, M., Niitsu, Y., and Imatani, S., 1991, "Evaluation of Inelastic Constitutive Models under Plastic-Creep Interaction in Multiaxial Stress State," *Nuclear Engng. Design*, Vol. 126, p. 1.
- (5) Boresi, A. P., and Sidebottom, O. M., 1985, *Advanced Mechanics of Materials*, 4th ed., John Wiley & Son.
- (6) V. K. Arya, 1989, "Analytical and Finite Element Solution of Some Problems Using a Viscoplastic Model," *Computer and Structures*, Vol. 33, pp. 957~967.
- (7) Lemaitre, J., and Chaboche, J.-L., 1990, *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, Cambridge.
- (8) Youn, S., Lee, S.-B., Kim, J.-B., Lee, H.-Y., and Yoo, B., 2000, "Generalization of Integration Methods for Complex Inelastic Constitutive Equations with State Variables," *Transaction of the KSME, A*, Vol. 24, No. 5, pp. 1075~1083.