

# 자바 빈즈를 이용한 웹 기반의 미분방정식 학습 콘텐츠 개발

정광영\*, 허원\*\*, 방레비엣\*

공주대학교 기계공학부\*  
공주대학교 정보통신공학부\*\*

(2003. 4. 3 접수)

## Development of Web-based Contents for Differential Equations using Java Beans

Kwang Young Jeong\*, Won Ho\*\*, Le Viet Banh\*\*

*Division of Mechanical Engineering, Kongju National University\**

*Division of Information & Communication Engineering,  
Kongju National University\*\**

(Received April 3, 2003)

### 국문요약

본 논문에서는 자바 애플릿을 이용하여 웹 기반의 미분방정식 학습용 콘텐츠를 개발하였다. 컴퓨터 분야의 컴포넌트 기반의 소프트웨어 개발기법을 도입하여, 사용하기에 단순하고 편리한 자바 빈즈 컴포넌트를 먼저 개발하고, 이를 활용하여 미분방정식 학습용 콘텐츠를 개발하였다. 개발된 콘텐츠는 높은 상호작용 기능을 가지고 있어서, 학습자가 흥미를 갖고 학습할 수 있고, 풀이 절차를 반복적으로 확인할 수 있으며, 복잡한 수학적 개념을 쉽게 이해할 수 있다.

### Abstract

This paper presents web-based contents for studying differential equations. The component-based software development techniques have been used to develop Java Bean components which are simple and convenient for learners. The components have been used to make the contents for the differential equations. The contents have high interactive capability, which gives much interest to learners. The learners can easily understand the mathematical concept by repeating the solving procedure.

## 1. 서론

최근 인터넷의 이용이 보편화됨에 따라 인터넷을 통한 웹 기반 강의가 여러 방면에서 활용이 되고 있다. 웹 기반 강의의 장점은 인터넷만 연결되어 있으면 학습자가 이해가 될 때까지 반복하여 보고 들음으로써 자신의 능력에 맞게 학습을 할 수 있다는 것이다. 초기의 웹 기반 교육은 HTML을 이용하여 웹에 게시한 강의 내용을 학습자가 읽는 수동적인 방법을 사용하였으나, 최근에는 상호작용 기능을 이용한 양방향의 대화형 통신을 사용하여 학습자의 능동적인 학습참여를 이끌어내어 면대면 강의에 근접한 교육효과를 얻고 있다. (이충기, 2002)

미분방정식은 거의 모든 공학계열학과 학생들이 공업수학 또는 응용수학 과목에서 필수적으로 배우고 있다. 상호작용 기능이 높은 공업수학 학습용 콘텐츠가 자바기술을 활용하여 개발되어 인터넷을 통하여 일부 제공되고는 있으나 이들 콘텐츠가 가지고 있는 일반적인 문제점은 학습주제가 단편적이고, 사용자 인터페이스의 편리성이 떨어지고, 학습 확인 효과가 낮다는 것이다. 이는 기획자, 컴퓨터 프로그래머, 해당 영역의 전문가, 그래픽 디자이너와 같이 콘텐츠 개발에 필요한 인력과 비용을 확보하기가 어렵다는 것이 주된 이유이다. 이러한 한계를 극복하기 위하여 수학 분야에 전용으로 활용할 수 있는 개발 도구를 활용하기도 하는데, 이러한 경우에는 개발 도구가 제공하는 기능으로 제한된 상호작용 패턴을 구현하도록 개발을 맞추어야하는 어려움이 있다.

본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위해 컴퓨터 분야의 컴포넌트 기반의 소프트웨어 개발 기법을 도입하여, 보기 좋고, 사용하기 단순하고 편리한 자바 빈즈 컴포넌트(Java Beans Component)를 먼저 개발하고, 이를 활용하여 대학교 공학계열의 과목에서 기본이 되는 일계 및 이계 미분방정식에 관련된 학습용 콘텐츠를 개발하였다. 개발된 콘텐츠는 기존의 콘텐츠와는 달리 미분방정식 학습에 대하여 일관성 있고 체계적인 흐름을 가지며, 높은 상호작용 기능을 구현하도록

하였다.

또한, 학습 단위에서 고도의 학습 결과 확인 기능을 부가하여, 학습자가 콘텐츠를 통한 학습으로 개념을 이해하며, 이해한 내용과 풀이 절차를 반복적으로 확인할 수 있는 기능을 갖추도록 함으로써 복잡하고 모호한 수학적 개념을 쉽게 이해할 수 있도록 하였다. 아울러 개발 학습 콘텐츠에 음성 강좌를 추가하여 면대면 강의를 대체하거나 보완하여 활용할 수 있도록 하였으며, 수십 가지 조합의 인터넷 문제를 난수를 이용하여 제공하여 학습자가 여러 가지 새로운 문제를 풀 수 있는 기능을 제공하였다.

## 2. 개발 배경

점  $x=a$ 를 포함하는 개구간에서 정의된 함수  $f(x)$ 가 다음과 같은 극한값을 가지면 이 값을  $x=a$ 에서의 미분계수라고 하고  $f'(a)$ 로 표현한다.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

위에 정의된 값을 임의의  $x$ 에 대하여 다시 쓰면 도함수  $f'(x)$ 가 정의된다.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

주어진 함수의 도함수를 구하는 것을 '미분한다'고 한다. 뉴우튼의 역학, 인구분포처럼 자연현상이나 사회현상은 많은 경우 함수와 그 변화율(도함수)의 관계식으로 표현되는 데, 하나 이상의 도함수가 들어간 방정식을 미분방정식이라고 한다. 미분방정식을 만족하는 함수를 찾는 것을 '해(Solution)를 구한다'라고 한다.

미적분은 뉴우튼(Newton, I.)과 라이프니츠(Leibniz, G. W.)에 의해 독립적으로 발견되었다고 알려져 있다. 뉴우튼은 연속적으로 변화하는 양을 유량(Fluent)이라 하였고 유량의 시간에 대한 변화율을 유율(Fluxion)이라 불렀다. 뉴우튼의 미적분에 대한 접근은 물리적이었으며 유량을  $y$ 라 하면 유율은  $y'$ 로 나타내었다.

미적분이라는 같은 개념을 나타내는 데 뉴턴은 경험주의적 입장에서 있는 데 반해 라이프니츠는 기호를 사용한 형식주의적 입장에서 이를 다루었다. 라이프니츠는  $x$ 와  $y$ 의 가능한 적은 양을 나타내는  $dx$ 와  $dy$ 를 처음 사용하였다. 즉, 뉴턴은 미분을  $y$ 로 나타내었으나, 라이프니츠는  $\frac{dy}{dx}$ 와 같이 표시하였다. 또한, 라이프니츠는 합을 뜻하는 라틴어 summa의 첫 문자를 길게 늘여 적분기호  $\int$ 를 만들었다. 그가 사용한  $\int$ 과  $d$ 는 서로 역의 산법을 나타내는 기호가 되고 연산도 아주 편리해진다. 이 절묘한 기호 덕분에 미적분의 계산이 발달하였고 그 결과 자연과학의 문제를 해결하는데 많은 성과를 올렸다. (김용운과 김용국, 1997)

현대에는 시간에 대한 도함수를 나타낼 때처럼 뉴턴식 기호를 간혹 사용하며, 일반적으로 라이프니츠의 미분기호인  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d}{dx} f(x)$ 와 더불어  $y'$   $f'(x)$ 를 흔히 사용한다. 본 논문에서도 이들을 병행하여 사용하였다. 미분의 기본원리는 고등학교 과정에서 가르치며 여러 사이트에서 미분의 개념에 대한 콘텐츠를 제공하고 있다. 그러나 미분방정식의 해법에 대해 그 원리와 그 해법을 자세히 다루는 콘텐츠는 보기 힘든 실정이다.

현재 인터넷에서 발견할 수 있는 대부분의 수학 콘텐츠를 살펴보면 수학 분야의 교육 종사자들이 개인적으로 제공하는 서비스가 많은 것을 확인할 수 있다. 개념 설명을 위한 상호작용성이 높은 콘텐츠 개발 도구로서 자바와 플래시를 주로 사용하는데 수식을 다루는 수학적인 연산 과정이 많이 포함되는 경우, 상대적으로 자바 애플릿(Java Applet)으로의 개발이 용이하다. 이렇게 프로그램이 개발되는 경우, 개발 결과물은 전문 프로그래머가 개발한 결과와는 차별화되는데, 그림 1에서 볼 수 있듯이 GUI(Graphic User Interface) 부분의 미관이 떨어지고 학습자 입장에서 애플릿을 조작하기가 불편한 경우가 많다.

자바 애플릿을 활용하여 개발된 애플릿으로는 공학 분야가 많으며 간단한 시뮬레이션 형태가 주를 이루고 있다. 이와 같은 분야는 전기기기, 디지털회로, 마이크로프로세서 등을 들 수 있으며 많은 결과물이 발표되었다. (김영민 등, 1998; 허

원과 기장근, 2000; Ki and Ho, 1999) 이러한 분야에 비하여 수학 분야는 다양한 영역에 대해 높은 추상적 개념을 다루는 여러 분야가 존재하므로 다른 공학 분야와 같이 동일한 아이디어와 개발방법론을 적용하기에는 어려운 점이 있다.

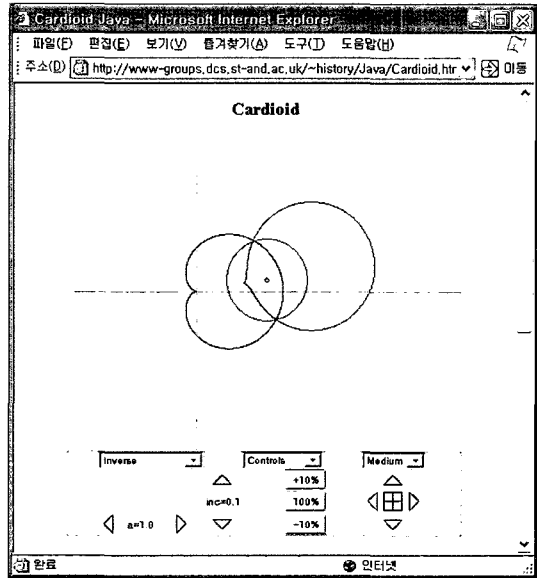


그림 1. 인터넷에서의 JAVA 애플릿의 활용

상호 작용성이 높은 학습 콘텐츠를 수학전용 콘텐츠 개발도구를 활용하여 개발하는 방법도 있는데, Cabri와 같은 개발도구는 자바를 수학 콘텐츠 개발에 쉽게 활용할 수 있도록 개발된 것이다. 그림 2와 같은 사이트는 이러한 도구를 이용하여 방대한 분량의 수학용 애플릿을 제공한다. 이러한 도구를 활용할 경우의 문제점은 개발자는 개발 도구가 제공하는 상호작용기능 이상을 콘텐츠에 부여할 수 없다는 것이다. 예를 들어, Cabri의 경우에는 화면상에 개발자가 지정한 점을 마우스로 선택하여 움직임으로서 상황 변화 이벤트를 발생시킬 수 있다. 이러한 적용 예는 수학에서도 기하학적인 개념을 설명하는데 탁월한 효과가 있다. 그러나 수식 전개, 학습 결과 확인등과 같은 부분에서의 활용은 앞서 설명한 바와 같이 다소 어려운 점이 있다.

콘텐츠 개발에는 필연적으로 인력과 예산이 한

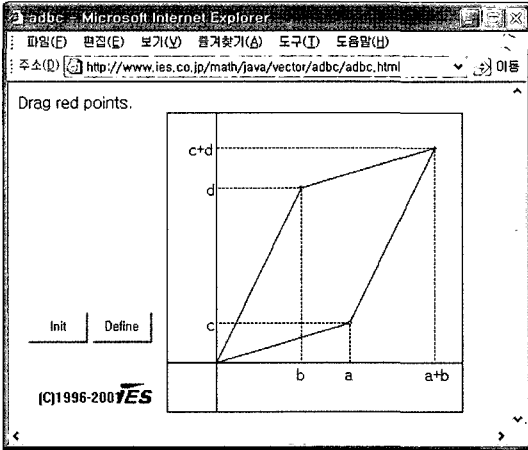


그림 2. Cabri 개발 도구를 활용한 결과물

계 요소로 작용한다. 상대적으로 적은 인력과 예산으로 양질의 콘텐츠를 개발하려면 컴포넌트 기반의 개발방법이 가장 효과적이다. 콘텐츠 개발에 필요한 컴포넌트를 잘 결정한 후 이 컴포넌트를 반복적으로 재활용하면 개발 시간과 인원을 줄일 수 있다. (허원, 2001) 자바 빈즈 컴포넌트의 개발 시 고려해야 할 점은 사용자의 접근 및 사용이 편리하고, 단순하며, 눈에 피로를 주지 않으며, 학습 욕구를 증가시킬 수 있도록 설계하여야 한다는 것이다. 본 논문에서는 자바 빈즈 컴포넌트를 이용하여 미분방정식 학습 콘텐츠를 개발하였으며, 해당 개념에 대한 음성 강좌를 묶어서 미분방정식에 대한 온라인 강좌 패키지를 구성하였다.

### 3. 개발내용

본 학습 콘텐츠에서는 미분방정식의 기본이 되는 일계미분방정식과 이계미분방정식에 대한 내용을 다루고 있다. 그림 3에 본 논문에서 다루고 있는 학습객체가 나와 있다. 일계미분방정식에서는 변수분리형 미분방정식, 완전미분방정식, 일계선형미분방정식을 다루고 있다. 이계미분방정식에서는 제차미분방정식, 비제차미분방정식 및 동차미분방정식을 다루고 있다.

웹 기반의 미분 방정식 학습 콘텐츠의 초기화면은 그림 4와 같다. 그림에서 보듯이 이 학습객체

는 음성강좌, 자바애플릿, 인터넷시험의 세 가지 컴포넌트로 구성된다. 학습자는 음성강좌를 실행하여 기본적인 개념을 화면과 음성을 통하여 익히게 되며, 자바애플릿을 실행하여 파라미터를 변화하는 등의 개념과 실습과정을 익히게 된다. 그 후에제나 인터넷시험(허원, 2000)을 실행하여 이해한 내용을 실습하게 된다.

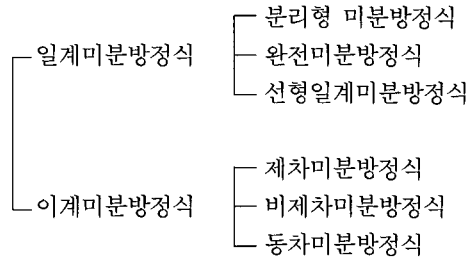


그림 3. 다루고 있는 미분방정식

#### 3. 1. 일계미분방정식

그림 4에서 음성강좌를 실행하면 그림 5와 같은 화면이 나오게 된다. 또한 이 화면과 함께 녹음된 강의가 실행이 되는 데 밀줄, 원, 사각형 등의 강의보조도구를 사용하여 강의가 진행되므로 학습자는 마치 강의실에서 강의를 듣는 것과 같은 느낌을 받게 되며 이해가 되지 않으면 반복하여 강의를 들을 수 있다. 그림 5는 상미분방정식, 편미분방정식, 일반해, 특수해 등 미분방정식의 기본 개념을 설명한 것이며, 음성강좌에서는 변수분리법, 완전미분형의 해법, 적분인수에 의한 해법 등 일계미분방정식을 푸는 방법을 설명한다.

일계미분방정식을  $y' = f(x, y)$  형태로 기술할 때 이 방정식의 기하학적인 의미를 고찰해보면 실제로 방정식을 풀지 않고, 이 미분방정식의 특수해에 대한 정보를 얻을 수 있는 도식적인 방법을 알게 된다. 즉, 아직 해는 모르지만 점  $(x_0, y_0)$ 를 지나는 한 해는 이 점에서의 기울기  $f(x_0, y_0)$ 를 가져야 한다는 것이다.  $f(x_0, y_0) = k$ 인 곡선을 등사선(Isocline)이라하고, 등사선을 따라 기울기가  $k$ 인 짧은 선분을 여러 개 그리는 작업을 모든 등사선에 대해 적용하면 방향장(Direction field)라 부르는 선분들의 그림을 그릴 수 있다. 이 선분들을

이용하면 이 미분방정식의 해곡선(Solution curve)을 쉽게 근사할 수 있게 된다. 그림 6에 방향장에 대한 몇 가지 예가 나와 있으며 다이얼로 방향장의 촘촘한 정도를 조정할 수 있다.

**Differential Equations**

1. 1계 미분방정식  
2. 2계 미분방정식

1. 1계 미분방정식  
이런 강의에서는 1계 상미분 방정식의 해를 찾는 방법을 배운다.

2. 2계 미분방정식  
변수  $x$ 에 관한  $y$ 의  $n$ 차 도함수가 최고차인 미분 방정식인  $n$ 계 상미분 방정식이라 한다. 따라서, "1계 상미분 방정식"은 변수  $x$ 에 관한 미지함수  $y$ 의 최고차 도함수가  $y'$ 인 미분 방정식이다.

**VOICE LECTURE**

- 음성강좌 : 1계 미분방정식에 대한 음성강좌.

**JAVA APPLET**

- 상미분과 편미분 방정식 : 상미분방정식과 편미분방정식 구분해보자.
- 방향장 : 방향장에 대해 알아본다.
- 편수분리형 미분방정식 : 편수분리형 미분방정식의 형태와 풀이과정 알아본다.
- 변수분리형으로 변환 : 변수분리형 미분방정식으로 변환할 수 있는 경우를 알아본다.
- 완전미분방정식 : 완전미분방정식의 형태와 풀이과정 알아본다.

**CYBER TEST**

- 인터넷이 연결된 경우 : 인터넷이 연결되었으면 1번 시험단 접수 가능합니다. (발문자의 경우 ID-quest 이용번호-quest)
- 인터넷이 연결된 경우 : 인터넷이 연결되었으면 2번 시험단 접수 가능합니다. (발문자의 경우 ID-quest 이용번호-quest)
- 인터넷이 연결된 경우 : 인터넷이 연결되지 않은 경우 인터넷 문제 업데이트의 설명에 대한 #를합니다.

그림 4. 미분방정식 학습객체 기본화면

1계 상미분방정식 (1/6)

**Basic Concepts**

- 상미분방정식(Ordinary Differential Equation)  
ex)  $y' = \sin x$ ,  $y'' + 4y = 1$  where  $y = y(x)$ ,  $\frac{dy}{dx} = y'$
- 1계 상미분방정식(1st Order ODE):  $F(x, y, y') = 0$
- 편미분방정식(Partial Differential Equation)  
ex)  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  where  $u = u(x, y)$
- 해 (Solution)
  - 일반해 (General Solution, 임의의 상수 포함)
  - 특수해 (Particular Solution, 상수가 특정한 값)

ex)  $y' = y$ 의 일반해는  $y = ce^x$ , 특수해의 하나는  $y = 3e^x$

그림 5. 음성강좌: 미분방정식의 기본개념

일계미분방정식을 푸는 가장 기본적인 방법이 두 변수를 좌우변에 각각 정리하여 분리형방정식으로 만들어 푸는 방법이다. 그림 4에서 변수분리형 방정식을 실행하면 그림 7의 화면이 나오게 된다. 그림 7의 왼쪽 위에 푸는 방법이, 오른쪽 위

**방향장 (Direction Field)**

미분 방정식의 해의 형태에 대한 정보를 얻기 어려운 경우 즉, 해가 음함수로 정의되거나 또는 계산할 수 없거나 단순화 할 수 없는 경우엔 포함하는 경우 곡선상의 여러 점에서 짧은 점선의 선분단 그리면 어떤 형태의 곡선이 나오는지 쉽게 알 수 있다.

각 함수에 대한 방향장의 형태를 알아보자. 다이얼을 조정하면 그래프의 크기만 조정할 수 있다.

What is Direction Field?

$y' = xy$   
 $y' = x$   
 $y' = x^2$   
 $y' = y$

Copyright by JnoTech Co., Ltd. All rights reserved.

그림 6. 방향장(Direction Field)

에 직접 수치를 집어넣을 수 있는 예제가 있다.

또한 나온 결과는 상수를 포함하므로 오른쪽 아래의 다이얼을 변화하여 이 상수를 변화시키면 이 미분방정식을 만족시키는 해가 왼쪽 아래처럼 도시가 된다. 면대면 강의에서는 이러한 해의 그림을 그리기가 힘들고 이해시키기도 곤란하지만 자바 애플릿을 사용하여 학습자의 이해도를 높여도 록 하였다.

Separable Equation

Separable Equations:  
 $g(y)y' = f(x)$   
 $g(y)dy = f(x)dx$   
 $\int g(y)dy = \int f(x)dx + C$

ex)  $y' - yy' + \sqrt{x} - x = 0$   
 $2 y dy = -4.0 x dx$   
 $\frac{2}{2} y^2 = \frac{-4.0}{2} x^2 + C$   
 $\frac{x^2}{8.0} + \frac{y^2}{4.0} = C$

C값에 따른 변화는 아래달 참조

$\frac{x^2}{32.9} + \frac{y^2}{16.45} = 1$

C값에 의한 그래프의 변화

Copyright by JnoTech Co., Ltd. All rights reserved.

그림 7. 변수분리형 미분방정식

일계미분방정식의 형태가 분리형이 아니지만 간단한 변수변환에 의하여 분리형 미분방정식으로 바꾸어 풀 수 있는 경우가 있다. 그림 8의 왼쪽 위에 이 방법이 설명되어있으며, 아래 왼쪽에 임의의 변수를 직접 입력하여 해를 푸는 방법이 어떻게 전개되는가를 보여주고 있다. 또한 해를 푼 결과로 나온 상수를 다이얼을 통하여 조절함으로써 그 해를 그림으로 볼 수 있다.

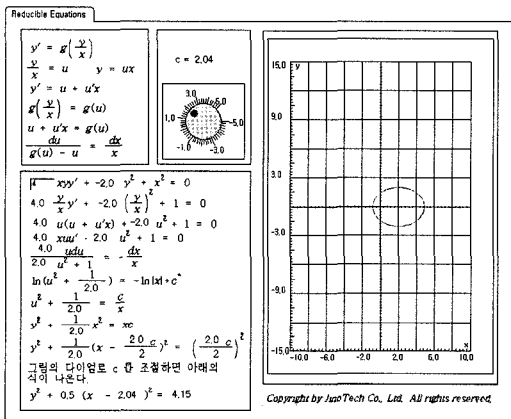


그림 8. 변수분리형 미분방정식으로 변환

일계미분방정식의 형태가 완전미분(Exact Differential)일 경우에 해를 구하는 방법이 그림 9에 설명되어 있다. 그림 9의 아래 왼쪽에는 수치

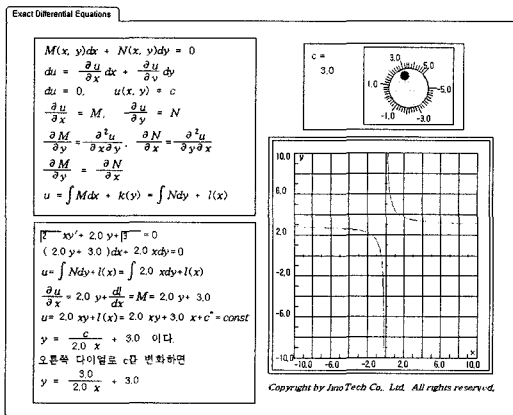


그림 9. 완전미분방정식

를 직접 넣어서 식을 전개하는 방법을 익힐 수 있도록 되어 있다. 또한, 해를 푼 결과로 나온 상수는 마우스로 작동되는 다이얼을 통하여 변화시킬 수가 있어서 해를 그림과 같이 도시할 수 있다.

선형일계미분방정식인 경우에는 적분인수(Integrating Factor)를 먼저 구하여 해를 얻는 방법이 있으며 그림 10의 음성강좌에 이 방법을 설명하였다. 학습자는 화면을 보면서 음성강좌를 들으며 이를 이해할 수 있다.

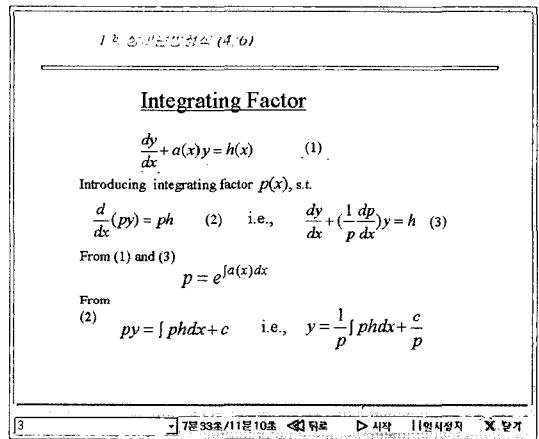


그림 10. 적분인수 및 일계선형미분방정식

### 3.2 이계미분방정식

이계선형미분방정식은 일반적으로 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x) \quad y = y(x)$$

$f(x)$ 와  $g(x)$ 가 상수인 경우에는 아래와 같다.

$$y'' + ay' + by = r(x) \quad y = y(x)$$

$r(x) = 0$ 인 경우의 미분방정식을 제차미분방정식(Homogeneous differential equation)이라 하고,  $r(x) \neq 0$ 인 경우에는 비제차미분방정식(Nonhomogeneous differential equation)이라 한다.

이계미분방정식을 다음 세 가지의 경우로 나누어 해를 구하는 방법을 구현하였다.

- 1) 상수계수의 제차미분방정식의 일반해
- 2) 상수계수의 비제차미분방정식의 특수해
- 3) 동차미분방정식(Equi-dimensional differential equation)

비제차미분방정식의 일반해는 제차미분방정식의 해(Homogeneous Solution)와 비제차미분방정식의 특수해(Particular Solution)를 더하여 구할 수 있다.

제차미분방정식의 애플릿이 그림 11에 나와 있다. 제차해를 지수함수로 놓으면 특성방정식을 구할 수 있으며, 특성방정식의 해의 종류를 선택하

Homogenous 2nd order Equation

$$y'' + ay' + by = 0. \quad y = y(x)$$

$y = ce^{\lambda x}$  라 하자       $\because a^2 - 4b > 0$   
 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$        $\because a^2 - 4b = 0$   
 $\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$        $\because a^2 - 4b < 0$

수식보기    문제풀기

---

$a^2 - 4b > 0$  일때 두 실근  $\lambda_1, \lambda_2$   
 $y_1 = c_1 e^{\lambda_1 x}, y_2 = c_2 e^{\lambda_2 x}$  는 미분방정식의 해이다.  
 $\therefore y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

그림 11. 제차미분방정식의 수식

고 수식보기를 클릭하면 그림 11의 아래와 같이 해가 구해지는 것이 설명되어진다. 문제풀기를 클릭하면 그림 12와 같이 난수에 의해 발생된 계수를 가진 미분방정식이 나오게 되며, 답을 입력하면 정답을 체크할 수 있다.

비제차미분방정식의 풀이방법이 그림 13에 나와 있다. 그림에도 설명되어 있듯이 비제차미분방정식의 일반해는 제차미분방정식의 해를 먼저 구하고, 미정계수법에 의하여 특수해를 구하여 이 두 해를 더한 것이다. 제차미분방정식의 해법은 그림 11과 12에서 보여준 애플릿으로 구할수 있고, 그림 13의 애플릿에서는 우변의 함수 종류에 따라 특수해를 구하는 방법을 선택하게 되어있다.

NonHomogenous

$$y'' + ay' + by = r(x). \quad y = y(x)$$

**풀이방법**

- 1) Homo. Eq.  $y'' + ay' + by = 0$ 의 해  $y_h$  를 구한다.
- 2) 특수해  $y_p$  는 미정계수법으로  $y'' + ay' + by = r(x)$ 를 푼다.
- 3) 일반해는  $y_g = y_h + y_p$  가 된다.

**특수해(Particular Solution)를 구하는 방법**

아래 표에 의해 선택할  $y_p$ 의 형태를 결정하고 미지수를 구한다.

$r(x)$ 의 종류	선택할 $y_p$	상세풀이
$kx^n \ (n = 0, 1, \dots)$	$K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + \dots + K_1 x + K_0$	<a href="#">보기</a>
$ke^{px}$	$Ke^{px}$	<a href="#">보기</a>
$k \sin(px)$ 또는 $k \cos(px)$	$K_1 \sin(px) + K_2 \cos(px)$	<a href="#">보기</a>

그림 13. 비제차미분방정식의 해법

Homogenous 2nd order Equation    **단언**    **진**

$$y'' + ay' + by = 0$$

중요합니다

경고: 애플릿 창

$y = ce^{\lambda x}$  라 하자       $\because a^2 - 4b > 0$   
 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$        $\because a^2 - 4b = 0$   
 $\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$        $\because a^2 - 4b < 0$

수식보기    문제풀기

---

$y'' - 15y' + 54y = 0. \quad y = y(x)$  를 푸시오.

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{6x}$$

확인

그림 12. 제차미분방정식의 예제

우변의 함수가 다항식(Polynomial)인 경우 그림 13에서 다항식의 풀이를 클릭하면 그림 14의 윗부분과 같이 상세풀이를 볼 수 있어서 풀이방법을 이해할 수 있다. 예제를 클릭하면 그림 14의 아랫부분과 같이 임의의 문제가 나오게 된다. 사용자가 답을 입력하면 정답인지를 체크할 수 있다.

우변의 함수가 지수함수 또는 sine/cosine 함수인 경우에는 그림 13에서 지수함수 또는 sine/cosine 함수를 선택하여 풀이를 볼 수 있으며 그림 15와 그림 16에 상세한 풀이방법을 볼 수 있다. 예제를 클릭하면 그림 15와 16의 아랫부분처럼 임의의 계수를 가진 예제가 나오게 된다. 사

NonHomogenous

답인

정답입니다

경고: 애플릿 창

$r(x)$ 가 Polynomial인 경우

$y'' + y' + 2y = 4x^2 - 4$  (\*)

$r(x)$ 가 2차식이므로  $y_p = K_2x^2 + K_1x + K_0$  이라한다.

(\*) 식에 대입하면,

$2K_2 + (2K_2x + K_1) + 2(K_2x^2 + K_1x + K_0) = 4x^2 - 4$

좌우변 항을 비교하면

$x^2$ 항 :  $2K_2 = 4$

$x$  항 :  $2K_2 + 2K_1 = 0$

상수항 :  $2K_2 + K_1 + 2K_0 = -4$

따라서,  $K_2 = 2, K_1 = -2, K_0 = -3$

$\therefore y_p = 2x^2 - 2x - 3$

---

$y'' - 3y' + y = 8x^2$ 의 특수해는?

$y_p = \square x^2 + \square x + \square$

그림 14. 비제차미분방정식의 특수해: 다항식

NonHomogenous

답인

정답입니다

경고: 애플릿 창

$r(x)$ 가 sin/cos함수인 경우

$y'' + y' = -30\sin 2x$  (\*)

$r(x)$ 가 sin함수이므로  $y_p = K_1\sin 2x + K_2\cos 2x$  이라 한다.

(\*) 식에 대입하면,

$-4K_1\sin 2x - 4K_2\cos 2x + 2K_1\cos 2x - 2K_2\sin 2x = -30\sin 2x$

좌우변 항을 비교하면

$-4K_1 - 2K_2 = -30$

$-4K_2 + 2K_1 = 0$

따라서,  $K_1 = 6, K_2 = 3$

$\therefore y_p = 6\sin 2x + 3\cos 2x$

---

$y'' - 3y' + 5y = 148\sin(2x)$ 의 특수해는?

$y_p = \square \sin \square x + \square \cos \square x$

그림 16. 비제차미분방정식의 특수해: sine/cosine 함수

NonHomogenous

답인

정답입니다

경고: 애플릿 창

$r(x)$ 가 지수함수인 경우

$y'' + y' + 2y = 5e^{2x}$  (\*)

$r(x)$ 가 지수함수이므로  $y_p = Ke^{2x}$  이라 한다.

(\*) 식에 대입하면,

$4Ke^{2x} + 2Ke^{2x} + 2Ke^{2x} = 5Ke^{2x}$

좌우변 항을 비교하면  $K=1$

$\therefore y_p = e^{2x}$

---

$y'' + 2y' - 3y = -24e^{-3x}$ 의 특수해는?

$y_p = \square e^{\square x}$

그림 15. 비제차미분방정식의 특수해: 지수함수

Equidimensional Different Equation

$x^2y'' + axy' + by = 0, y = y(x)$

$y = cx^m$  이라 하면

$m(m-1) + am + b = 0$   $c > 0 \Rightarrow D > 0$

$m^2 + (a-1)m + b = 0$  (\*)  $c = 0 \Rightarrow D = 0$

$D = (a-1)^2 - 4b$  라 하고,  $c < 0 \Rightarrow D < 0$

(\*)의 해를  $m_1, m_2$  라 하자.

---

$D < 0$

$m_1 = \alpha + i\beta, m_2 = \alpha - i\beta$  라 하면

$\alpha = \frac{1-a}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4b - (a-1)^2}}{2}$

$\therefore y_h = x^\alpha [c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)]$

그림 17. 동차미분방정식의 수식

용자는 빈칸에 답을 입력하여 정답인지를 체크할 수 있다. 동차미분방정식은 아래와 같이  $y$ 의 2계 도함수 앞에  $x^2$ 이,  $y$ 의 1계 도함수 앞에  $x$ 가 곱하여진 형태이며 오일러방정식(Euler Equation)이라고도 부른다. (O'Neil, 1995)

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \quad y = y(x)$$

동차미분방정식은 상계수를 가지는 미분방정식과 동일하게 대수적인 방법으로 해를 구할 수 있다.

즉, 기본 해를  $\{y = cx^m\}$ 로 놓고 특성방정식을 구할 수 있으며, 특성방정식의 해의 종류를 선택하

고 수식보기를 선택하면 그림 17의 아래와 같이 해가 구해지는 것이 설명되어진다. 문제풀기를 선택하여 그림 18과 같이 난수에 의해 발생된 계수를 가진 미분방정식이 나오게 되며, 답을 입력하면 정답을 체크할 수 있다.

비제차미분방정식의 특수해를 미정계수법으로 풀 때, 우변의 함수형태에 따라 특수해가 임의의 계수를 가진 함수로 가정하고 원식에 대입하여 좌우변의 계수를 비교하게 된다. 따라서, 특수해는 분수 형태의 계수를 가지는 것이 일반적이지만 본 애플릿 프로그램은 정수계수를 가진 특수해가 나



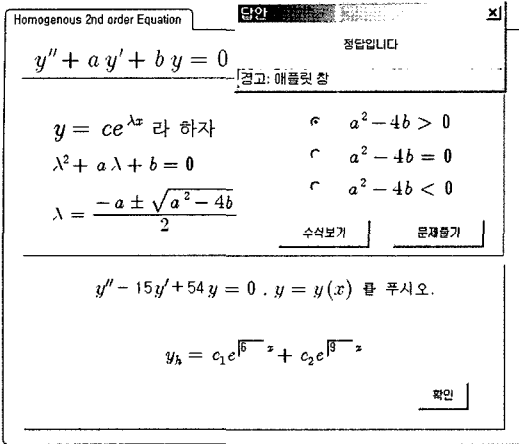


그림 18. 동차미분방정식의 예제

오도록 프로그램 되어 있어서 사용자 입력의 편의를 고려하였다. 또한, 난수에 의해 예제가 생성되어 사용자는 수십 가지의 조합 중 하나의 문제를 풀게 되어 거의 매번 새로운 문제를 풀 수 있다.

#### 4. 결과 및 고찰

현재 개발된 공업수학용 미분방정식 학습 컨텐츠는 강의 부교재로 활용중이다. 빈즈 컴포넌트를 활용한 기술로서 자바 애플릿의 개발시간을 단축하여 양질의 컨텐츠를 적은 인력, 비용, 시간으로 완성할 수 있었으며 개발한 컨텐츠는 음성강좌 모듈을 추가하여 완벽하게 실제 강의를 대체할 수 있도록 구성하였다. 본 개발 결과물은 수학 분야에서 단편적으로만 시도된 수학용 학습 컨텐츠의 효과적 통합적 개발 모델을 제시한 것이다.

본 학습 컨텐츠를 활용하여 얻을 수 있는 효과는 다음과 같다.

1) 학습자의 학습 욕구 증진: 복잡하고 모호한 수학적 개념을 쉽게 확인할 수 있으므로 학습자의 학습 욕구를 증진할 수 있다.

2) 교수자의 강의 시수 경감: 음성강좌를 통하여 보충 학습으로 활용하여 수업에 참석하지 못한 학생들에게도 강의에 접할 수 있는 기회를 제공하

며, 필요한 경우에는 교수자가 학습자에게 수업을 인터넷을 통하여 듣도록 유도하고 면대면 강의에서는 이를 확인 보완함으로써 수업시간을 신축적으로 조절할 수 있다.

3) 수업의 집중력 향상: 학습의 내용을 수업 시간에 활용하여 생성된 새로운 문제를 직접 풀게 함으로서 학습자의 상호 작용 기능을 활성화 하는 효과를 볼 수 있다.

4) 수업의 내실화: 인터넷 기반의 학습 자료를 활용함으로써 수업 내용을 내실화 하고 강의 자료를 최대한으로 활용할 수 있다.(허원과 장진훈, 2001)

#### 5. 결론 및 향후 개발 방향

자바 애플릿을 이용하여 웹 기반의 미분방정식 학습용 컨텐츠를 개발하였다. 개발된 컨텐츠는 높은 상호작용 기능을 가지고 있어서, 학습자의 흥미를 유발시킨다. 수치를 변화시키면서 풀이 절차를 반복적으로 확인할 수 있으며, 해곡선의 도시와 인터넷 테스트 등의 보조수단을 사용하여 복잡한 수학적 개념을 쉽게 이해할 수 있는 장점이 있다.

수학의 다양한 특성상 미분방정식 이외의 다른 분야에 대해서는 새로운 접근 방법과 아이디어가 필요하다. 미분방정식에 관련된 인터넷 학습 컨텐츠를 시작으로 하여, 선형대수, 복소수, 푸리에, 라플라스와 같은 다양한 주제에 대한 학습 컨텐츠를 개발할 계획이다. 또한 개발된 결과물은 교육용 컨텐츠 개발표준인 SCORM 규약에 맞추어 다른 LMS(Learning Management System)에서도 학습자 정보를 저장하여 학습자 정보 트래킹이 가능하도록 할 계획이다. 이렇게 되면, 학습자의 컨텐츠 단위별 학습 시간 및 반복 횟수 등의 관리가 가능해질 것이다.

[참고 문헌]

- [1] 김영민, 허원, 기장근 (1998), “JAVA를 이용한 마이크로 프로세서 시뮬레이터 개발에 관한 연구”, 대한 전기학회 추계 학술대회, 634-640.
- [2] 김용운, 김용국 (1997), 수학사의 이해, 우성출판사, 199-209.
- [3] 이충기 (2002), “웹 기반의 자바 프로그래밍 강의 교안 개발”, 공학교육연구, 5(1), 4-18.
- [4] 허원 (2001), “Java Beans 기술을 이용한 효과적 공학 교육용 Applet 개발에 관한 연구”, 공학교육연구, 4(2), 27-33.
- [5] 허원 (2000), “웹 기반의 자동 문제 출제 및 평가 시스템의 개발 및 활용 - 완전학습기의 개발과 활용”, 공학교육연구, 3(2), 24-30.
- [6] 허원, 기장근 (2000), “인터넷과 공학교육”, 2000 전기학회 하계 학술대회, 공학교육 특별세션.
- [7] 허원, 장진훈 (2001), “Development and Management of Hybrid Course Delivery Model for Engineering Education”, AEESEAP Midterm Conference 2001 AEESEAP, 236-243.
- [8] Ki, J. K. and Ho, W. (1999), “Development of an Online Interactive Virtual Lab for Digital Logic Circuit (DVLAB)”, Telelearning '99 at Montreal, Demo. Booth No. 1.
- [9] O'Neil, P. P. (1995); *Advanced Engineering Mathematics*, PWS Publishing: Boston, U.S.A., 83.
- [10] <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Java/index.html>
- [11] <http://www.ies.co.jp/math/indexeng.html>