Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 30, No. 4, pp. 317-327, December 2004.

혼류 생산시스템의 주기적 생산순서

최원준† · 김연민 · 박창권 · 이용일

울산대학교 공과대학 산업정보경영공학부

Cyclic Sequencing in Mixed-Model Production Systems

Wonjoon Choi · Yearnmin Kim · Changkwon Park · Yongil Lee

Department of Industrial Engineering, University of Ulsan, Ulsan, 680-749

In mixed-model production systems, various models of products are produced alternately on the same production line. When the total number of models or the total production quantity is large, it takes a long time to determine the production sequence of the products. In this paper, we will show that in case of product rate variation problem (PRV) problem with nonidentical symmetric convex discrepancy function, an optimum sequence can be obtained by repeating an optimum sequence in a reduced subproblem.

Keywords: cyclic sequencing, mixed-model production, product rate variation

1. 서 론

혼류 생산시스템에서는 생산시스템의 유연성 제고와 재고감축을 위하여 동일 생산라인 상에서 여러 종류의 제품들을 번갈아 가며 생산하고 있다. 이 경우 제품생산량 또는 부품소요량의 변동을 줄이기 위하여 평준화된 생산순서를 작성하는 것이 중요한 연구과제이다.

Kubiak(1993)은 생산의 평준화 문제를 PRV(Product Rate Variation) 문제와 ORV(Output Rate Variation) 문제로 구분하였다. PRV 문제는 제품생산량의 변동을 최소화하는 문제이며, ORV 문제는 부품소요량의 변동을 최소화하는 문제를 말한다.

PRV 문제는 Miltenburg(1989)에 의하여 제시되었다. Miltenburg (1989)는 PRV 문제를 비선형 정수계획법 문제로 정형화하고 발견적 해법을 제안하였다. 그 이후에 Miltenburg *et al.*(1990)은 동적 계획법 기반의 최적해를 구하는 해법을 제시하였으며, Sumichrast and Russell(1990)는 여러 발견적 해법들의 성능을 수치실험을 통하여 비교하였다. 한편 ORV 문제는 도요타 자동차회사에서 사용한 목표추적법(Goal Chasing Method)을 Monden (1983)이 정형화하여 최초로 소개하였다. Miltenburg and Sinnamon(1989), Miltenburg and Goldstein(1991)과 Steiner and Yeomans(1996)은 다단계 조립시스템의 ORV 문제를 다루었다. Bautista *et al.*(1996)과 Duplaga and Bragg(1998)은 ORV 문제의 여러 기법들을 수치실험을 통하여 비교하였다. Jin and Wu(2002)는 Monden의 모델을 기회비용의 개념을 이용하여 개선된 발견적 해법을 제시하였다. Hyun *et al.*(1998)과 Ponnambalam *et al.*(2003)은 ORV 문제를 다목적 문제로 정형화하여 유전자 알고리듬을 적용하였다. 또한 Aigbedo (2004)는 배치로 부품이 공급되는 JIT 공급사슬에서의 ORV 문제를 정의하고 발견적 기법을 제시하였다.

일반적으로 생산대상 모델의 수가 많거나 총 생산수량이 많은 경우에는 최적의 평준화 생산순서를 결정하는 데에 많은 시간이 소요된다. 최적생산순서를 구하는 데에 소요되는 시간을 단축하기 위하여 많은 연구가 진행되어 왔는데, 주기적 생산순서(cyclic sequence) 방식도 그 중 하나이다. 주기적 생산순서라는 것은 생산대상 모델의 생산량이 양의 정수m으로 나누어진다면 각 모델의 생산량의 $1/m$로 구성된 작은 문제에 대하여 최적 생산순서를 결정한 후, 이를 m회 반복하여 얻어지는 생산순서를 말한다. 예를 들어 3가지 제품 A, B, C의 생산계획량이 각각 2개, 2개, 4개인 경우 A, B, C 생산량의 최대

† 연락저자 : 최원준 교수, 680-749 울산시 남구 무거동 산 29 울산대학교 공과대학 산업정보경영공학부, Fax : 052-259-2179, E-mail : choiwj @mail.ulsan.ac.kr
2004년 2월 접수; 2004년 9월 수정본 접수; 2004년 9월 게재 확정.

공약수가 2가 되고 주기적 순서로 $\{A, B, C, C\}$의 4개로 구성된 생산량에 대하여 최적순서를 구하고 이 순서를 2번 반복하는 것을 말한다.

"과연 주기적 생산순서는 원문제에 대하여 최적의 생산순서인가?"하는 문제는 Miltenburg(1989)에 의하여 제기되었고, Kubiak(1993)은 이를 미해결문제(open question)라고 분류하였다. 그 후에 Steiner and Yeomans(1996)은 PRV 문제의 min-max 형 목적함수에 대하여 주기적 생산순서의 최적성을 보였고, 최근에 Bautista *et al.*(2000)은 PRV 문제의 특수 경우에 대하여 주기적 생산순서의 최적성을 보였다. 본 논문에서는 지금까지 연구를 확장하여 보다 일반적인 PRV 문제에 대하여 주기적 생산순서가 최적임을 증명하여 보도록 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 1장에서 연구의 배경과 의의에 대하여 서술하고, 2장에서 본 논문에서 다루는 문제를 수리적으로 정형화한다. 3장에서 이 정형화된 문제에 대하여 주기적 생산순서의 최적성을 증명하며, 4장에서는 추후 연구과제에 대하여 제시한다.

2. 문제의 정의

기호를 다음과 같이 정의한다.

n: 제품의 종류

d_i: 제품 i의 생산량, $i = 1, 2, \cdots, n$

$D_T = \sum_{i=1}^{n} d_i$ 총 생산량

$r_i = \dfrac{d_i}{D_T}$, $i = 1, 2, \cdots, n$

$x_{i,k}$: 제품 i의 $1, 2, \cdots, k$기까지의 누적생산량

$\alpha_{i,k} = x_{i,k} - r_i \cdot k$ 제품 i의 k기에서의 목표생산량과의 편차

$F_i(\alpha_{i,k})$: 제품 i의 k기에서의 편차로 인한 손실발생량

<u>가정</u>:

F_i은 비음의 볼록함수(convex function)이고

$F_i(0) = 0$이다.

F_i의 전형적인 예는 $F_i(\bullet) = w_i(\bullet)^2$

또는 $F_i(\bullet) = w_i|\bullet|$ 등이 있다.

그러면 본 논문에서는 다음과 같은 생산순서 결정문제(PRV)를 대상으로 한다.

"모든 $i = 1, 2, \cdots, n$, $k = 1, 2, \cdots, D_T$에 대해 $\sum_{k=1}^{D_T} \sum_{i=1}^{n} F_i(\alpha_{i,k})$를 최소화하는 $x_{i,k}$을 구한다."

여기에서, $x_{i,k}$는 정의에 의하여 다음을 만족하여야 한다.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,k} = k,\ \ k = 1, 2, \cdots, D_T$$

$$0 \le x_{i,k} - x_{i,k-1} \le 1,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$k = 1, 2, \cdots, D_T$$

$$x_{i,k}\text{는 비음의 정수},\ i = 1, 2, \cdots, n,\ k = 1, 2, \cdots, D_T$$

Bautista *et al.*(2000)는 모든 F_i가 동일한 모양 (F)의 강볼록 함수(strictly convex function)인 경우에 주기적 생산순서로 최적 생산순서를 구할 수 있음을 보였다. Steiner and Yeomans (1996)은 PRV 문제의 min-max형 목적함수인 min $\max_{i,k}\{|\alpha_{i,k}|\}$에 대하여 주기적 생산순서의 최적성을 보였는데, Bautista *et al.*은 그들의 모델이 Steiner and Yeomans의 모델을 확장한 것임을 보였다. 본 논문에서는 Bautista *et al.*보다도 더 일반적인 경우, 다시 말해, F_i가 상이한 모양인 경우에 주기적 생산순서로 최적 생산순서를 구할 수 있음을 보이도록 하겠다. 제품 간의 판매금액 또는 주요자원의 사용량 등에 차이가 나는 경우 F_i를 모두 동일한 모양으로 가정하는 것보다는 가중치에 차등을 주어 제품 간에 상이한 모양의 F_i를 인정하는 것이 더 현실적일 수 있다(Monden, 1983). 그런데 Bautista *et al.*(2000)의 증명은 모든 F_i가 동일하지 않은 경우에는 성립되지 않아, 본 논문에서 다루고자 하는 문제에는 새로운 접근법이 필요하다.

3. 주기적 생산순서의 최적성

본 장에서는 F_i가 상이한 모양인 경우에 주기적 생산순서로 최적 생산순서를 구할 수 있음을 보이도록 하겠다. Kubiak and Sethi(1991)는 다음과 같이 제품의 생산순서 결정문제가 할당문제(assignment problem)로 변환될 수 있음을 보였다.

$Z_{i,j}$를 제품 i의 j번째 단위(copy)의 이상적인 생산시점이라고 하면 $Z_{i,j} = \lceil R_{i,j} \rceil$이다. 이 때에 $R_{i,j}$는 다음 등식을 만족시키는 유일해를 말한다. 여기에서 $\lceil y \rceil$는 y보다 크지 않은 최대의 정수를 의미한다.

$$F_i(j - R_{i,j} \cdot r_i) = F_i(j - 1 - R_{i,j} \cdot r_i).$$

$C_{i,j,k}$를 제품 i의 j번째 단위를 k기에 생산할 때의 비용이라고 하면 $C_{i,j,k}$은 다음과 같이 구한다.

$$C_{i,j,k}=\begin{cases}\sum_{l=k}^{Z_{i,j}-1}\Psi_{i,j,l} & \text{if } k<Z_{i,j}\\ 0 & \text{if } k=Z_{i,j}\\ \sum_{l=Z_{i,j}}^{k-1}\Psi_{i,j,l} & \text{if } k>Z_{i,j}\end{cases}$$

여기에서

$\Psi_{i,j,l}=|F_i(j-lr_i)-F_i(j-1-lr_i)|$.

$x_{i,j,k}$를 다음과 같이 정의하자.

$$x_{i,j,k}=\begin{cases}1 & \text{제품 } i\text{의 } j\text{번째 단위를 } k\text{기에 생산하면}\\ 0 & \text{아니면}\end{cases}$$

그러면 제품의 생산순서 결정문제와 동등한 할당문제는 다음과 같다(Kubiak and Sethi(1991)).

$$\left.\begin{array}{r}Minimize \sum_{k=1}^{D_T}\sum_{(i,j)}C_{i,j,k}x_{i,j,k}\\ s.t.\\ \sum_{(i,j)}x_{i,j,k}=1,\ k=1,2,\ldots,D_T\\ \sum_{k=1}^{D_T}x_{i,j,k}=1,\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots d_i\\ x_{i,j,k}=0,1\end{array}\right]\Rightarrow(\text{문제 P})$$

앞으로 이 문제를 (문제 P)라고 표기하도록 하자.

그러면 이후 F_i가 대칭인 경우에 주기적 순서에 최적해가 존재한다는 것을 보이도록 하겠다. (그러나 F_i가 비대칭인 경우에는 주기적 순서 중에 최적해가 전혀 존재하지 않을 수도 있음을 반증례를 통하여 보이도록 하겠다.)

<u>가정</u>:

F_i은 비음의 대칭형(symmetric) 볼록함수이고 $F_i(0)=0$이다.

본 연구에서는 F_i가 위와 같은 가정을 따를 때에 ($C_{i,j,k}$)가 특별한 성질이 있음을 살펴보고 이러한 성질들을 이용하여 주기적 순서의 최적성을 보이도록 할 것이다.

Kubiak and Sethi(1991)는 $R_{i,j}$과 $Z_{i,j}$의 값이 다음과 같음을 보였다.

<u>성질 1</u>:

$$R_{i,j}=\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r_i},\ Z_{i,j}=\left\lceil\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r_i}\right\rceil.$$

그러면 우선 Ψ의 성질에 대하여 알아보자.

<u>성질 2</u>:

i,j가 고정되어 있을 때에

$$k<Z_{i,j}\text{인 경우 } \Psi_{i,j,k-1}\geq\Psi_{i,j,k}$$

$$k\geq Z_{i,j}\text{인 경우 } \Psi_{i,j,k}\leq\Psi_{i,j,k+1}.$$

증명)

정의에 의하여.

$$\Psi_{i,j,k}=|F_i(j-kr_i)-F_i(j-1-kr_i)|.$$

우선 $k\geq Z_{i,j}$인 경우를 살펴보자. 이 경우

$$\Psi_{i,j,k}=F_i(j-1-kr_i)-F_i(j-kr_i)\text{이다.}$$

그러면

$\Psi_{i,j,k+1}-\Psi_{i,j,k}$
$=F_i(j-1-(k+1)r_i)-F_i(j-(k+1)r_i)$
$\quad -F_i(j-1-kr_i)+F_i(j-kr_i)$

그런데 F_i가 볼록함수라는 가정에 의하여

$(1-r_i)\cdot F_i(j-1-(k+1)r_i)$
$+r_i\cdot F_i(j-(k+1)r_i)\geq F_i((1-r_i)(j-1-(k+1)r_i)$
$+r_i(j-(k+1)r_i))$
$=F_i(j-1-(k+1)r_i).$

따라서

$F_i(j-1-(k+1)r_i)-F_i(j-(k+1)r_i)$
$\geq\dfrac{F_i(j-1-kr_i)-F_i(j-(k+1)r_i)}{1-r_i}$ 이 성립한다.

마찬가지로

$\dfrac{F_i(j-1-kr_i)-F_i(j-(k+1)r_i)}{1-r_i}$
$\geq F_i(j-1-kr_i)-F_i(j-kr_i)$

임을 보일 수 있다.

따라서

$F_i(j-1-(k+1)r_i)-F_i(j-(k+1)r_i)$
$-F_i(j-1-kr_i)+F_i(j-kr_i)\geq 0.$

결국 $\Psi_{i,j,k+1} - \Psi_{i,j,k} \geq 0$이다.

$K < Z_{i,j}$인 경우도 마찬가지로 증명할 수 있다.

성질 2는 이상적 투입시점을 벗어나서 투입될수록 손실이 큼을 의미한다.

성질 3:

i, j가 고정되어 있을 때에 모든 $l = 0, 1, \cdots$에 대하여

$\Psi_{i,j,Z_{i,j}-l-2} \geq \Psi_{i,j,Z_{i,j}+l}$.

증명)

$j-1-\{Z_{i,j}-l-2\}r_i < j-\{Z_{i,j}-l-2\}r_i$

$< 0 < j-1-\{Z_{i,j}+l\}r_i < j-\{Z_{i,j}+l\}r_i$

F_i가 $F_i(0)=0$인 비음의 볼록함수임과 Ψ의 정의에 의하여,

$$\Psi_{i,j,Z_{i,j}-l-2} = F_i(j-\{Z_{i,j}-l-2\}r_i)$$

$$-F_i(j-1-\{Z_{i,j}-l-2\}r_i),$$

$$\Psi_{i,j,Z_{i,j}+l} = -F_i(j-\{Z_{i,j}+l\}r_i)$$

$$+F_i(j-1-\{Z_{i,j}+l\}r_i).$$

그런데

$+\{j-\{Z_{i,j}-l-2\}r_i\}+\{j-1-\{Z_{i,j}+l\}r_i\}$

$=2j-1-2\,(Z_{i,j}-1)r_i$

$=2\left\{\left(j-\frac{1}{2}\right)-(Z_{i,j}-1)r_i\right\}>0$이므로

$-\{j-\{Z_{i,j}-l-2\}r_i\} < j-1-\{Z_{i,j}+l\}r_i$이다.

F_i가 $F_i(0)=0$인 비음의 대칭형 볼록함수이므로, 결국 모든 $l=0, 1, \cdots$에 대하여

$\Psi_{i,j,Z_{i,j}-l-2} \geq \Psi_{i,j,Z_{i,j}+l}$.

성질 4:

i, j가 고정되어 있을 때에 $(C_{i,j,k})$는

$$C_{i,j,k-1} \geq C_{i,j,k} \text{ if } k < Z_{i,j},$$
$$C_{i,j,k} \leq C_{i,j,k+1} \text{ if } k \geq Z_{i,j}.$$

증명)

$(C_{i,j,k})$의 정의로부터 다음을 알 수 있다.

$$C_{i,j,k} = \begin{cases} C_{i,j,k+1} + \Psi_{i,j,k} & \text{if } k < Z_{i,j} \\ 0 & \text{if } k = Z_{i,j} \\ C_{i,j,k-1} + \Psi_{i,j,k-1} & \text{if } k > Z_{i,j} \end{cases}$$

따라서

$C_{i,j,k} - C_{i,j,k+1} = \Psi_{i,j,k}$ if $k < Z_{i,j}$,

$C_{i,j,k} = 0$ if $k = Z_{i,j}$,

$C_{i,j,k} - C_{i,j,k-1} = \Psi_{i,j,k-1}$ if $k > Z_{i,j}$.

그런데 성질 2에 의하여

$$\Psi_{i,j,k-1} \geq \Psi_{i,j,k} \text{ if } k < Z_{i,j},$$

$$\Psi_{i,j,k} \leq \Psi_{i,j,k+1} \text{ if } k \geq Z_{i,j}.$$

따라서

$$C_{i,j,k-1} \geq C_{i,j,k} \text{ if } k < Z_{i,j},$$
$$C_{i,j,k} \leq C_{i,j,k+1} \text{ if } k \geq Z_{i,j}.$$

성질 4는 이상적 투입시점을 벗어나서 투입될수록 할당비용이 더 커짐을 의미한다.

성질 5:

i, j가 고정되어 있을 때에 모든 $q = 1, 2, \cdots$와 $k = 1, 2, \cdots$에 대하여,

$$C_{i,j,Z_{i,j}-q-k} \geq C_{i,j,Z_{i,j}+q},$$
$$C_{i,j,Z_{i,j}-q} \leq C_{i,j,Z_{i,j}+q+k}.$$

증명)

정의에 의하여

$C_{i,j,Z_{i,j}-q-k} = \sum_{l=1}^{q+k} \Psi_{i,j,Z_{i,j}-l}$,

$C_{i,j,Z_{i,j}+q} = \sum_{l=0}^{q-1} \Psi_{i,j,Z_{i,j}+1}$.

그런데

$$C_{i,j,Z_{i,j}-q-k} = \sum_{l=1}^{q+k} \Psi_{i,j,Z_{i,j}-l} \geq \sum_{l=1}^{q+1} \Psi_{i,j,Z_{i,j}-l}$$
$$\geq \sum_{l=0}^{q-1} \Psi_{i,j,Z_{i,j}-l-2} \geq \sum_{l=0}^{q-1} \Psi_{i,j,Z_{i,j}+l}$$
$$= C_{i,j,Z_{i,j}+q}.$$

앞에서 첫 번째 부등식은 $\Psi_{i,j,Z_{i,j}-l} \geq 0$이라는 성질에 의하여, 두 번째 부등식은 성질 2에 의하여, 세 번째 부등식은 성질 2와 3에 의하여 성립한다.

나머지 경우도 마찬가지로 증명할 수 있다.

우선 모든 d_i, i=1, 2,⋯, n가 짝수인 경우를 생각하여 보자. 이를 위하여 먼저 제품 i와 관련된 $C_{i,j,k}$의 속성에 살펴보도록

한다. 고정된 i에 대하여, 행렬 $(C_{i,j,k})$의 영역을 <Figure1>과 같이 4부분으로 나눌 수 있다.

$$I_i = \left\{ (j,k) \middle| 1 \le j \le \frac{d_i}{2},\ 1 \le k \le \frac{D_T}{2} \right\}$$

$$II_i = \left\{ (j,k) \middle| 1 \le j \le \frac{d_i}{2},\ \frac{D_T}{2} < k \le D_T \right\}$$

$$III_i = \left\{ (j,k) \middle| \frac{d_i}{2} < j \le d_i,\ 1 \le k \le \frac{D_T}{2} \right\}$$

$$IV_i = \left\{ (j,k) \middle| \frac{d_i}{2} < j \le d_i,\ \frac{D_T}{2} < k \le D_T \right\}$$

기 / 단위	1	2			DT/2	DT/2 +1	DT/2 +2			DT
1										
2			I_i					II_i		
$d_i/2$										
$d_i/2+1$										
$d_i/2+2$			III_i					IV_i		
d_i										

Figure 1. Assignment cost matrix of product i (제품 i의 할당비용 행렬).

예를 들어 설명해 보자. 세 종류의 제품 A, B, C의 생산량이 다음과 같다.

$d_A = 4,\ d_B = 8,\ d_C = 8.$

즉, $D_T = d_A + d_B + d_C = 20.$

그리고

$F_A(y) = \frac{1}{2}y^2,\ F_B(y) = y^2,\ F_C(y) = y^2$라고 하자.

그러면

	A1	A2	A3	A4
$R_{i,j}$	2.5	7.5	12.5	17.5
$Z_{i,j}$	3	8	13	18

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8
$R_{i,j}$	1.25	3.75	6.25	8.75	11.25	13.75	16.25	18.75
$Z_{i,j}$	2	4	7	9	12	14	17	19

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
$R_{i,j}$	1.25	3.75	6.25	8.75	11.25	13.75	16.25	18.75
$Z_{i,j}$	2	4	7	9	12	14	17	19

<Figure 2>와 <Figure 3>에 이 경우의 $(\Psi_{i,j,k})$와 $(C_{i,j,k})$를 각각 구하여 나타내었다.

<Figure 3>의 예에서 보면 $i = A$의 경우 $j = 4$인 행은 $j = 1$인 행을 반대로 늘어놓은 것과 동일하다. 일반적으로 행렬 $(C_{i,j,k})$에는 다음과 같은 대칭성이 있다.

		k																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	i=A																				
	1	0.3	0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	6.4	8.1	10	12.1	14.4	16.9	19.6	22.5	25.6	28.9
j	2	1.3	1.1	0.9	0.7	0.5	0.3	0.1	0.1	0.3	0.5	0.9	1.6	2.5	3.6	4.9	6.4	8.1	10	12.1	14.4
	3	2.3	2.1	1.9	1.7	1.5	1.3	1.1	0.9	0.7	0.5	0.4	0.1	0	0.1	0.4	0.9	1.6	2.5	3.6	4.9
	4	3.3	3.1	2.9	2.7	2.5	2.3	2.1	1.9	1.7	1.5	4.9	3.6	2.5	1.6	0.9	0.4	0.1	0	0.1	0.4
	i=B																				
	1	0.2	0.6	1.4	2.2	3	3.8	4.6	5.4	6.2	7	7.8	8.6	9.4	10.2	11	11.8	12.6	13.4	14.2	15
	2	2.2	1.4	0.6	0.2	1	1.8	2.6	3.4	4.2	5	5.8	6.6	7.4	8.2	9	9.8	10.6	11.4	12.2	13
	3	4.2	3.4	2.6	1.8	1	0.2	0.6	1.4	2.2	3	3.8	4.6	5.4	6.2	7	7.8	8.6	9.4	10.2	11
j	4	6.2	5.4	4.6	3.8	3	2.2	1.4	0.6	0.2	1	1.8	2.6	3.4	4.2	5	5.8	6.6	7.4	8.2	9
	5	8.2	7.4	6.6	5.8	5	4.2	3.4	2.6	1.8	1	0.2	0.6	1.4	2.2	3	3.8	4.6	5.4	6.2	7
	6	10.2	9.4	8.6	7.8	7	6.2	5.4	4.6	3.8	3	2.2	1.4	0.6	0.2	1	1.8	2.6	3.4	4.2	5
	7	12.2	11.4	10.6	9.8	9	8.2	7.4	6.6	5.8	5	4.2	3.4	2.6	1.8	1	0.2	0.6	1.4	2.2	3
	8	14.2	13.4	12.6	11.8	11	10.2	9.4	8.6	7.8	7	6.2	5.4	4.6	3.8	3	2.2	1.4	0.6	0.2	1
	i=C																				
	1	0.2	0.6	1.4	2.2	3	3.8	4.6	5.4	6.2	7	7.8	8.6	9.4	10.2	11	11.8	12.6	13.4	14.2	15
	2	2.2	1.4	0.6	0.2	1	1.8	2.6	3.4	4.2	5	5.8	6.6	7.4	8.2	9	9.8	10.6	11.4	12.2	13
	3	4.2	3.4	2.6	1.8	1	0.2	0.6	1.4	2.2	3	3.8	4.6	5.4	6.2	7	7.8	8.6	9.4	10.2	11
j	4	6.2	5.4	4.6	3.8	3	2.2	1.4	0.6	0.2	1	1.8	2.6	3.4	4.2	5	5.8	6.6	7.4	8.2	9
	5	8.2	7.4	6.6	5.8	5	4.2	3.4	2.6	1.8	1	0.2	0.6	1.4	2.2	3	3.8	4.6	5.4	6.2	7
	6	10.2	9.4	8.6	7.8	7	6.2	5.4	4.6	3.8	3	2.2	1.4	0.6	0.2	1	1.8	2.6	3.4	4.2	5
	7	12.2	11.4	10.6	9.8	9	8.2	7.4	6.6	5.8	5	4.2	3.4	2.6	1.8	1	0.2	0.6	1.4	2.2	3
	8	14.2	13.4	12.6	11.8	11	10.2	9.4	8.6	7.8	7	6.2	5.4	4.6	3.8	3	2.2	1.4	0.6	0.2	1

Figure 2. An example of cost matrix $(\Psi_{i,j,k})$ (비용 행렬 $(\Psi_{i,j,k})$의 예)

		k																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
j	i=A																				
	1	0.4	0.1	0	0.1	0.4	0.9	1.6	2.5	3.6	4.9	6.4	8.1	10	12.1	14.4	16.9	19.6	22.5	25.6	28.9
	2	4.9	3.6	2.5	1.6	0.9	0.4	0.1	0	0.1	0.4	0.9	1.6	2.5	3.6	4.9	6.4	8.1	10	12.1	14.4
	3	14.4	12.1	10	8.1	6.4	4.9	3.6	2.5	1.6	0.9	0.4	0.1	0	0.1	0.4	0.9	1.6	2.5	3.6	4.9
	4	28.9	25.6	22.5	19.6	16.9	14.4	12.1	10	8.1	6.4	4.9	3.6	2.5	1.6	0.9	0.4	0.1	0	0.1	0.4
j	i=B																				
	1	0.2	0	0.6	2	4.2	7.2	11	15.6	21	27.2	34.2	42	50.6	60	70.2	81.2	93	105.6	119	133.2
	2	4.2	2	0.6	0	0.2	1.2	3	5.6	9	13.2	18.2	24	30.6	38	46.2	55.2	65	75.6	87	99.2
	3	13.2	9	5.6	3	1.2	0.2	0	0.6	2	4.2	7.2	11	15.6	21	27.2	34.2	42	50.6	60	70.2
	4	27.2	21	15.6	11	7.2	4.2	2	0.6	0	0.2	1.2	3	5.6	9	13.2	18.2	24	30.6	38	46.2
	5	46.2	38	30.6	24	18.2	13.2	9	5.6	3	1.2	0.2	0	0.6	2	4.2	7.2	11	15.6	21	27.2
	6	70.2	60	50.6	42	34.2	27.2	21	15.6	11	7.2	4.2	2	0.6	0	0.2	1.2	3	5.6	9	13.2
	7	99.2	87	75.6	65	55.2	46.2	38	30.6	24	18.2	13.2	9	5.6	3	1.2	0.2	0	0.6	2	4.2
	8	133.2	119	105.6	93	81.2	70.2	60	50.6	42	34.2	27.2	21	15.6	11	7.2	4.2	2	0.6	0	0.2
j	i=C																				
	1	0.2	0	0.6	2	4.2	7.2	11	15.6	21	27.2	34.2	42	50.6	60	70.2	81.2	93	105.6	119	133.2
	2	4.2	2	0.6	0	0.2	1.2	3	5.6	9	13.2	18.2	24	30.6	38	46.2	55.2	65	75.6	87	99.2
	3	13.2	9	5.6	3	1.2	0.2	0	0.6	2	4.2	7.2	11	15.6	21	27.2	34.2	42	50.6	60	70.2
	4	27.2	21	15.6	11	7.2	4.2	2	0.6	0	0.2	1.2	3	5.6	9	13.2	18.2	24	30.6	38	46.2
	5	46.2	38	30.6	24	18.2	13.2	9	5.6	3	1.2	0.2	0	0.6	2	4.2	7.2	11	15.6	21	27.2
	6	70.2	60	50.6	42	34.2	27.2	21	15.6	11	7.2	4.2	2	0.6	0	0.2	1.2	3	5.6	9	13.2
	7	99.2	87	75.6	65	55.2	46.2	38	30.6	24	18.2	13.2	9	5.6	3	1.2	0.2	0	0.6	2	4.2
	8	133.2	119	105.6	93	81.2	70.2	60	50.6	42	34.2	27.2	21	15.6	11	7.2	4.2	2	0.6	0	0.2

Figure 3. An example of assignment cost matrix ($C_{i,j,k}$) (할당비용 행렬 ($C_{i,j,k}$)의 예).

<u>**성질 6**:</u>

모든

$i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,d_i$, $k=1,2,\ldots,D_T$ 에 대하여 $C_{i,j,k}=C_{i,d_i+1-j,\,D_T+1-k}$.

증명)

$$C_{i,j,k}=\begin{cases}\sum_{l=k}^{Z_{i,j}-1}\Psi_{i,j,l} & \text{if } k<Z_{i,j}\\ 0 & \text{if } k=Z_{ij}\\ \sum_{l=Z_{i,j}}^{k-1}\Psi_{i,j,l} & \text{if } k>Z_{i,j}\end{cases}$$

정의에 의하여

그런데

$$Z_{i,d_i+1-j}=\left\lceil \left(d_i+1-j-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r_i}\right\rceil$$

$$=\left\lceil D_T-\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r_i}\right\rceil=D_T+\left\lceil -\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r_i}\right\rceil$$

$$=\begin{cases}D_T+1-\left\lceil\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r_i}\right\rceil=D_T+1-Z_{i,j}, & \left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r_i}\text{가 정수가 아닌 경우},\\ D_T-\left\lceil\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r_i}\right\rceil=D_T-Z_{i,j}, & \left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r_i}\text{가 정수인 경우}.\end{cases}$$

우선 $k<Z_{i,j}$인 경우에 대하여 살펴보자. 이 경우, 정의에 의하여 $C_{i,j,k}=\sum_{l=k}^{Z_{i,j}-1}\Psi_{i,j,l}$이다.

그런데 $k<Z_{i,j}$이면 $D_T+1-k>Z_{i,d_i+1-j}$이다. 따라서 정의에 의하여

$$C_{i,d_i+1-j,D_T+1-k}=\sum_{l=Z_{i,d_i+1-j}}^{D_T-k}\Psi_{i,d_i+1-j,l}$$

$$=\sum_{p=0}^{D_T-k-Z_{i,d_i+1-j}}\Psi_{i,d_i+1-j,Z_{i,d_i+1-j}+p}\text{이다.}$$

1) $\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r_i}$가 정수가 아닌 경우를 보자.

이 경우, $Z_{i,d_i+1-j}=D_T+1-Z_{i,j}$이다.

그런데

$$\Psi_{i,d_i+1-j,Z_{i,d_i+1-j}+p}=\Psi_{i,d_i+1-j,D_T+1-Z_{i,j}+p}$$

$$=|F_i(d_i+1-j-\{D_T+1-Z_{i,j}+p\}r_i)$$
$$-F_i(d_i-j-\{D_T+1-Z_{i,j}+p\}r_i)|$$
$$=|F_i(1-j-\{+1-Z_{i,j}+p\}r_i)$$
$$-F_i(-j-\{+1-Z_{i,j}+p\}r_i)|$$
$$=|F_i(j-\{Z_{i,j}-1-p\}r_i)$$

$$- F_i(j-1-\{Z_{i,j}-1-p\}r_i)|$$
$$= \Psi_{i,j,Z_{i,j}-1-p}.$$

결국

$$\begin{aligned} C_{i,d_i+1-j,D_T+1-k} &= \sum_{p=0}^{D_T-k-Z_{i,d_i+1-j}} \Psi_{i,d_i+1-j,Z_{i,d_i+1-j}+p} \\ &= \sum_{p=0}^{D_T-k-Z_{i,di+1-j}} \Psi_{i,j,Z_{i,j}-1-p} \\ &= \sum_{q=k}^{Z_{i,j}-1} \Psi_{i,j,q} \\ &= C_{i,j,k} \end{aligned}$$

2) $\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r_i}$가 정수인 경우를 보자.

이 $Z_{i,d_i+1-j}=D_T-Z_{i,j}$ 경우이다. 또한 이 경우에는 Ψ와 F의 정의로부터 $\Psi_{i,j,Z_{i,j}}=0$임을 알 수 있다.

그리고

$$\Psi_{i,d_i+1-j,Z_{i,d_i+1-j}+p} = \Psi_{i,d_i+1-j,D_T-Z_{i,j}+p}$$

$$\begin{aligned} &= |F_i(d_i+1-j-\{D_T-Z_{i,j}+p\}r_i) \\ &\quad - F_i(d_i-j-\{D_T-Z_{i,j}+p\}r_i)| \\ &= |F_i(1-j-\{-Z_{i,j}+p\}r_i) \\ &\quad - F_i(-j-\{-Z_{i,j}+p\}r_i)| \\ &= |F_i(j-\{Z_{i,j}-p\}r_i) - F_i(j-1-\{Z_{i,j}-p\}r_i)| \\ &= \Psi_{i,j,Z_{i,j}-p}. \end{aligned}$$

결국

$$\begin{aligned} C_{i,d_i+1-j,D_T+1-k} &= \sum_{p=0}^{D_T-k-Z_{i,d_i+1-j}} \Psi_{i,d_i+1-j,Z_{i,d_i+1-j}+p} \\ &= \sum_{p=0}^{D_T-k-Z_{i,d_i+1-j}} \Psi_{i,j,Z_{i,j}-p} \\ &= \sum_{q=k}^{Z_{i,j}} \Psi_{i,j,q} \\ &= C_{i,j,k}. \end{aligned}$$

$k=Z_{i,j}$인 경우와 $k>Z_{i,j}$인 경우도 유사한 방식으로 증명할 수 있다.

또한 성질 6으로부터 다음 대칭성의 성질은 자명함을 알 수 있다.

<u>성질 7</u>:

$1 \le j \le \frac{d_i}{2}$와 $1 \le k \le \frac{D_T}{2}$인 정수 j, k에 대하여

$$C_{i,-j+1+\frac{d_i}{2},-k+1+\frac{D_T}{2}} = C_{i,j+\frac{d_i}{2},k+\frac{D_T}{2}},$$
$$C_{i,j+\frac{d_i}{2},-k+1+\frac{D_T}{2}} = C_{i,-j+1+\frac{d_i}{2},k+\frac{D_T}{2}}.$$

성질 7이 의미하는 바는 $C_{i,j,k}$에서 $\left(\frac{d_i}{2}, \frac{D_T}{2}\right)$를 중심으로 서로 마주보는 두 칸의 비용값은 같다는 것이다. <Figure 4>에 성질 7의 대칭성을 도식적으로 나타내었다. <Figure 4>에서 I_i와 IV_i에 속한 상호 대칭인 두 칸과 II_i와 III_i에 속한 상호 대칭인 두 칸은 각각 할당비용값이 같다.

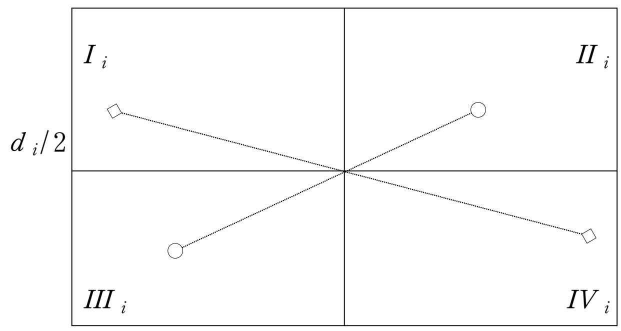

Figure 4. Concept of symmetry in $(C_{i,j,k})$ ($(C_{i,j,k})$의 대칭성의 개념).

<u>**성질 8**</u>:

$1 \le j \le \frac{d_i}{2}$와 $1 \le k \le \frac{D_T}{2}$인 정수 j, k에 대하여

$$C_{i,-j+1+\frac{d_i}{2},-k+1+\frac{D_T}{2}} \le C_{i,j+\frac{d_i}{2},-k+1+\frac{D_T}{2}},$$
$$C_{i,j+\frac{d_i}{2},k+\frac{D_T}{2}} \le C_{i,-j+1+\frac{d_i}{2},k+\frac{D_T}{2}}.$$

증명) 성질 7로부터

$$C_{i,j+\frac{d_i}{2},-k+1+\frac{D_T}{2}} = C_{i,-j+1+\frac{d_i}{2},k+\frac{D_T}{2}}.$$

그런데 $Z_{i,-j+1+\frac{d_i}{2}} \le \frac{D_T}{2}$이므로 성질 5로부터 다음이 성립한다.

$$C_{i,-j+1+\frac{d_i}{2},-k+1+\frac{D_T}{2}} \le C_{i,-j+1+\frac{d_i}{2},k+\frac{D_T}{2}}.$$

따라서

$$C_{i,-j+1+\frac{d_i}{2},-k+1+\frac{D_T}{2}} \le C_{i,j+\frac{d_i}{2},-k+1+\frac{D_T}{2}}$$

임을 알 수 있다.

나머지 경우도 마찬가지로 증명할 수 있다.

참고로 성질 7과 8에서

$$\left(-j+1+\frac{d_i}{2}, -k+1+\frac{D_T}{2}\right) \in I_i$$

$$\left(j+\frac{d_i}{2}, k+\frac{D_T}{2}\right) \in IV_i \text{ 이고},$$

$$\left(j+\frac{d_i}{2}, -k+1+\frac{D_T}{2}\right) \in III_i,$$

$$\left(-j+1+\frac{d_i}{2}, k+\frac{D_T}{2}\right) \in II_i \text{이다.}$$

<u>성질 9</u>:

$1 \le j \le \frac{d_i}{2}$ 와 $1 \le k \le \frac{D_T}{2}$ 인 정수 j, k에 대하여

$$C_{i,j,k} = C_{i, j+\frac{d_i}{2}, k+\frac{D_T}{2}} .$$

증명) 정수 j, k 가 $1 \le j \le \frac{d_i}{2}$ 와 $1 \le k \le \frac{D_T}{2}$ 라고 하자.

F_i가 대칭형 함수라는 가정과 d_i의 정의로부터

$\Psi_{i,j,k} = \Psi_{i, j+\frac{d_i}{2}, k+\frac{D_T}{2}}$ 임을 알 수 있다.

그리고

$$Z_{i, j+\frac{d_i}{2}} = Z_{i,j} = \left\lceil \left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r_i} \right\rceil \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned} Z_{i, j+\frac{d_i}{2}} = Z_{i,j} &= \left\lceil \left(j+\frac{d_i}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r_i} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{D_T}{2} + \left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r_i} \right\rceil \\ &= \frac{D_T}{2} + \left\lceil \left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r_i} \right\rceil \\ &= \frac{D_T}{2} + Z_{i,j} \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 C 의 정의에 의하여

$C_{i,j,k} = C_{i, j+\frac{d_i}{2}, k+\frac{D_T}{2}}$ 이다.

<u>성질 10</u>:

(문제 P)의 모든 실행 가능해 $(x_{i,j,k})$에 대하여

$$\sum_i \sum_{(j,k) \in II_i} x_{i,j,k} = \sum_i \sum_{(j,k) \in III_i} x_{i,j,k}$$

증명)

(문제 P)의 정의로부터

$\sum_i \sum_{(j,k) \in I_i} x_{i,j,k} + \sum_i \sum_{(j,k) \in II_i} x_{i,j,k} = \frac{D_T}{2}$ 이고

$\sum_i \sum_{(j,k) \in I_i} x_{i,j,k} + \sum_i \sum_{(j,k) \in III_i} x_{i,j,k} = \frac{D_T}{2}$ 임을 보일 수 있다.

따라서

$\sum_i \sum_{(j,k) \in II_i} x_{i,j,k} = \sum_i \sum_{(j,k) \in III_i} x_{i,j,k}$이다.

<u>정의 (위반정도)</u>:

$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{(j,k) \in II_i} x_{i,j,k} + \sum_{(j,k) \in III_i} x_{i,j,k}\right)$를 위반정도라고 부르도록 하자.

앞으로 주기적 생산순서 중에 (문제 P)의 최적해가 존재함을 보이도록 하겠다. 우선 모든 d_i, $i = 1, 2, \cdots, n$이 짝수인 경우에 주기적 생산순서 중에서 최적해가 있음을 밝혀보기로 하자. 이를 위하여 다음의 보조정리를 먼저 보이도록 한다.

<u>보조정리 1</u>:

모든 d_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ 가 짝수인 경우에, (문제 P)의 최적 제품생산순서 중에는 위반정도가 0인 생산순서가 하나이상 존재한다.

증명)

헝거리 법(Hungarian method)은 할당문제의 최적해를 구하는 방법 중 하나이다(Papadimitriou and Steiglitz, 1982). 헝거리 법에 의하여 (문제 P)의 최적해를 구하여 보자.

단계 1: 각 열에 대하여 기회비용표를 작성한다.
(기회비용 = 각 칸의 비용과 그 열의 가장 작은 비용과의 차이)

단계 2: 기회비용의 값이 0인 칸을 모두 지울 수 있는 직선의 최소 개수와 열의 개수 $(=D_T)$를 비교하여 그 수가 같으면 단계4로 간다.

단계 3: 직선의 개수가 열의 개수 $(=D_T)$보다 작으면 기회비용표를 수정한다. 직선으로 지워지지 않은 칸들의 값 중 최소값을 찾아 직선이 통과하지 않는 칸에는 그 값을 빼주고, 직선의 교차점에는 그 값을 더 해준 다음 단계 2로 돌아간다.

단계 4: 최적할당을 다음과 같이 한다. 하나의 0을 포함하는 행(열)이 있으면 그 칸에 우선적으로 배정하고, 나머

지 행(열)에 대해서는 두 칸이 동시에 배정되지 않도록 할당한다.

단계 1에서 각 열의 최소값을 갖는 칸은 성질 8에 의하여 I_i와 IV_i에 위치한다. 또한 성질 7에 의하여 $\left(-j+1+\frac{d_i}{2}, -k+1+\frac{D_T}{2}\right) \in I_i$이 $-k+1+\frac{D_T}{2}$의 열에서 최소값을 갖는 칸이라면 $\left(j+\frac{d_i}{2}, k+\frac{D_T}{2}\right) \in IV_i$도 $k+\frac{D_T}{2}$의 열에서 최소값을 갖는 칸이다. 그리고 단계 2에서 기회비용의 값이 0인 칸을 지우는 직선을 선택할 때에 성질 7의 대칭성의 성질을 이용하여 만약 $-j+1+\frac{d_i}{2}$의 행을 선택하면 $j+\frac{d_i}{2}$의 행도 선택하고, $-k+1+\frac{D_T}{2}$의 열을 선택하면 $k+\frac{D_T}{2}$의 열도 선택한다. 그러면 단계 3에서 선택되는 최소값을 갖는 칸은 성질 7과 성질 8에 의하여 I_i와 IV_i에 위치할 수밖에 없다. 결국 단계 4에서 최적할당을 할 시점에서 0의 값을 갖는 칸은 I_i와 IV_i에만 위치하게 된다. 따라서 이렇게 결정된 최적해에서는 모든 $(j, k) \in II_i \cup III_i$에 대하여 $x_{i,j,k}=0$이다.

정리 1:
모든 d_i, $i=1, 2, \cdots, n$ 가 짝수라고 하자.
제품 i의 생산량 d_i, $i=1, 2, \cdots, n$에 대한 $1, 2, \cdots, D_T$기 동안의 최적 제품생산순서는 제품 i의 생산량 $\frac{d_i}{2}$에 대한 $1, 2, \cdots, \frac{D_T}{2}$기 동안의 최적 제품생산순서를 두 번 반복함으로써 구할 수 있다.

증명)
보조정리 1에 의하여 $(1, 2, \cdots, D_T)$ 기간의 최적 생산순서 중에는 위반정도가 0인 것이 있다. 이러한 최적 생산순서의 경우 목적함수 값은

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{(j,k)\in I_i} C_{i,j,k}x_{i,j,k} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{(j,k)\in IV_i} C_{i,j,k}x_{i,j,k}$이다.
그리고 이러한 최적 생산순서의 경우

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{(j,k)\in I_i} C_{i,j,k}x_{i,j,k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{(j,k)\in IV_i} C_{i,j,k}x_{i,j,k}$$

(만약

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{(j,k)\in I_i} C_{i,j,k}x_{i,j,k} < \sum_{i=1}^{n}\sum_{(j,k)\in IV_i} C_{i,j,k}x_{i,j,k}$이라면 이 최적 생산순서의 $(1, 2, \cdots, \frac{D_T}{2})$ 기간의 생산순서를 2번 반복하여 구한 생산순서는 실행 가능하고 또한 성질 9에 의하여 목적함수값이 $2\sum_{i=1}^{n}\sum_{(j,k)\in I_i} C_{i,j,k}x_{i,j,k}$ $\left(< \sum_{i=1}^{n}\sum_{(j,k)\in I_i} C_{i,j,k}x_{i,j,k} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{(j,k)\in IV_i} C_{i,j,k}x_{i,j,k}\right)$ 이 되어 원래 구한 생산순서가 최적이라는 것과 모순이 된다.

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{(j,k)\in I_i} C_{i,j,k}x_{i,j,k} > \sum_{i=1}^{n}\sum_{(j,k)\in IV_i} C_{i,j,k}x_{i,j,k}$인 경우도 마찬가지이다).

따라서 $(1, 2, \cdots, \frac{D_T}{2})$기간의 최적 생산순서를 두 번 반복하면 $(1, 2, \cdots, D_T)$기간의 최적 생산순서가 된다.

정리 2:
모든 d_i, $i=1, 2, \cdots, n$ 의 최대공약수가 m이라고 하자.
제품 i의 생산량 d_i, $i=1, 2, \cdots, n$에 대한 $1, 2, \cdots, D_T$기 동안의 최적 제품생산순서는 제품 i의 생산량 $\frac{d_i}{m}$, $i=1, 2, \cdots, n$에 대한 $1, 2, \cdots, \frac{D_T}{m}$기 동안의 최적 제품생산순서를 m번 반복함으로써 구할 수 있다.

증명)
제품 i의 생산량 $\rho\frac{d_i}{m}$, $i=1, 2, \cdots, n$에 대한 $1, 2, \cdots, \rho\frac{D_T}{m}$기 동안의 최적 제품생산순서는 제품$i$의 생산량 $\frac{d_i}{m}$, $i=1, 2, \cdots, n$에 대한 $1, 2, \cdots, \frac{D_T}{m}$ 기 동안의 최적 제품생산순서를 ρ번 반복함으로써 구할 수 있음을 수학적 귀납법을 적용하여 증명한다. 정리 1에 의하여 이미 $\rho=2$인 경우를 증명하였다. $\rho>2$인 경우 이미 위 정리가 $\rho=2, 3, \ldots, q-1(<m)$까지 성립한다고 가정하자. 그러면 위 정리가 $\rho=q$의 경우에도 성립함을 보이도록 한다.

$$II_i(q) = \left\{(j, k) \mid 1 \le j \le (q-1)\frac{d_i}{m},\ (q-1)\frac{D_T}{m} < k \le q\frac{D_T}{m}\right\}$$와

$$III_i(q) = \left\{(j, k) \mid (q-1)\frac{d_i}{m} < j \le q\frac{d_i}{m},\ 1 \le k \le (q-1)\frac{D_T}{m}\right\}$$라고 정의하면

$\rho=q$의 경우 $(j, k) \in II_i(q) \cup III_i(q)$에 대하여

$x_{i,j,k}=0$인 최적해가 존재함을 헝거리 법을 적용하여 보일 수 있다. 그러면 성질 9와 비슷하게 $C_{i,j,k}=C_{i,j+\rho\frac{d_i}{m},k+\rho\frac{D_T}{m}}$이 성립하므로, 정리 1에서 적용한 동일한 논리에 따라, 제품 i의 생산량 $q\frac{d_i}{m}, i=1,2,\cdots,n$에 대한 $1,2,\cdots, q\frac{D_T}{m}$ 기 동안의 최적 제품생산순서는 제품 i의 생산량 $\frac{d_i}{m}, i=1,2,\cdots,n$에 대한 $1,2,\cdots, \frac{D_T}{m}$ 기 동안의 최적 제품생산순서를 q번 반복함으로써 구할 수 있다.

이로써 F_i가 대칭인 볼록함수인 경우에는 주기적 순서 중에 최적해가 존재함을 보였다. 그러나, F_i가 비대칭인 경우에는 주기적 순서 중에 최적해가 전혀 존재하지 않을 수도 있다. 그 반증 예로 다음의 경우를 보도록 한다. 3가지 제품 A, B, C의 생산계획량이 각각 2개, 2개, 4개이고, F_i이 다음과 같이 정의되어 있다.

$$F_i = w_i^p(\alpha_{k,i})^+ + w_i^N(\alpha_{k,i})^-$$

여기에서 $(y)^+ = \max\{y, 0\}$, $(y)^- = \max\{-y, 0\}$ M은 큰 수, ε은 비음의 아주 작은 수를 의미한다.

	A	B	C
w_i^p	M	2M	ε
w_i^N	ε	ε	ε

이 경우, (C, C, C, B, A, C, A, B)가 $\{A, B, C, C\}$의 어떠한 순서를 두 번 반복한 주기적 순서보다도 목적함수 값이 작다.

4. 결 론

본 논문은 혼류 생산시스템에서 제품생산량의 변동을 줄이기 위한 평준화 생산순서를 작성하는 방법으로서 사용되는 주기적 생산순서의 최적성에 대하여 알아보았다. 본 연구에서 제품 i의 목적함수 F_i가 대칭인 볼록함수인 경우에는 주기적 순서 중에 최적해가 존재함을 보였다. 본 논문 이전의 연구로서 Bautista *et al.*(2000)는 모든 F_i가 동일한 모양(F)의 강볼록함수(strictly convex function)인 경우에 주기적 생산순서로 최적 생산순서를 구할 수 있음을 보였다. 본 논문에서는 Bautista *et al.*보다도 더 일반적인 경우, 다시 말해 F_i가 상이한 모양인 경우에 주기적 생산순서로 최적 생산순서를 구할 수 있음을 보였다. 그런데 Bautista *et al.*(2000)의 증명은 모든 F_i가 동일하지 않은 경우에는 성립되지 않아, 본 논문에서 다루고자 하는 문제에는 새로운 접근법이 필요하다. 본 논문에서는 제품 생산순서 결정문제를 Kubiak and Sethi(1991)의 방식에 따라 할당문제(assignment problem)로 변환하였고 이 변환된 할당문제의 비용행렬의 특수한 성질을 새로이 밝혀서 주기적 생산순서의 최적성을 증명하였다. 또한 본 논문에서는 F_i가 비대칭인 경우에는 주기적 순서의 최적성을 보장할 수 없음을 반증례를 통해 보였다.

앞으로의 연구과제는 다음과 같다.

1) F_i가 비대칭인 경우에는 주기적 순서의 최적성이 보장되는 충분조건은 무엇인가에 대한 연구가 필요하겠다.

2) 본 연구는 PRV 문제의 주기적 순서에 관하여 분석하였는데, ORV 문제의 주기적 순서의 최적성은 아직 미해결문제로 남아 있다. ORV 문제가 PRV 문제보다도 어려운 것은 PRV 문제의 경우 목적함수가 각 제품의 목적함수 기여분 F_i의 합으로 표현되는 소위 분리형 문제(separable problem)인 데 반하여 ORV 문제는 비분리형 문제이기 때문이다. ORV 문제의 경우에 주기적 순서의 최적성 여부에 대한 연구가 필요하다.

3) 또한 ORV 문제의 경우 과거에 많은 발견적 기법이 제안되었고 현실적 문제의 생산순서 결정 시에 전체 문제를 소규모의 문제로 분해하고 소규모 문제의 생산순서를 구한 후에, 이를 반복적으로 적용하는 주기적 생산순서방식을 사용하곤 하였다. 그런데 이러한 발견적 기법의 정확도에 대하여 아직 아무런 연구가 진행된 바가 없으니, 이 문제도 연구해 볼 필요가 있다.

참고문헌

Aigbedo, H. (2004), Analysis of Part Requirements Variance for a JIT Supply Chain, *International Journal of Production Research*, **42**(2), 417-430.

Bautista, J., Companys, R., and Corominas, A. (1996), Heuristics and Exact Algorithms for Solving the Monden Problem, *European Journal of Operational Research*, **124**, 468-477.

Bautista, J., Companys, R., and Corominas, A. (2000), Note on Cyclic Sequences in the Product Rate Variation Problem, *European Journal of Operational Research*, **124**, 468-477.

Duplaga, E.A. and Bragg, D.J. (1998), Mixed-Model Assembly Sequencing Heuristics for Smoothing Component Parts Usage: A Comparative Analysis, *International Journal of Production Research*, **36**(8), 2209-2224.

Hyun, C.J., Kim, Y.K., and Kim, Y. (1998), A Genetic Algorithm for Multiple Objective Sequencing Problems in Mixed Model Assembly Lines, *Computers & Operations Research*, **25**, 675-690.

Jin, M. and Wu, S.D. (2002), A New Heuristic Method for Mixed Model Assembly Line Balancing Problem, *Computers & Industrial Engineering*, **44**, 159-169.

Kubiak, W. (1993), Minimization of Production Rates in Just-In-Time Systems: A Survey, *European Journal of Operational Research*, **66**, 259-271.

Kubiak, W. and Sethi,S.(1991), A Note on Level Schedules for Mixed-Model Assembly Lines in Just-In-Time Production Systems, *Management Science*, **37**(1), 121-122.

Miltenburg, J. (1989), Level Schedules for Mixed-Model Assembly Lines in Just-In-Time Production Systems, *Management Science*, **32**(2), 192-207.

Miltenburg, J. and Goldstein, T. (1991), Developing Production Schedules with Balance Part Usage and Smooth Production Loads for Just-In-Time Production Systems, *Naval Research Logistics*, **38**, 893-910.

Miltenburg, J. and Sinnamon,G.(1989), Scheduling Mixed- Model Multi-Level Just-In-Time Production Systems, *International Journal of Production Research*, **27**, 1487-1509.

Miltenburg, J., Steiner, G., and Yeomans,S.(1990), A Dynamic Programming Algorithm for Scheduling Mized-Model, Just-In-Time Production Systems, *Mathematical Computing and Modeling*, **13**(3), 57-66.

Monden, J. (1983), *Toyota Production System*, Institute of Industrial Engineers Press, Norcross, Georgia.

Papadimitriou, C.H. and Steiglitz, K. (1982), *Combinatorial Optimization*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Ponnambalam, S.G., Aravindan, P., and Rao, M.S. (2003), Genetic Algorithms for Sequencing Problems in Mixed Model Assembly Lines, **45**, 669-690.

Steiner, G. and Yeomans, S. (1996), Optimal Level Schedules in Mixed-Model, Multi-Level JIT Assembly Systems with Pegging, *European Journal of Operational Research*, **95**, 38-52.

Sumichrast, R.T. and Russell,R.S.(1990), Evaluating Mixed- Model Assembly Line Heuristics for Just-In-Time Production Systems, *Journal of Operations Management*, **9**(3), 371-390.