

## 비선형 이동경화를 고려한 점소성 모델의 내연적 적분

윤삼손\* · 이순복†

(2003년 2월 24일 접수, 2003년 7월 5일 심사완료)

### A Semi-Implicit Integration for Rate-Dependent Plasticity with Nonlinear Kinematic Hardening

Samson Yoon and Soon-Bok Lee

**Key Words :** Viscoplastic Constitutive Equation(점소성 구성식), Finite Element Method(유한요소해석), Implicit Integration(내연적 적분법), Radial Return Mapping(반경회기사상), Dynamic Yield Condition(동적항복조건), Thick Walled Cylinder(두꺼운 실린더)

#### Abstract

The prediction of the inelastic behavior of the structure is an essential part of reliability assessment procedure, because most of the failures are induced by the inelastic deformation, such as creep and plastic deformation. During decades, there has been much progress in understanding of the inelastic behavior of the materials and a lot of inelastic constitutive equations have been developed. The complexity of these constitutive equations generally requires a stable and accurate numerical method. The radial return mapping is one of the most robust integration scheme currently used. Nonlinear kinematic hardening model of Armstrong-Fredrick type has recovery term and the direction of kinematic hardening increment is not parallel to that of plastic strain increment. In this case, the conventional radial return mapping method cannot be applied directly. In this investigation, we expanded the radial return mapping method to consider the nonlinear kinematic hardening model and implemented this integration scheme into ABAQUS by means of UMAT subroutine. The solution of the non-linear system of algebraic equations arising from time discretization with the generalized midpoint rule is determined using Newton method and bisection method. Using dynamic yield condition derived from linearization of flow rule, the integration scheme for elastoplastic and viscoplastic constitutive model was unified. Several numerical examples are considered to demonstrate the efficiency and applicability of the present method.

#### 1. 서론

발전소의 터빈 로터나 보일러, 항공기의 가스터빈, 액체 금속로의 압력 용기나 배관등과 같은 구조물들은 고온, 고압의 취약한 운전 조건에서 장시간 노출되어 크리프 변형과 소성 변형과 같은 비탄성 변형이 발생한다. 작동 온도가 높아지면서 다양한 변형기구가 활성화되고 변형기구의 상호작용으

로 인하여 재료의 변형거동은 매우 복잡해진다. 이러한 변형 거동을 모사하기 위하여 내부 상태변수를 도입한 비탄성 구성식들이 개발되었다.<sup>(1,2)</sup> 개발된 구성식을 수치적 방법을 이용하여 구조해석에 적용하기 위한 연구가 Ortiz,<sup>(3)</sup> Homberger,<sup>(4)</sup> Chaboche,<sup>(5)</sup> 윤삼손<sup>(6)</sup>에 의해 수행되었다. 구성식의 적분을 수행하기 위해 많이 사용되는 적분방법으로는 탄성예측 후 Radial 방향으로 소성 보정하는 radial return mapping 방법이 있는데 선형 이동경화모델의 경우 이동경화응력이 소성 변형률과 선형의 관계를 갖게 되어 적분을 쉽게 수행할 수 있다. 하지만 Armstrong-Fredrick 형태의 이동경화모델의 경우 회복 항(Recovery Term)으로 인해 이동경화응력

† 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과  
E-mail : sblee@kaist.ac.kr

TEL : (042)869-3029 FAX : (042)869-3095

\* 회원, 한국과학기술원 기계공학과

과 소성 변형률이 비선형의 관계를 갖게 되어 기존의 Radial return mapping 방법을 사용하기에는 어려움이 있다. 본 연구에서는 기존의 Radial return mapping 을 확장하여 비선형 이동 경화 응력을 갖는 Chaboche model 의 수치 적분을 수행하였다.

시간 적분법을 탄소성 구성식과 점소성 구성식 모두에 적용할 수 있도록 동적 항복 조건(dynamic yield condition)을 도입하였으며 평형방정식의 강성 행렬을 구성하기 위해 필요한 접선강성행렬을 계산 과정과 일관되게 유도하였다. 본 연구에서 다루는 구성식과 시간 적분법은 상용 유한요소코드인 ABAQUS 에 사용자 재료(User material, UMAT) 서브루틴을 통해 결합되었다.

프로그램의 검증을 위하여 단축 인장 하중과 단순 전단 하중에 대한 해석과 비례하중이 아닌 하중(nonproportional loading)에 대한 해석을 수행하였다. 해석결과에 미치는 시간중분과 중간점의 영향을 분석하였다. 두꺼운 실린더의 시간 의존적 변형에 대한 해석을 수행하였으며 윤삼손<sup>(7)</sup>에 의해 유도된 점소성 응력해와 비교하였다.

## 2. Chaboche model 의 시간 적분

### 2.1 Chaboche model

Chaboche model<sup>(8)</sup>은 등방성 재료에 대해 개발되었으며 속도 의존성 변형기구와 소성 변형, 반복 변형의 변형기구를 포함하는 대표적 통합형 점소성 구성식이다. 본 절에서 서술되는 수식은 미소 변위, 미소 변형률 조건에서 사용되는 것이다.

변형률 속도는 식 (1)과 같이 탄성 변형률 속도, 소성 변형률 속도로 분리할 수 있다.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^{th} \quad (1)$$

탄성 변형률 속도는 식 (2)와 같이 Hooke's law 에 의해 응력 속도와 관련된다.

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{kk}^e + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}^e \quad (2)$$

여기서  $\lambda$ 와  $\mu$ 는 Lamé 상수이다.

열 변형률은 식 (3)과 같이 온도변화에 선형적인 관계로 표현된다.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{th} = \alpha \dot{T} \delta_{ij} \quad (3)$$

여기서  $\alpha$ 는 열팽창률이다.

등가 소성 변형률 속도는 식 (4)의 유동법칙에 의해 정의된다.

$$\dot{p} = \left\langle \frac{J(\mathbf{s} - \mathbf{X}) - R - k}{K} \right\rangle^n \quad (4)$$

여기서  $J(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{x}_{ij} : \mathbf{x}_{ij}}$  이고  $\mathbf{s}$ 는 편차응력이다.  $k$ ,  $n$ ,  $K$ 는 온도 의존성 재료 상수이다. 소성 변형률은 식 (4)의 유동 법칙과 소성 변형률 방향  $\mathbf{n}$ 으로 정의된다.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \dot{p} \mathbf{n} \quad (5)$$

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{s}_{ij} - \mathbf{X}_{ij}}{J(\mathbf{s} - \mathbf{X})} \quad (6)$$

이력현상을 모사하기 위해 도입된 역응력(back stress)의 발전식은 식 (7)과 같다.

$$\dot{X}_{ij} = \frac{2}{3} C \dot{\epsilon}_{ij}^p - \gamma(p) \dot{p} X_{ij} \quad (7)$$

여기서  $\gamma(p) = \gamma [a_0 + (1 - a_0) e^{-bp}]$  이고  $C$ ,  $\gamma$ ,  $a_0$ 는 재료 상수이다.

반복 경화 혹은 반복 연화를 고려하기 위한 저지 응력(drag stress)의 발전식은 식 (8)과 같다.

$$\dot{R} = \beta(Q - R) \dot{p} \quad (8)$$

여기서  $\beta$ 와  $Q$ 는 재료상수이다.

식 (7)과 (8)은 모두 경화 항과 회복 항을 가지고 있으며 Bailey-Orowan law 의 형태와 일치하며 고온에서 발생하는 경화와 회복의 결합 적용을 모사하기 위한 것이다.

시간 의존적 변형을 고려하지 않는 경우, 식 (4)의 유동법칙은 식 (9)의 항복조건으로 변환된다.

$$f = J(\mathbf{s} - \mathbf{X}) - R - k \quad (9)$$

### 2.2 구성식의 적분

비탄성 구성식은 여러 상태 변수들이 복잡하게 얽혀있는 다원 일차 미분방정식의 형태이다. 기존에 개발된 다양한 적분법(e.g. Runge-Kutta method, Bulirsch-Stoer method)을 이용하여 구성식을 적분할 수 있으나 유한 요소법을 이용한 구조해석 코드에서는 적분법의 선정에 주의를 기해야 한다. 평형방정식을 계산하는 과정에서 내연적 방법을 사용하는 유한요소 해석코드의 경우 접선 강성 행렬이 필요하게 되는데 이 행렬은 적분 계산과정과 일관되게 구해야 한다.<sup>(9)</sup> 이러한 제한 조건으로 비탄성 구성식의 적분은 오일러 법과 같은 선형화 방법을 주로 사용한다.

식 (2)-(8)의 점소성 구성식을 간략히 표현하면 식 (10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \quad (10)$$

각 인자들이 복잡하게 얽혀있는 구성식을 적분하기 위하여 식 (10)을 일반 중간점법(General Midpoint Rule: 이하 GMR)을 이용하여 선형화하면 식 (11)이 된다.

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_\theta, t + \theta \Delta t) \Delta t \quad (11)$$

여기서  $\theta$ 는 0에서 1사이의 임의의 수이며 중간점에서의 변수  $\mathbf{y}_\theta = \mathbf{y}_t + \theta \Delta \mathbf{y}$ 이다. GMR은 중간점에서의 변화율을 이용하여 변수의 증분을 계산하는 방법이다.  $\theta$ 가 0인 경우 외연적 오일러법,  $\theta$ 이 1인 경우 내연적 오일러법이 된다. 식 (11)의 해는  $0.5 \leq \theta \leq 1$ 인 경우 무조건 안정된 해이다.<sup>(4)</sup>

GMR을 이용하여 중간점에서 응력을 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_\theta &= \mathbf{s}_t + \theta \Delta \mathbf{s} \\ &= \mathbf{s}_t + 2\mu \left( \Delta \mathbf{e} - \frac{3}{2} \mathbf{n}_\theta \Delta p \right) \end{aligned} \quad (12)$$

동일한 방법으로 중간점에서의 역응력(back stress)은 식 (13)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\theta &= \mathbf{X}_t + \theta \Delta \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X}_t + \theta \mathbf{C} \mathbf{n}_\theta \Delta p - \theta \gamma \Delta p \mathbf{X}_\theta \end{aligned} \quad (13)$$

우변과 좌변에 모두  $\mathbf{X}_\theta$ 가 포함되어 있기 때문에 식 (14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{X}_\theta = \frac{\mathbf{X}_t + \theta \mathbf{C} \mathbf{n}_\theta \Delta p}{\Phi} \quad (14)$$

여기서  $\Phi = 1 + \theta \gamma \Delta p$ 이다.

비슷한 과정으로 중간점에서의 지지응력(drag stress)은 식 (15)으로 표현된다.

$$R_\theta = \frac{R_t + \theta b Q \Delta p}{1 + \theta b \Delta p} \quad (15)$$

중간점에서의 소성 변형률은 식 (16)과 같다.

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta^p = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\mathbf{s}_\theta - \mathbf{X}_\theta}{J(\mathbf{s}_\theta - \mathbf{X}_\theta)} \quad (16)$$

식 (12)와 식 (14)의 양변을 빼서 정리하면 식 (17)을 구할 수 있다.

$$(\mathbf{s}_\theta - \mathbf{X}_\theta) \left[ 1 + \theta \left( 3\mu + \frac{C}{\Phi} \right) \frac{\Delta p}{J(\mathbf{s}_\theta - \mathbf{X}_\theta)} \right] = \mathbf{s}_\theta^{pr} - \frac{\mathbf{X}_t}{\Phi} \quad (17)$$

여기서  $\mathbf{s}_\theta^{pr} = \mathbf{s}_t + 2\mu \theta \Delta \mathbf{e}$ 이다.

식 (17)의 양변에 내적을 취하면 식 (18)로 정리된다.

$$J(\mathbf{s}_\theta - \mathbf{X}_\theta) + \theta \left( 3\mu + \frac{C}{\Phi} \right) \Delta p = J \left( \mathbf{s}_\theta^{pr} - \frac{\mathbf{X}_t}{\Phi} \right) \quad (18)$$

선형 이동경화모델의 경우 식 (17)의 우변의  $\Phi$ 가 1이 되며 소성 변형률의 방향은 탄성 예측에 의해 정해지는 데 반하여 비선형 이동 경화의 경우  $\Phi$ 가 소성 변형률 증분( $\Delta p$ )의 함수이므로 소성 변형률의 방향은 Newton iteration에 의해 결정된다.

식 (4)의 유동법칙을 GMR에 의해 선형화 하면 식 (19)와 같이 표현된다.

$$\Delta p = \dot{p}_\theta \Delta t = \left( \frac{J(\mathbf{s}_\theta - \mathbf{X}_\theta) - R_\theta - k}{K} \right)^n \Delta t \quad (19)$$

식 (19)을 다시 정리하면 다음과 같은 동적항복 조건(Dynamic yield condition)을 구할 수 있다.

$$J(\mathbf{s}_\theta - \mathbf{X}_\theta) - R_\theta - k - K \left( \frac{\Delta p}{\Delta t} \right)^{1/n} = 0 \quad (20)$$

속도 의존성을 고려하지 않을 경우 식 (20)은 식 (9)의 정적항복조건(static yield condition)이 된다. 여기서 식 (20)을 '동적' 항복조건, 식 (9)를 '정적' 항복조건이라고 지칭한 것은 이 둘을 명확히 구분하기 위한 것이다. 동적항복조건은 선형화 과정에서 발생하는 것이며 두 항복 조건을 하나의 수식으로 정리하면 식 (21)이 된다.

$$J(\mathbf{s}_\theta - \mathbf{X}_\theta) - Y_\theta = 0 \quad (21)$$

여기서

$$Y_\theta = \begin{cases} R_\theta + k & \text{rate independent plasticity} \\ R_\theta + k + K \left( \frac{\Delta p}{\Delta t} \right)^{1/n} & \text{rate dependent plasticity} \end{cases}$$

이다. 실제 계산과정에서는 K에 0을 대입하는 방식으로 속도의존성을 제거할 수 있다.

식 (18)과 식 (21)을 정리하면 식 (22)와 같이 등가 소성변형률 증분( $\Delta p$ )이 변수인 비선형 방정식을 유도할 수 있다.

$$G(\Delta p) = J \left( \mathbf{s}_\theta^{pr} - \frac{\mathbf{X}_t}{\Phi} \right) - \theta \left( \frac{3\mu}{\Omega} + \frac{C}{\Phi} \right) \Delta p - Y_\theta \quad (22)$$

식 (23)의 Newton 방법을 사용하여  $G(\Delta p) = 0$ 를 만족시키는 등가 소성변형률 증분 ( $\Delta p$ )를 결정한다.

$$\Delta p^{(i+1)} = \Delta p^{(i)} - \frac{G(\Delta p^{(i)})}{\partial G^{(i)} / \partial \Delta p} \quad (23)$$

$$\frac{\partial G(\Delta p)}{\partial \Delta p} = \frac{3}{2} \mathbf{n}_\theta : \frac{\Phi'}{\Phi^2} \mathbf{X}_t - \theta \left( 3\mu + \frac{C}{\Phi} - \frac{\Phi'}{\Phi^2} C \Delta p \right) - \frac{\partial Y_\theta}{\partial \Delta p} \quad (24)$$

여기서  $\Phi' = d\Phi/d\Delta p$  이다.

식 (22)에서 회복 효과와 속도 의존성을 제거하면  $\Delta p$ 를 식 (25)와 같이 계산할 수 있으며 이 값을 Newton iteration의 초기값으로 사용하였다.

$$\Delta p^{(0)} = \frac{J(\mathbf{s}_\theta^{pr} - \mathbf{X}_t) - (k + R_t)}{\theta(3\mu + C + bQ)} \quad (25)$$

Newton iteration 과정에서  $\Delta p$ 가 0보다 작아질 수가 있는데 이 경우 식 (21)의 멱급수항은 정의되지 않고 무조건 0이 된다. 멱급수 함수의 불연속성 때문에 Newton method만을 사용할 경우 해가 발산하는 경우가 있기 때문에 bisection method와 Newton method를 결합한 계산법을 사용하는 것이 안정적이다. 이 계산법에 대한 자세한 설명은 참고문헌에 수록되어 있다.<sup>(10)</sup>

식 (22)를 만족시키는 등가 소성변형률 증분을 결정하면 식 (12), 식 (14), 식 (15)에 의해 중간점 ( $t+\theta\Delta t$ )에서의 응력, 역응력, 저지응력을 계산한다. 최종점( $t+\Delta t$ )의 역응력은 식 (26)에 의해 계산되고 나머지 성분도 유사한 방식으로 갱신한다.

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} = \frac{\theta-1}{\theta} \mathbf{X}_t + \frac{1}{\theta} \mathbf{X}_{t+\theta\Delta t} \quad (26)$$

$\theta$ 가 0인 경우에는 식 (26)이 성립하지 않으며 이 경우 2.4 절의 외연적 적분 방법을 이용해야 한다.

### 2.3 Tangent modulus

접선 강성 행렬은 응력 증분과 변형률 증분의 관계를 나타내는 행렬로 평형 방정식의 해를 구할 때 2차 수렴도를 유지하기 위하여 필요한 성분이다. 이 행렬은 적분 과정과 일치하는 방법으로 결정되어야 한다.<sup>(9)</sup>

식 (22)의 양변에 변분을 취하면 식 (27)이 된다.

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma}'_\theta \partial \Delta p + \theta \left[ 3\mu + \frac{C}{\Phi} - \frac{\Phi'}{\Phi^2} C \Delta p \right] \partial \Delta p \\ &= \frac{3}{2} \mathbf{n}_\theta : \left( 2\mu \partial \Delta \mathbf{e} + \frac{\Phi'}{\Phi^2} \mathbf{X}_t \partial \Delta p \right) \end{aligned} \quad (27)$$

식 (27)에서 등가 소성변형률 증분과 변형률 증분의 관계를 유도할 수 있다.

$$\partial \Delta p = - \frac{3\mu \mathbf{n}_\theta : \partial \Delta \mathbf{e}}{G'} \quad (28)$$

여기서  $G' = \frac{\partial G}{\partial \Delta p}$ 이며 식 (24)와 동일하다.

식 (18)의 양변에 변분을 취하면 식 (29)을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} & (\partial \mathbf{s}_\theta - \partial \mathbf{X}_\theta) \frac{\bar{\sigma}'_\theta}{\sigma_\theta} + \theta \mathbf{n}_\theta \cdot \left[ -\frac{\Phi'}{\Phi^2} C \Delta p + \left( 3\mu + \frac{C}{\Phi} \right) \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}'_\theta}{\sigma_\theta} \Delta p \right) \right] \partial \Delta p \\ &= 2\mu \partial \Delta \mathbf{e} + \frac{\Phi'}{\Phi^2} \mathbf{X}_t \partial \Delta p \end{aligned} \quad (29)$$

여기서  $\bar{\sigma}'_\theta = J \left( \mathbf{s}_\theta^{pr} - \frac{\mathbf{X}_t}{\Phi} \right)$ ,  $\bar{\sigma}_\theta = J(\mathbf{s}_\theta - \mathbf{X}_\theta)$  이다.

응력 발전식에 변분을 취하여 식 (30)을 얻을 수 있다.

$$\partial \Delta \mathbf{s} = 2\mu \left( \partial \Delta \mathbf{e} - \frac{3}{2} \frac{\partial \mathbf{s}_\theta - \partial \mathbf{X}_\theta}{J(\mathbf{s}_\theta - \mathbf{X}_\theta)} \Delta p - \frac{3}{2} \mathbf{n}_\theta \cdot \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}'_\theta}{\sigma_\theta} \Delta p \right) \partial \Delta p \right) \quad (30)$$

여기서  $\bar{\sigma}'_\theta = \frac{\partial \bar{\sigma}_\theta}{\partial \Delta p}$  인데 식 (20)에 의하여

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_\theta}{\partial \Delta p} = \frac{\partial Y_\theta}{\partial \Delta p} \text{ 이다.}$$

식 (28), (29), (30)을 이용하여 편차응력증분과 편차 변형률 증분의 관계를 유도한 뒤 Hydrostatic part를 더하면 응력 증분과 변형률 증분의 관계를 식 (31)와 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \partial \Delta \sigma_{ij} = & \left[ \kappa - \frac{2}{3} \mu \left( 1 - \frac{3\theta\mu\Delta p}{\bar{\sigma}'_\theta} \right) \right] \delta_{ij} \partial \Delta \epsilon_{kk} + 2\mu \left( 1 - \frac{3\theta\mu\Delta p}{\bar{\sigma}'_\theta} \right) \partial \Delta \epsilon_{ij} \\ & + \left[ \frac{9\mu^2\theta}{\bar{\sigma}'_\theta G'} \left\{ \left( \bar{\sigma}_\theta - \frac{\partial \bar{\sigma}_\theta}{\partial \Delta p} \Delta p \right) + \theta C (\Delta p)' \frac{\Phi'}{\Phi^2} \right\} + \theta C (\Delta p)' \frac{\Phi'}{\Phi^2} \right] n_j n_i \partial \Delta \epsilon_{kk} \\ & + \frac{9\mu^2\theta\Delta p}{\bar{\sigma}'_\theta G'} \frac{\Phi'}{\Phi^2} X'_{ij} n_k \partial \Delta \epsilon_{kk} \end{aligned} \quad (31)$$

여기서  $\kappa$ 는 bulk modulus 이다. 식 (31)에서 주목할 점은 우변의 마지막 항에 초기 역응력( $X'$ )이 포함되어 있어 접선 강성 행렬이 비대칭이 된다는 점이다. 따라서 비대칭 강성행렬을 위한 계산법을 사용하여 평형 방정식의 해를 계산하여야 한다. 하지만 많은 경우 식 (31)의 강성행렬의 대칭부(symmetric part)를 이용한 계산으로도 비교적 정확한 해를 구할 수 있다.<sup>(9)</sup>

### 2.4 Explicit Integration

2.2 절에서 언급되었듯이  $\theta$ 가 0인 경우에는 외연적 적분을 수행해야 한다. 이 경우 각 변수의 증분은 모두 초기 속도를 이용하여 계산된다.

Table 1 Material Parameter of Chaboche Model

Material	T(C°)	n	K	k	C	r	Q	β	a <sub>0</sub>	E
316L stainless steel	20	24	151	82	162400	2800	60	8	1	196000
316L stainless steel	600	12	150	6	24800	300	80	10	1	149760

속도 의존성을 고려하지 않는 경우 등가 소성 변형률 증분은 식 (32)와 같이 표현된다.

$$\Delta p = \frac{3\mu n_r : \Delta e}{A} \quad (32)$$

여기서  $A = 3\mu + C - \frac{3}{2}\gamma n_r : X_r + b(Q - R_r)$  이다.

접선 강성 행렬은 일치조건(constistance condition)에 의해 식 (33)과 같이 유도된다.

$$\partial \Delta \sigma_y = \left[ k - \frac{2}{3}\mu \right] \delta_{ij} \partial \Delta \epsilon_{ij} + 2\mu \partial \Delta \epsilon_y - \frac{9\mu^2}{A} n_{ij} n_{ij} \partial \Delta \epsilon_{ij} \quad (33)$$

반면 속도 의존성을 고려하는 경우 등가 소성 변형률 증분은 식 (34)의 유동법칙에 의해 정의된다.

$$\Delta p = \left( \frac{J(s_r - X_r) - R_r - k}{K} \right)^n \Delta t \quad (34)$$

동적항복조건을 이용하면 식 (33)과 유사한 접선 강성 행렬을 유도할 수 있으며 다만 A가 다른 형태를 보인다.

$$A = 3\mu + C - \frac{3}{2}\gamma n_r : X_r + b(Q - R_r) + \frac{K}{n\Delta t} \left( \frac{\Delta p}{\Delta t} \right)^{\frac{1-n}{n}} \quad (35)$$

외연적 시간적분법의 정확도는 시간증분에 매우 민감하다. 시간 증분이 커지면 오차가 증가하고 매 증분마다 오차가 누적되어 발산하는 경향을 보인다.

2.5 ABAQUS와의 연결

본 연구에서 다루는 구성식과 시간 적분법은 상용 유한요소코드인 ABAQUS에 사용자 재료(User material, UMAT)서브루틴을 통해 결합되었다. 이 서브루틴은 전체 시스템의 평행방정식을 구성하는 과정에서 호출되며 각 적분점에서의 강성행렬과 응력 증분을 계산한다. 시간 적분법은 증분 초기의 응력 및 상태변수, 그리고 변형률 증분(Δε)과 시간 증분(Δt)로부터 최종 상태의 응력 및 상태 변수를 계산하는 과정에 사용되며 적분과정과 관련된 강성행렬을 계산하여 전체 구조물의 강성행렬을 구성하게 된다. 대변형을 고려하기 위하여 변형경사행렬 (deformation gradient tensor)과 평균회전행렬(Averaged rotation tensor)이 제공되며 본

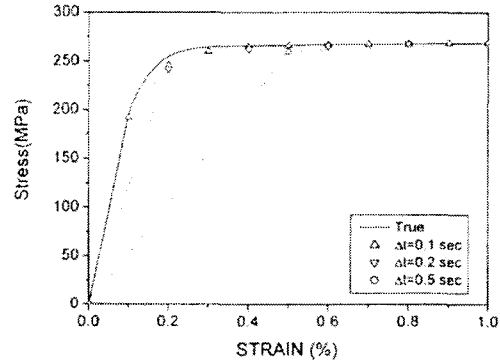


Fig. 1 Tension curve (θ = 1)

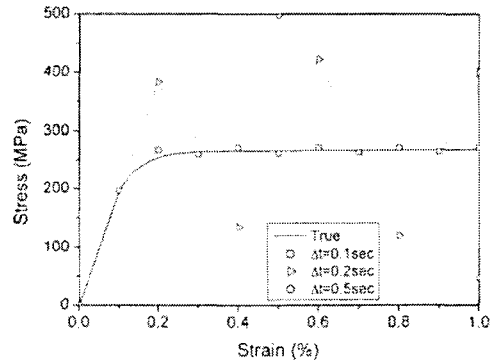


Fig. 2 Tension curve (θ = 0.5)

연구에서는 평균회전행렬을 사용하여 재료의 강성체 회전(Rigid Body Rotation)을 고려하였다.<sup>(11)</sup>

3. Numerical Application

3.1 단순인장 해석

작성된 프로그램의 검증은 위하여 단순 인장 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 재료는 20°C의 316 스테인레스 강으로 재료 상수는 Table 1에 수록되어 있다. 모두 일정한 변형률 속도(1%/sec)로 1%의 변형률까지 인장하였다. 중간점(θ)은 1과 1/2의 두 종류로 하고, 0.1sec, 0.2sec, 0.5sec의 시간증분에서 해석을 수행하여 단순인장해석에 미치는 중간점(θ)과 시간 증분의 영향을 관찰하였다.

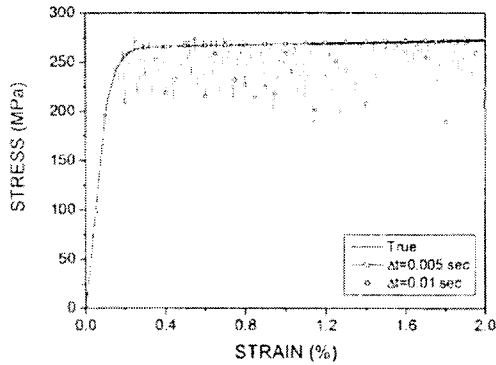


Fig. 3 Tension curve ( $\theta = 0$ )

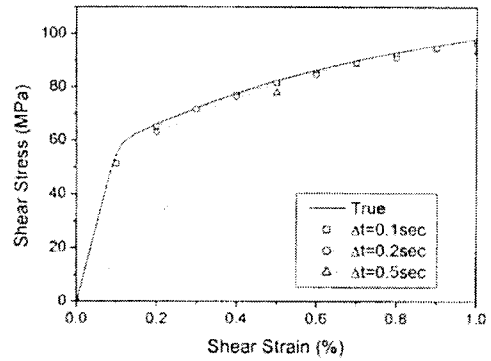


Fig. 5 Shear curve calculated from fully implicit integration

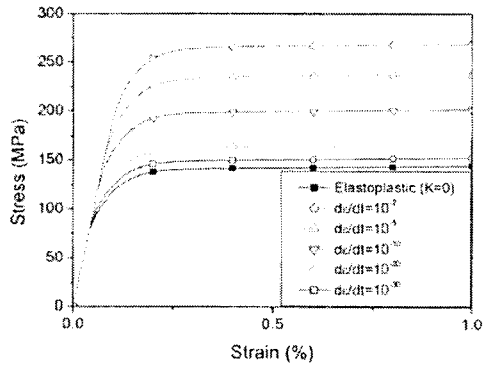


Fig. 4 Dynamic yield condition vs. static yield condition

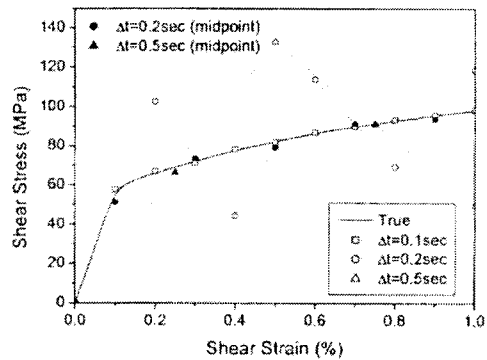


Fig. 6 Shear curve calculated from semi-implicit integration ( $\theta = 0.5$ )

Fig. 1 은 중간점( $\theta$ )이 1 인 경우 시간 증분을 변화시켜 시간 증분의 영향을 살펴보았다. 시간 증분이 커지면 실제 인장 곡선과 차이가 점점 커지는 경향을 보이며 모든 경우 실제 해보다 작게 예측하고 있다. 이러한 오차는 모두 선형화 과정에서 생기는 것으로 역응력과 저지응력의 선형화에 의해 생기는 오차와 속도의존성의 선형화에서 생기는 오차로 나눌 수 있다.

선형화된 역응력과 저지응력은 실제값과 보다 항상 작게 예측되는데 소성변형률증분( $\Delta p$ )이 커지면 그 차이가 더 커진다. 최종점의 소성변형률 속도( $\dot{p}_{i-N}$ )는 평균 소성변형률 속도( $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ )보다 더 크기 때문에 실제값보다 더 작게 예측된다.

Fig. 2 는 중간점이 1/2 인 semi-implicit integration 을 통하여 얻은 계산 결과로 시간 증분에 따라 상당히 큰 변화를 보이고 있다. 시간 증분이 0.1sec 보다 작은 경우에는 실제 인장곡선과 상당히 근접하고 오차의 부호가 계속 변한다. 이 때의 오차는 내연적 적분법의 경우보다 더 작아서 탄성-소성

전이 영역에서는 중간점이 1/2 인 경우가 더 정확하게 예측하고 있다. 시간증분이 커지면 계산 결과는 실제 인장곡선을 중심으로 큰 진폭으로 진동한다. 시간 증분이 일정이상 커지면 오차의 진폭이 커지는 문제 때문에 일반적으로 semi-implicit integration 보다 fully implicit integration 이 더 선호된다. 하지만 탄성-소성 전이구간이나 소성변형률 속도의 변화가 큰 구간에서는 semi-implicit integration 이 더 정확한 결과를 도출하기 때문에 이에 대한 고려가 필요할 것이다. semi-implicit integration 의 장점을 살리기 위해서 중간점( $\theta$ )을 고정하고 시간 증분을 조절하는 방법과 시간증분은 그대로 두고 중간점( $\theta$ )을 적절히 변화시키는 방법을 생각할 수 있다. 전자의 경우 전체 시스템의 시간 증분이 변형률 또는 응력의 변화가 큰 취약요소의 거동에 전적으로 의존하게 되기 때문에 시간 증분이 지나치게 작아지게 되어 계산시간이 매우 길어질 수 있다는 단점을 가지고 있다. 따라서 시간증분은 그대로 두고 중간점( $\theta$ )을 적절히 변화시키는 것이 전체 시스템의 계산시간을 증가시키지 않으면서 계산의 정확도를 유지시킬 수 있을 것이다.

Fig. 3은 explicit integration 을 통해 계산한 인장 곡선의 그림이다. 시간 증분이 0.005sec, 0.01sec 로 앞서의 경우에 비해 매우 작은데도 큰 오차의 진동이 발생하였다. 시간 증분이 0.02sec 인 경우에는 몇 증분 이후에 발산하여 계산이 중지되었다. 시간 증분이 0.005sec 인 경우는 변형률 1.2%까지는 오차가 거의 발생하지 않다가 조금씩 오차의 진동이 발생하여 점점 증가되는 경향을 보인다. 시간 증분이 0.01sec 인 경우 매 증분마다 불규칙적인 오차의 진동이 발생하고 있다. 이것은 절삭오차(truncation error)에 의한 것이며 explicit integration 에서는 이 오차가 계속 누적되어 초반에 발산하지 않아도 증분이 계속되면서 점차 발산하게 된다.

본 연구의 시간적분법에서는 점소성 구성식의 유동법칙이 선형화를 통하여 탄소성 구성식의 항복조건과 유사한 동적항복조건으로 변환되는 것을 이용하여 점소성 구성식과 탄소성 구성식의 적분 방법을 통합시켰다. 식 (20)의 동적항복조건에서 속도의존항은 시간증분이 커질수록 감소하고 시간 증분이  $\infty$ 가 되면 속도의존항은 0 이 되어 정적항복조건( $K=0$ )과 동일해진다. Fig. 4는 동적항복조건의 결과와 정적항복조건의 결과를 비교한 그림으로 변형률 속도를  $10^{-3}/\text{sec}$  에서부터  $10^{-30}/\text{sec}$  까지 감소시키면 인장곡선이 정적항복조건에 의해 계산된 인장곡선에 수렴하는 것을 알 수 있다.

3.2 단순 전단 변형 해석

인장 해석과 함께 프로그램의 검증에 많이 사용되는 단순 전단변형 해석을 수행하였다. 316 스테인레스강의 600°C 에서의 재료상수(Table 1)를 사용하였으며 변형률 속도는 1%/sec 로 고정하였다. 단순전단변형( $\epsilon_{23}$ )이 작용할 경우  $\sigma_{23}$ ,  $X_{23}$ ,  $\epsilon_{23}^p$ 를 제외한 모든 텐서 성분은 다 0 이 되기 때문에 적분 방법을 분석하는 데 유용하다.

Fig. 5는 fully implicit integration 에 의해 계산된 전단 곡선을 나타낸 것이다. 인장곡선의 경우와 마찬가지로 시간증분이 커지면 오차가 증가한다. Fig. 6은 중간점이 1/2 인 semi-implicit integration 을 통하여 얻은 전단 곡선으로 시간 증분이 0.1sec 인 경우 실제 곡선과 거의 완벽하게 일치하고 있다. 시간증분이 커지면 인장곡선의 경우와 마찬가지로 오차의 진동이 증가한다. Fig. 6에서 속이 찬 기호(●, ▲)로 나타난 중간점의 용력을 보면 실제 곡선과의 오차가 매우 적다는 사실을 알 수 있다.

식 (20)에서 n 이 충분히 크면 변형률 속도의 선형화에 의한 오차가 크지 않다. 현재의 해석에 사용된 n 은 12 와 24 로 충분히 크기 때문에 속도의존성에 의한 영향은 무시한다고 하면 오차의 원인은 역응력과 지지응력의 선형화에 의한 것이라

Table 2 Error estimation in linearization of Back stress

$\Delta p(\%)$	$X_{23}$	Error ( $\theta = 1$ )	Error ( $\theta = 1/2$ )
0.1	12.37	1.36	-0.08
0.2	21.53	3.64	-0.49
0.5	37.08	14.47	7.45

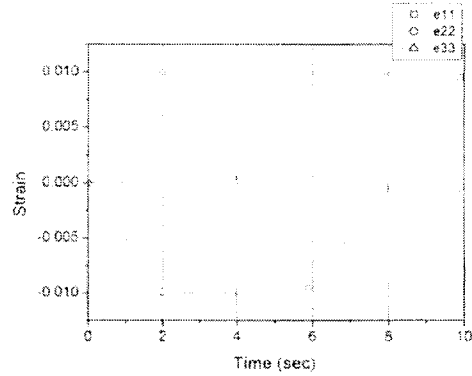


Fig. 7 Strain history of nonproportional loading

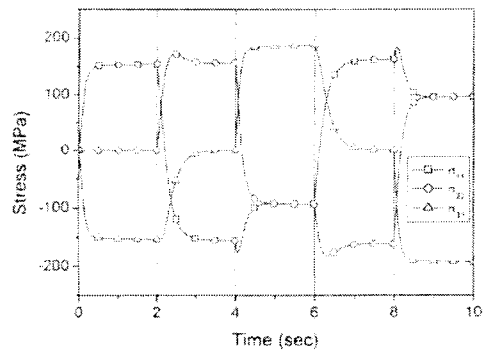


Fig. 8 Stress history of nonproportional loading

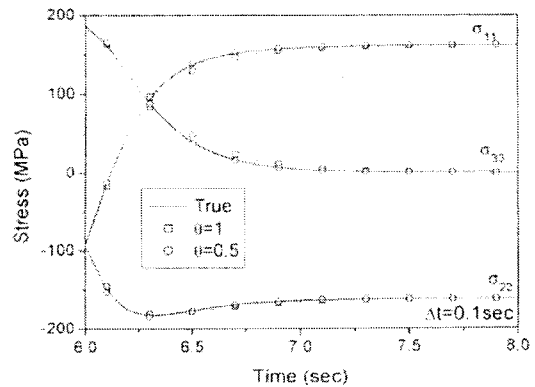


Fig. 9 Comparison of integration schemes

할 수 있다. 단순 전단 변형의 경우 식 (7)을 적분하여 식 (36)의 역응력을 구할수 있다.

$$X_{23} = \frac{C}{\gamma\sqrt{3}}(1 - \exp(-\gamma p)) \quad (36)$$

식 (36)과 식 (14)를 이용하면 선형화 과정에서 발생하는 오차를 계산할 수 있다. Table 2 에서 알 수 있듯이 역응력의 계산에 있어서는 중간점이 1/2 인 경우가 월등하게 우수하다. 저지응력은 비선형성이 역응력만큼 크지 않아서 오차가 거의 발생하지 않는다.

### 3.3 Nonproportional loading 의 해석

단순 인장 변형과 단순 전단 변형은 주응력의 방향이 변하지 않는 비례하중(proportional loading)이기 때문에 계산의 정확도는 주로 유효 소성변형률 증분( $\Delta p$ )에 의존한다. 하지만 비례하중이 아닌 경우 주응력과 소성변형률의 방향이 회전하는 경우에는 소성변형률 방향( $\mathbf{n}$ )의 변화가 계산의 정확도에 큰 영향을 미친다.

Fig. 7 은 해석에 사용된 nonproportional loading 의 변형률 이력이다. 변형률의 합이 항상 0 이기 때문에 변형률은 편차변형률과 동일하다. 2 초마다 소성 변형률 방향이 급격하게 변한다. Fig. 8 은 Fig. 7 의 변형률 이력에 의한 응력 이력을 나타내고 있으며 급격한 변형률의 변화로 인해 응력 역시 상당히 변하는 것을 관찰할 수 있다.

Fig. 9 는 변형률 이력중에서 6 초에서 8 초까지의 구간에서 중간값( $\theta$ )에 따른 해석결과를 비교한 것이다. 소성변형률의 방향이 급격하게 변화는 7 초에서 8 초까지의 구간에서 결과를 비교하면 중간값( $\theta$ )이 1/2 인 경우가 변형곡선에 근접한 결과를 보이고 있다. 소성변형률의 반향의 변화가 큰 영역에서는 중간점( $\theta$ )이 1/2 인 경우가 더 정확한 결과를 도출하지만 시간증분이 커지면 오차의 진동이 발생할 수 있기 때문에 적절한 중간점( $\theta$ )의 선정이 중요하다.

### 3.4 Thick walled cylinder 의 해석

두꺼운 실린더의 시간 의존적 변형에 대한 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 실린더는 내경 40mm, 외경 60mm 인 축대칭 모형이다. 내압은 초기 10 초 동안 26MPa 까지 증가된 후 1000 초동안 유지되었다. 재료 상수는 316L 스테인레스 강의 600°C 의 값을 사용하였으며 Table 1 에 정리되어 있다. 유한요소 해석은 일반 평면변형률 (Generalized plane strain: 이하 GPE)조건에서 수행하였으며 수치해<sup>(7)</sup>와 비교하였다. 유한요소해석에서 GPE 조건을 위해 상단의 노드의 축방향 변위

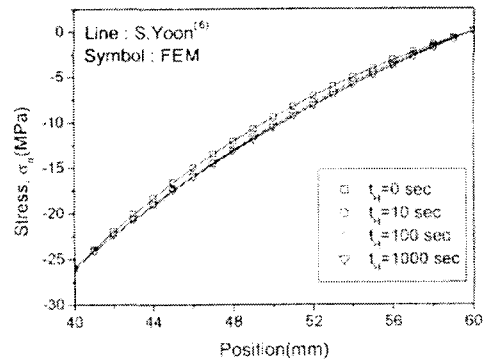


Fig. 10 Radial stress distribution in a thick-walled cylinder (Generalized Plane strain condition)

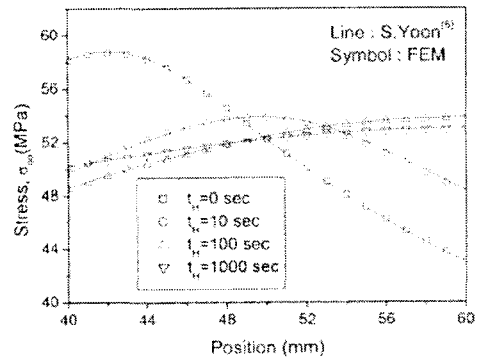


Fig. 11 Circumferential stress distribution in a thick-walled cylinder (Generalized Plane strain condition)

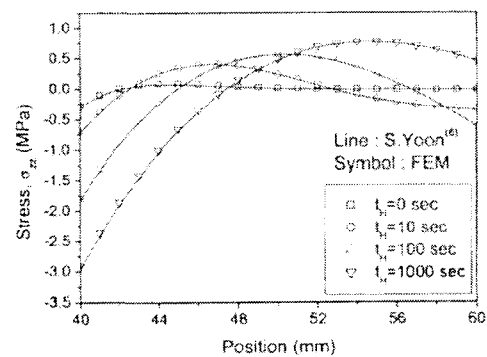


Fig. 12 Axial stress distribution in a thick-walled cylinder (Generalized Plane strain condition)

를 모두 같게하는 제한조건을 가하였다. (ABAQUS에서는 \*Equation 사용한다) 평균 축하중 F는 0으로 규정하였다. Fig. 10-Fig. 13 에서 실선은 수치해의 결과이며 Symbol 은 유한요소 해석결과이다.  $T_H$  는 내압유지시간을 의미한다. 유한요소 해석에서



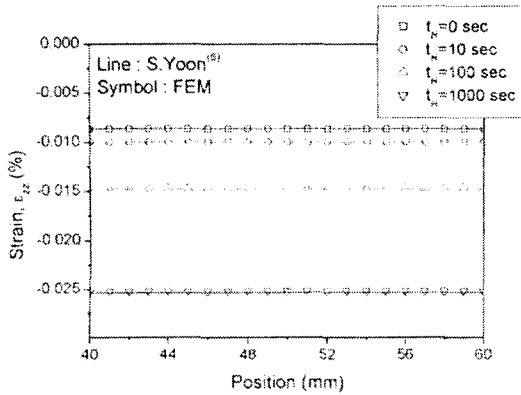


Fig. 13 Axial strain distribution in a thick-walled cylinder (Generalized Plane strain condition)

변형률이나 응력은 적분점(integration point)에서 계산되는 값이므로 외삽 방법을 사용하여 Node 점에서의 값을 계산하였다.

Fig. 10의 반경 방향 응력은 시간에 대해 거의 변화가 없다. 이것은 내압이 26MPa, 외압이 0 MPa로 고정이 되어 있기 때문이다. 이에 비해 원주 방향 응력(Fig. 11)의 분포는 독특한 거동을 보인다. 유지시간이 0 초인 경우 내부의 응력이 더 크고 바깥쪽이 작은 분포이지만 유지 시간이 길어짐에 따라 기울기가 점점 감소하여 1000 sec에서는 응력 분포가 역전된다. 시간 의존성 변형에 의해 응력 분포가 상당히 변하는 경우의 유한요소 해석이 수치해와 잘 일치한다.

Fig. 12와 Fig. 13은 축방향 응력과 변형률의 분포를 나타낸 그림이다. 축응력이 초기에는 거의 0이고 시간 의존성 변형으로 인하여 안쪽의 응력이 감소하고 대신 바깥쪽의 응력이 증가하는 경향을 보인다. 축방향 변형률(Fig. 13)이 위치에 무관하게 같은 값이며 시간이 따라 감소하는 경향을 보여주고 있다. 축방향 변형률은 GPE 조건에서 구한 응력해를 식 (2)의 구성식에 대입하여 구한 것이다.

두꺼운 실린더의 시간 의존적 변형에 대해서 본 연구의 시간 적분법이 모든 응력성분과 변형률 성분이 정확히 일치하고 있음을 확인하였다.

#### 4. 결론

Armstrong-Fredrick 형태의 비선형 이동경화모델의 경우 회복 항(Recovery Term)으로 인해 나타나는 이동경화응력과 소성 변형률 충분한 비선형 관계를 고려하기 위하여 기존의 Radial return mapping 방법을 확장한 수치 적분법을 개발하였다.

동적 항복 조건(dynamic yield condition)을 도입하

여 개발된 시간 적분법을 탄소강 구성식과 점소성 구성식 모두에 적용할 수 있도록 하였다.

일반적으로 중간점이 1인 경우가 안정적인 해를 도출하였지만 탄성-소성권이 구간이나 변형률 방향이 급격히 바뀌는 경우 중간점이 1/2인 경우가 중간점이 1인 경우보다 더 정확한 결과를 도출하였다.

두꺼운 실린더의 시간 의존적 변형에 대한 해석을 수행하였으며 점소성 응력해와 비교하였으며 서로 일치함을 확인하였다.

#### 후 기

본 연구는 국가지정 연구실 CARE Lab.의 지원 하에 수행되었으며 이에 감사를 드립니다.

#### 참고문헌

- (1) Miller, A. K., 1987, *Unified Constitutive Equations for Creep and Plasticity*, Elsevier Applied Science, London.
- (2) Krausz, A. S. and Krausz, K., 1996, *Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation*, Academic Press.
- (3) Orits, M., and Simo, J. C., 1986, "An Analysis of a New Class of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Equations," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, p. 353.
- (4) Honberger, K., and Stamm, H., 1989, "An Implicit Integration Algorithms with a Projection Method for Viscoplastic Constitutive Equation," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 28, p. 2397.
- (5) Chaboche, J. L. and Cailletaud, G., 1996, "Integration Methods for Complex Plastic Constitutive Equations," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, p. 125
- (6) Yoon, S., Lee, S.-B., Kim, J.-B., Lee, H.-Y., and Yoo, B., 2000, "Generalization of Integration Methods for Complex Inelastic Constitutive Equations with State Variables," *Transaction of the KSME, A*, Vol. 24, No. 5, pp. 1075~1083.
- (7) Yoon, S., Lee, S.-B., Viscoplastic Solution of Thick Walled Cylinder Considering Axial Constraint, *Transaction of the KSME, A*, to be printed.
- (8) Lemaitre, J., and Chaboche, J.-L., 1990, *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, Cambridge.
- (9) ABAQUS, *User's manual*, Version 6.1, 2000, HKS, USA.
- (10) Press, W. H., Thacker, B. H., 1992, *Numerical recipes in Fortran*, Cambridge Press.
- (11) Martin, E.B. and McDowell, D.L., 1997, "A Semi-Implicit Integration Scheme for Rate Dependent and Rate-Independent Plasticity," *Computer & Structures*, Vol. 63, No. 3, pp. 579~600.