

# 개선된 추가변형률 4절점 평판휨 요소

Improvement of Enhanced Assumed Strain Four-node Finite Element  
Based on Reissner-Mindlin Plate Theory

천 경식<sup>1)</sup> · 박 대용<sup>2)</sup> · 장 석윤<sup>3)</sup>

Chun, Kyoung Sik Park, Dae Yong Chang, Suk Yoon

**요약 :** 본 연구에서는 등방성 및 복합적층판 해석을 위해 추가변형률을 갖는 개선된 4절점 Reissner-Mindlin 평판휨요소를 제안하였다. 전단잠김현상과 가상적인 제로에너지모드를 제거하기 위해 비적합 변위모드와 Bubble 함수식에 근거한 새로운 형태의 전단변형률을 추가함으로써 횡방향 전단거동을 개선하였다. Andelfinger와 Ramm(1993)이 제시한 기본적인 추가변형률은 면내거동을 개선시키고자 그대로 적용하였다. 1차전단변형이론에 근거한 새로 개발된 4절점 평판요소를 'I4EASP'라 명하였다. I4EASP 유한요소의 특징과 성능을 평가하고자 몇 가지의 수치해석예제를 적용하였으며, 다른 유한요소 및 해석적인 해와 비교하였다. 그 결과 본 연구에서 제안한 I4EASP는 보다 안정적이고, 수렴성이 빠르며, 특히 요소형상이 왜곡된 경우에도 정확한 결과를 도출하였다.

**ABSTRACT :** In this paper, an improved four-node Reissner-Mindlin plate-bending element with enhanced assumed strain field is presented for the analysis of isotropic and laminated composite plates. To avoid the shear locking and spurious zero energy modes, the transverse shear behavior is improved by the addition of a new enhanced shear strain based on the incompatible displacement mode approach and bubble function. The "standard" enhanced strain fields (Andelfinger and Ramm, 1993) are also employed to improve the in-plane behaviors of the plate elements. The four-node quadrilateral element derived using the first-order shear deformation theory is designated as "I4EASP". Several applications are investigated to assess the features and the performances of the proposed element. The results are compared with other finite element solutions and analytical solutions. Numerical examples show that the element is stable, invariant, passes the patch test, and yields good results especially in highly distorted regimes.

**핵심 용어 :** 4절점 평판요소, 추가 변형률, 추가 전단변형률, 전단잠김, 가상적인 제로에너지모드, Bubble 함수식

**KEYWORDS :** Four-node plate bending element, Enhanced assumed strains, Enhanced transverse shear strains, Shear locking, Spurious zero energy modes, Bubble functions

## 1. 서 론

유한요소법이 개발된 이후, 이들 목표는 성능이 우수한 유한요소 즉, 평판요소에서의 전단잠김(shear locking), 웨일 요소에서의 면내잠김(membrane locking), 비압축성 문제에서의 체적잠김(volumetric locking)현상 등을 제거하고, 적은 요소수와 왜곡된 요소형상에 대해서도 합리적인 해석결과를 도출할 수 있는 보다 안정적인 요소개발이다. 유한요소의 발전경향을 크게 4가지로 나누면 감차적분법(reduced integration method), 비적합 변위법(incompatible displacement meth-

od), 대체 변형률법(assumed strain method) 그리고 응력 혹은 변형률을 독립변수로 도입하는 혼합법(hybrid/mixed method)이 있다. 최근에 대두되고 있는 혼합법은 대표적으로 변위와 응력을 가정하는 가정 응력법(assumed stress hybrid method)과 변위와 변형률을 가정하는 추가 변형률법(enhanced assumed strain method)이 있다 (여승태, 2000).

Wilson 등(1973)은 4절점 요소의 휨성능을 개선시키고자 처음으로 비적합 변위모드를 제시하였다. 그러나 초기 비적합 변위모드는 요소형상이 왜곡될 경우 조각시험(patch test)을 통과하지 못하는 문제점을 갖고 있었다. Talyor 등(1976)은

1) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 박사과정  
(Tel. 02-2210-2273, Fax. 02-2217-6800, E-mail : chunks@uos.ac.kr)

2) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 박사과정(daejong@uos.ac.kr)  
3) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 교수(changsy@uos.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2004년 12월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

비적합 변위에 의한 변형률을 조각시험을 통과하도록 수정함으로써 비적합 요소의 근본적인 문제점을 해결하였다. 1990년에 들어와 Simo와 Rifai(1990)는 Hu-Washizu 범함수에 근거한 추가 변형률(enhanced strain)를 체계적으로 제시하였으며, 이를 변분적으로 전개함으로써 수학적인 안정성을 보장받을 수 있었다. 또한 그들은 비적합 변위모드가 EAS 방법에서 직접적으로 유도되며, 새로운 분야가 아닌 EAS 방법의 특별한 경우임을 증명하였다. 결과적으로 비적합 변위법의 수학적 배경을 제공하였고 보다 일반적인 비적합 변위요소의 개발과정도 제시하였다. 비적합 변위모드를 복합적층구조에 적용하여 새로운 검증기준을 제시하였으며(박대용 등, 2003), 그 유한요소에 근거하여 이동하중을 받는 복합재료 교량 바닥판의 동적응답 평가가 이루어졌다(천경식 등, 2003; 2004).

Andelfinger와 Ramm(1993)은 Simo와 Rifai(1990)의 이론에 근거하여 면내감김현상을 제거하고 휨 거동을 개선시키기 위한 추가 변형률을 제시하였으며, 이를 2, 3차원 유한요소에 적용하였다. 이때 전단변형률에 관해서는 추가 전단변형률(Simo and Rifai, 1990)이 아닌 Bathe와 Dvorkin (1984)이 제시한 가정된 전단변형률장을 적용하였다. 또한 Hellinger-Reissner 변분원리에 근거한 가정 응력 요소와 추가 변형률 요소 사이에 변위 관점의 등가관계가 존재함을 수치실험으로부터 관찰하였다. Yeo와 Lee(1996)는 변위뿐만 아니라 응력을 포함하는 엄밀한 등가관계 및 등가조건을 정의하였으며, 추가 변형률과 관련하여 최적의 응력함수를 선택하기 위한 합리적인 절차를 이론적으로 제시하였다. Piltner와 Taylor(1995)는 변형된 형태의 Hu-Washizu 범함수를 도입하고 변위와 두 개의 추가 변형률 및 응력을 독립변수로 설정하였다. Korelc과 Wriggers (1996)는 형상함수를 Taylor 확장식으로 전개하여 새로운 추가변형률 요소를 개발하였으며, Andelfinger와 Ramm(1993)이 제시한 3차원 EAS 요소가 21개의 내부 변형률 인자를 갖는 반면 보다 적은 9개를 이용한다는 점에서 그 효율성을 강조하였다.

본 연구는 7개의 내부인자를 갖는 EAS7(Andelfinger and Ramm, 1993)을 그대로 적용하고, 전단변형률에는 전단감김현상 및 휨 거동을 개선시키고자 비적합 변위모드의 선형조합을 통해 새로운 형태의 추가 전단변형률을 제시하고자 한다. 적분선택점과 보간함수를 이용한 가정된 변형률(ANS, assumed natural strain), Jacobian 행렬을 이용하여 명시적(explicit)으로 전개한 대체전단변형률(SSS, substitute shear strain) 그리고 Hu-Washizu 원리에 의한 추가 변형률(EAS, enhanced assumed strain) 등의 기존 방법과 해석 예제를 통해 본 연구에서 제시한 요소의 타당성 및 우수성을 입증한다.

## 2. 1차전단변형이론 및 구성방정식

본 연구의 해석모델의 미소요소에 대한 좌표계는 오른손 좌표계를 사용하여 그림 1과 같이 나타내었다. 각각의 제시된 모델에 따라 변위성분  $u, v, w$ 를 두께방향좌표에 대한 Talyor 전개식으로 확장한다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $u_0, v_0$ 와  $w_0$ 는 각각 중립면에서의 면내와 횡방향 변위를 나타내며,  $\phi_x$ 와  $\phi_y$ 는 각각  $y$  축과  $x$  축에 대한 회전각을 의미한다. 전단변형효과를 고려한 변형률-변위와의 관계는 식 (2)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_x \\ \boldsymbol{\epsilon}_y \\ \boldsymbol{\epsilon}_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_x'' \\ \boldsymbol{\epsilon}_y'' \\ \boldsymbol{\epsilon}_{xy}'' \\ \gamma_{xz}'' \\ \gamma_{yz}'' \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_x \\ \boldsymbol{\kappa}_y \\ \boldsymbol{\kappa}_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

여기서,

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_x'' \\ \boldsymbol{\epsilon}_y'' \\ \boldsymbol{\epsilon}_{xy}'' \\ \gamma_{xz}'' \\ \gamma_{yz}'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{o,x} \\ v_{o,y} \\ u_{o,x} + v_{o,y} \\ \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} + \phi_{x,x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_x \\ \boldsymbol{\kappa}_y \\ \boldsymbol{\kappa}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz}'' \\ \gamma_{yz}'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_y + w_{o,y} \\ \phi_x + w_{o,x} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

강재, 콘크리트와 같은 등방성과는 달리 적층구조에서 재료의 강성은 각 층들이 서로 다른 방향성을 가지므로 두께방향으로 일정하지 않다. 이러한 등방성 및 적층구조에 따른 비등방성을 포함하기 위해 식 (4)와 같이 일반화된 강성행렬을 적용한다.

$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}$ 는 단면력과 변형률의 관계를 나타내기 위하여 사용하는 강성값으로 각각 인장, 연계, 휨 및 전단강성행렬을 의미하며, 식 (5)와 같이 구조축의 탄성강도를 적층단면의 두께에 대하여 적분하여 계산한다. 전단보정계수  $k$ 는 Reissner값의 5/6를 적용한다.

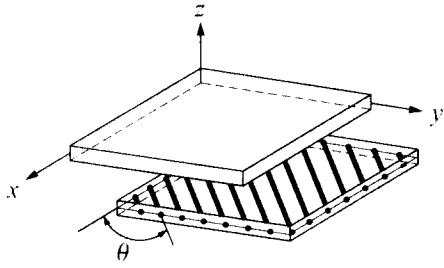


그림 1. 등방성 및 직교이방성판의 기하학적 형상 및 좌표계

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ M_i \\ Q_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{ij} & B_{ij} & 0 \\ B_{ij} & D_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & E_{ij} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \gamma^o \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(l, z, z^2) dz \quad (5a)$$

$$(E_{ij}) = k \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz \quad (5b)$$

강재, 콘크리트와 같은 등방성일 경우 식 (4)에서 면내, 휨 및 전단강성행렬은 다음과 같이 탄성계수  $E$ 와 전단탄성계수  $G$ 나 포아송비  $\nu$ 로 나타낸다. 그 이외의 항들은 연계효과가 발생하지 않으므로 0이다. 연계강성  $B_{ij}$ 는 적층구조라 할지라도 그 적층형태가 중립축을 기준으로 두께와 재료특성치가 서로 대칭으로 구성되면 0이 된다.

$$A_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad A_{12} = \nu A_{11}, \quad A_{22} = A_{11} \quad (6a)$$

$$A_{66} = \frac{1-\nu}{2} A_{11}, \quad E_{11} = E_{22} = \frac{1-\nu}{2} k A_{11} \quad (6b)$$

$$D_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_{66} = \frac{1-\nu}{2} D_{11}, \quad D_{12} = \nu D_{11}, \quad (6c)$$

$$D_{22} = D_{11}$$

### 3. EAS 변분원리

EAS(enhanced assumed strain) 유한요소의 변분원리는 Hu-Washizu 범함수(functional)에 근거하여 유도되며, 하나의 요소에 대한 내부 에너지를 표현하면 다음과 같다.

$$\Pi_{HW} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T D\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^u d\Omega \quad (7)$$

여기서,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  와  $\boldsymbol{\sigma}$ 는 변형률과 응력을 의미한다.  $D$ 는 재료 강성행렬로서 등방성 및 비등방성에 따라 행렬의 차원이 결정된다.  $\boldsymbol{\varepsilon}^u$ 는 변위  $u$ 에 대한 미분값을 의미하며 미분 연산자  $L$ 을 이용하여  $\boldsymbol{\varepsilon}^u = Lu$ 로 나타낸다.  $\Omega$ 는 요소의 영역을 의미한다. EAS 유한요소에서 변형률은 적합(compatible) 변형률  $\boldsymbol{\varepsilon}^u$ 을 새롭게 추가되는(extra/enhanced) 변형률  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ 로 보강함으로써 전체변형률을 근사하며, 식 (8)과 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^u + \boldsymbol{\varepsilon}^e = Lu + \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (8)$$

식 (9)에 나타낸 응력  $\boldsymbol{\sigma}$ 와 추가된 변형률  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ 의 직교성은 해의 수렴성 및 조각시험을 통과하기 위한 필요조건이다. 이렇게 정의된 변형률을 Hu-Washizu 범함수에 대입하고 정리한다. 새로 정리된 범함수는 응력을 외현적으로 구할 수 없다. 이를 해결하기 위해서 추가변형률과 외력과의 직교성 조건을 부과하여 응력을 초기단계에서 소거시킨다. 최종적인 추가 변형률법의 범함수를 식 (10)과 같이 구할 수 있다.

$$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^e d\Omega = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{EAS} = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^{et} D\boldsymbol{\varepsilon}^e d\Omega + \int_{\Omega_e} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{et} D\boldsymbol{\varepsilon}^u d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^{ut} D\boldsymbol{\varepsilon}^u d\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

추가 변형률법이 조각시험을 통과하고, 가상의 제로에너지 모드가 발생하지 않도록 하기 위해서는 몇 가지 조건을 만족해야 한다. 식 (9)에 나타낸 직교성 이외에 추가변형률과 적합변형률은 서로 공통원소를 가질 수 없으며, 추가변형률을 근사함수 행렬  $M$ 의 열들이 서로 독립이어야 한다. 또한 추가 변형률은 HR-요소(Pian and Sumihara, 1984)와 동일한 응력장을 구성하도록 선택한다. 이에 적합한 추가변형률을 근사함수 행렬  $M$ 은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$M_m = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서,  $\xi\eta$  항은 입의의 요소형상을 갖는 경우를 제외한 직사각형이나 평행사변형 요소를 갖는 경우에는 영향을 주지

않으므로 단지  $\xi$  또는  $\eta$ 만으로도 충분하다. 자연좌표계(natural coordinate)에서 정의된 EAS 요소내 추가 변형률을 전체좌표계로 변환하기 위해 Simo와 Rifai(1990)에 의해 제시된 방법을 채택하였다. 즉, 일정변형률상태에서 추가 변형률(enhanced strain)에 의해서 변형에너지를 야기하지 않는 조건으로 식 (12)와 같이 Jacobian 행렬에 의해 재구성한다. 일반적으로 비적합 변위모드(Choi et al., 2001)나 EAS 변형률을 추가적으로 사용하게 되면 변형에너지의 변화로 인해 유한요소는 조각시험을 통과할 수 없다. 이를 해결하기 위하여 B-bar방법(Zienkiewicz and Taylor, 1989)이나 비적합 변위모드의 미분값을 보정하는 CCL방법(Choi et al., 2001)이 사용되고 있으며 그 개념은 EAS 요소에서도 동일하게 적용된다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \begin{pmatrix} j_o \\ j \end{pmatrix} \Lambda_o^{-T} M_m \alpha \quad (12)$$

$$\Lambda_o = \begin{bmatrix} J_{11o}^2 & J_{21o}^2 & 2J_{11o}J_{21o} \\ J_{12o}^2 & J_{22o}^2 & 2J_{12o}J_{22o} \\ J_{11o}J_{12o} & J_{21o}J_{22o} & J_{11o}J_{22o} + J_{12o}J_{21o} \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서, 행렬  $A_0$ 은 요소내  $\xi = \eta = 0$ 에서 결정된 Jacobian 행렬  $J(0, 0)$ 의 요소로 구성되며,  $j_o$ 와  $j$ 는 각각  $J(0, 0)$ 과  $J(\xi, \eta)$ 의 행렬식(determinant)을 의미한다.

#### 4. 추가 전단변형률

앞서 서술한 EAS 변분원리 및 추가변형률 근사함수는 기존에 적용되어왔던 대체 변형률과는 근본적으로 차이가 있다. 대체 변형률은 변형률을 가정하지만 변형률을 독립변수로 취하지 않고 변위로부터 적절히 가정한 반면, 추가 변형률은 변형률을 변위와는 독립적으로 가정한다. 그러나 Andelfinger와 Ramm(1993)은 면내와 휨 변형률에 관해서는 추가 변형률을 선택하였지만, 전단 변형률은 Simo와 Rifai(1990)가 제시한 방법(EAS4)이 아닌 Bathe와 Dvorkin(1986)이 제시한 가정 변형률 또는 대체 변형률(ANS) 방법을 적용하였다. 즉, EAS4는 요소의 형상이 왜곡될 경우 오히려 ANS보다 성능이 떨어진다. 따라서, 본 절에서는 전단잠김현상을 제거하고 거동을 개선시키고자 전단변형률만을 위한 새로운 추가 변형률을 제시한다.

전단변형률을 간단히 나타낸 식 (14)에서  $B$ 는 각 절점에 대한 자유도  $q = \{w, \theta_x, \theta_y\}$ 에 관한 기본적인 변형률 행렬

이며,  $M_s$ 는 본 연구에서 새로 제시한 추가 전단변형률이다.  $\lambda$ 는 추가 전단변형률 매개변수이며, 전체강성행렬 구성시 정적응축(static condensation)으로 소거한다.

$$\gamma = Bq + M_s \lambda \quad (14)$$

추가 전단변형률  $M_s$ 는 본 저자가 개선된 8절점 유한요소(천경식 등, 2004) 개발시 전단변형률에 Bubble 함수식을 적용하였던 것에 착안하여 4절점 평판요소에 적합한 식 (15)를 제시한다.

$$M_s = \mathbb{C} \begin{bmatrix} \wp & 0 \\ 0 & \wp \end{bmatrix} \quad (15a)$$

$$\mathbb{C} = \langle \xi \quad \eta \quad \xi\eta \rangle \quad (15b)$$

$$\wp = \langle \eta_2 \quad \xi_2 \quad \xi_2\eta_2 \rangle \quad (15c)$$

여기서,  $\xi_2 = 1 - \xi^2$ ,  $\eta_2 = 1 - \eta^2$ 이다. 조각시험을 통과하기 위해서 앞서 서술한 바와 같이 Jacobian 행렬식  $J$ 을 적용하여  $M_s$ 를 변환한다. 최종강성행렬  $K$ 는 식 (16)과 같으며, 수치적분식 면내, 휨 그리고 전단강성행렬 모두  $2\times 2$  가우스 적분법을 사용한다. 아래첨자  $mb$ 는 면내와 휨,  $s$ 는 전단에 관한 항을 의미하며, 각각 추가변형률에 의한 보강된 형태를 갖는다.

$$K = K_{mb} + K_s = \int_A \bar{B}_{mb}^T D \bar{B}_{mb} dA + \int_A \bar{B}_s^T D_s \bar{B}_s dA \quad (16)$$

#### 5. 해석 예 및 결과분석

본 논문에서 제시한 새로운 개념의 4절점 EAS 유한요소(I4EASP)의 타당성과 우수성 및 복합적층구조의 적용성을 알아보기 위해 여러 예제시험을 수행하였다. Bubble 함수식을 적용하여 8절점 평판요소를 개선한 MAR-8P(천경식 등, 2004), 대체 변형률을 갖는 MITC4(Bathe and Dvorkin, 1984), 면내와 휨 변형률에 추가 변형률(enhanced assumed strain), 전단 변형률은 대체 변형률을 갖는 EAS7-AR(Andelfinger and Ramm, 1993), 단지 전단변형률에만 추가 변형률을 적용한 EAS4-SR(Simo and Rifai, 1990) 등과 비교한다. 해석 예는 요소의 불규칙성, 폭-두께비, 기하학적 형상 등의 다양한 매개변수에 따른다.

기본 수치해석으로 고유치시험(eigenvalue test)과 조각

시험(patch test)가 있다. 고유치시험은 한 변의 길이 1.0이고 탄성계수 1.0, 포아송비 0.25, 두께 1.0인 정사각형 단일 모델에 대하여 평판휨요소에 대해 수행한다. 조각시험은 요소의 수렴성을 검증하는 방법으로 요소가 일정변형률 상태(constant strain state)를 표현할 수 있는가를 검사한다. 그림 2와 같은 형상의 체눈에 대하여 휨, 비틀림 그리고 전단을 시험한다. 본 연구에서 제시한 개선된 I4EASP는 고유치 시험에서 제로에너지모드를 가지고 있지 않았으며, 조각시험을 모두 통과하였다.

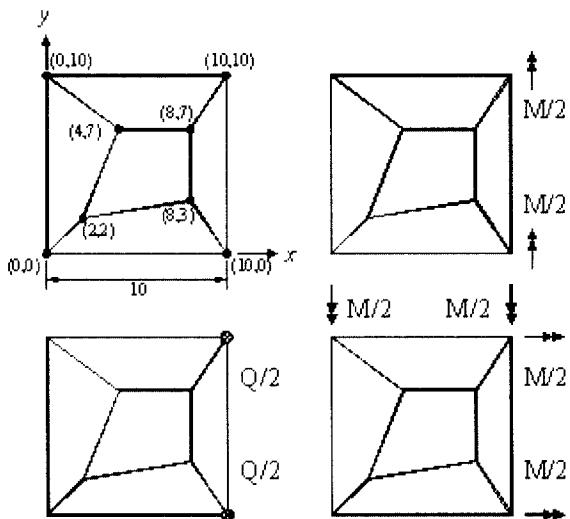


그림 2. 조각시험 요소망

### 5.1 Morley의 30° 경사판

Morley(1963)에 의해 제시된 4변 단순지지된 경사판은 요소의 특이성(singularity) 및 요소분할수에 따른 수렴도를 실험하기 위한 것으로 그림 3에 나타내었다. Morley는 극좌표계를 사용하고 최소자승법 과정을 통해 해석하였다. 해석모델의 기하학적 형상은  $L = 100$ ,  $h = 1$ 이고, 적용한 재료물성치는  $E = 10^5$ ,  $\nu = 0.3$ 이다. 하중조건은 등분포하중  $q = 1.0$ 을 재하시켜 해석하였다. 그림에서 보듯이 30° 경사각으로 둔각부와 예각부의 각도차가 크며, 요소의 일부분이 뾰족해 해석상에 어려움이 있다.

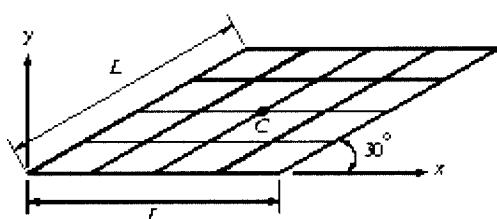


그림 3. Morley의 30° 경사판

일반적으로 우수한 유한요소로 알려진 MITC4(Bathe and Dvorkin, 1984)는 이 모델에서 상당한 오차를 가지는 것으로 알려져있다(Katili, 1993; 천경식 등, 2004).

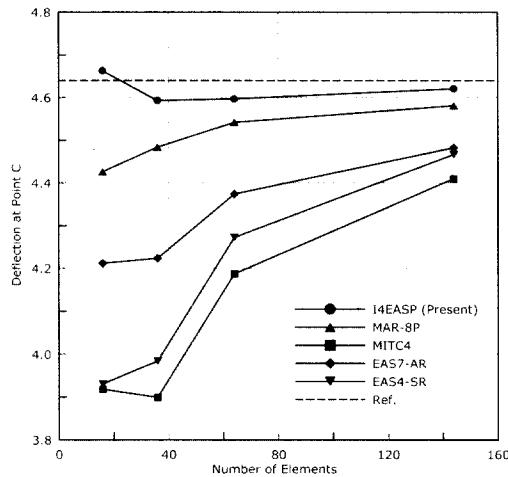


그림 4. 해석결과 비교

표 1과 그림 4는 요소수에 따른 경사판 중앙점(C)의 처짐을 비교하여 나타낸 것이다. 기준에 발표된 결과치와 비교하여 본 논문에서 제시한 I4EASP는 적은 요소수에도 놀라울 정도의 수렴성을 보이고 있다. 한 예로 36개의 요소수에서 MITC4, EAS7-AR, EAS4-AR 그리고 I4EASP는 기준해(4.6400)와 비교하여 각각 15.97%, 8.97%, 14.13% 그리고 1.01%의 차이를 나타내고 있다. 더 놀라운 사실은 Bubble 함수식과 수정된 형상함수에 의한 MAR-8P보다 훨씬 성능이 우수하며, 수렴도면에서도 상당한 개선효과를 보인다는 것이다.

표 1. 단순지지된 경사판의 수치해석결과 비교

Theory	Number of Elements			
	16	36	64	144
Ref.	4.6400			
MAR-8P	4.4258	4.4840	4.5419	4.5810
MITC4	3.9182	3.8991	4.1875	4.4098
EAS7-AR	4.2122	4.2239	4.3738	4.4827
EAS4-SR	3.9305	3.9841	4.2727	4.4668
I4EASP	4.6632	4.5930	4.5968	4.6210

### 5.2 고정지지된 원형판

요소형상이 일반적으로 찌그러진 경우 수렴성과 정확성을

실험하기 위해 고정지지된 얇은 원형판을 해석모델로 설정한다. 해석모델의 기하학적 형상은  $R = 5.0$ ,  $h = 0.1$ 으로 그림 5와 같고, 재료 물성치는  $E = 10^3$ ,  $\nu = 0.3$ 이다. 하중조건은 중앙점(C)에 집중하중  $P = 1.0$ 을 재하시켰다. 대칭성을 고려하여 1/4만 모델링하여 해석을 수행하였다.

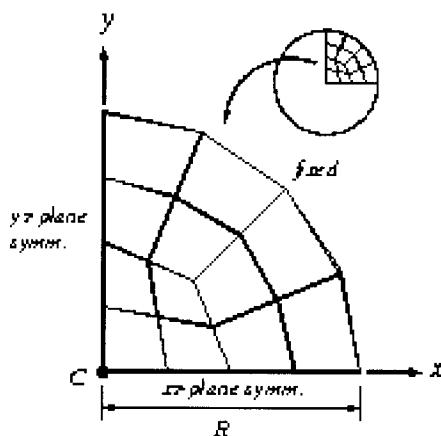


그림 5. 고정지지된 원형판

표 2. 고정지지된 원형판의 수치해석결과 비교

Theory	Number of Elements		
	3	12	48
Ref.	5.4312		
MAR-8P	4.6266	5.2857	5.4234
NMS-4P	4.3880	5.2060	5.3390
MITC4	4.2875	5.1700	5.3773
EAS7-AR	4.3876	5.2061	5.3885
EAS4-SR	2.8911	4.7373	5.3336
I4EASP	5.2004	5.2264	5.3997

표 2는 요소수에 따른 원형판 중앙점의 수직처짐에 대한 수렴도를 비교하여 나타낸 것이다. NMS-4P(Choi et al., 1999)는

비적합 변위모드  $N_1 = 1 - \xi^2$  와  $N_2 = 1 - \eta^2$  를 갖는 4절점 평판쉘(flat shell) 요소이다. 본 연구에서 제시한 I4EASP는 요소수가 3개일 경우에도 96%의 정확도를 나타내고 있어 적은 요소수에도 빠른 수렴성을 보인다. EAS4-SR은 경사판과는 달리 요소가 임의의 형상일 경우 대체 변형률장을 갖는 MITC4 보다 결과가 좋지 않으며, 추가변형률에 가정된 전단변형률장을 혼합한 EAS7-AR은 MITC4와 유사한 거동을 보인다. MAR-8P는 개선된 8절점 평판요소로써 보다 많은 절점수를 가지므로 기준해에 보다 근접함을 당연한 결과이다.

### 5.3 정사각형 적층판

등방성이 아닌 임의의 보강각도를 갖는 각 층을 적층시킨 적층판에서 I4EASP의 성능을 평가한다. 우선, 정사각형 복합적층판에 대해 요소분할이 불규칙적이고 판의 두께가 얇아지는 경우의 처짐을 비교함으로써, 해의 수렴성 및 전단감김현상 여부를 실험하고자 한다. 해석모델은 그림 6과 같이  $a = 10 m$  인 단순지지된 정사각형 판으로, 등분포 하중  $q = 100.0 N/m^2$  을 재하시키고 두께  $h$  를 변화시켜 해석하였다.

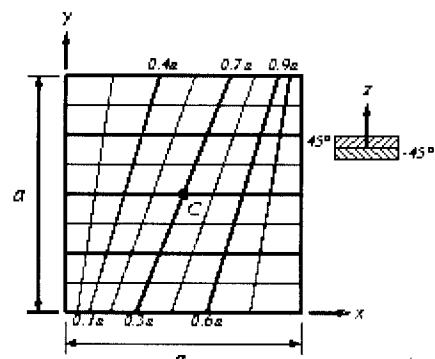


그림 6. 고정지지된 정사각형판

복합적층구조에서 크로스-플라이가 아닌 임의의 보강각도로 역대칭 앵글-플라이 적층시 연계강성  $B_{ij}$  으로 인하여 비

표 3. 고정지지된 정사각형 복합적층판의 수치해석결과 비교 ( $[-45/45]$ ,  $\bar{w} = 100 E_2 h^3 w / q_0 a^4$ )

$a/h$	MAR-8P		MITC4		I4EASP	
	4x4	8x8	4x4	8x8	4x4	8x8
25	3.4341	3.3943	3.2008	3.3680	3.4258	3.4226
50	3.1221	3.0880	2.9200	3.0615	3.1000	3.1036
100	3.0262	3.0043	2.8388	2.9797	3.0059	3.0162
200	2.9974	2.9822	2.8004	2.9588	2.9704	2.9932
500	2.9860	2.9758	2.7490	2.9529	2.9194	2.9866
1000	2.9770	2.9748	2.7254	2.9519	2.8796	2.9857

등방성 성질을 나타낸다. 또한 면내강성과 휨강성이 연계되면서 등방성판에서는 발생하지 않는 면내변위가 발생한다. 따라서 본 연구에서 제시한 I4EASP 유한요소의 비등방성 구조에 대한 적용가능성 및 그에 따른 해의 정확성을 평가한다. 적용한 재료의 물성치는 다음과 같으며, 적층조건은 역대칭 앵글-플라이 [-45/45]로 설정하였다.

$$E_2 = 1.0 \times 10^6 \text{ N/m}^2, E_1/E_2 = 40.0$$

$$G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5, G_{23}/E_2 = 0.4$$

$$\nu_{12} = 0.25$$

표 3은 그림 6에 나타낸 정사각형 복합적층판의 중앙점(C)의 처짐을 무차원화( $\bar{w}$ )하여 나타낸 것이다. 선택적인 감자적분을 수행하여 전단감김현상을 제거하고자 한 요소는 꼭두께비가 어느 한계이상에서는 전단감김현상을 피할 수가 없다(천경식 등, 2004). 대체 변형률장을 갖는 MITC4는 두께가 매우 얇고, 요소분할이 적은(4x4) 경우 처짐이 MAR-8P와 비교하여 작게 발생하였지만 I4EASP는 상당히 안정적인 거동을 보이고 있다. 즉, 불규칙한 요소와 적은 요소수에도 수렴성이 훨씬 개선됨을 알 수 있다. 또한 전반적인 결과비교를 통하여 복합적층판으로의 적용 가능성을 파악할 수 있었다.

다음은 면내변위  $\bar{u}$ 와  $\bar{v}$ 에 대해 이중 삼각함수를 이용하여 구한 해석적인 해(analytical solution)를 기준으로 MITC4, EAS7-AR 그리고 본 연구에서 제시한 I4EASP의 해석결과를 비교하고자 한다. 비교대상시 적용한 해석모델은 그림 7과 같이 단순지지된 정사각형 적층판으로 그림 6과 비교하여 요소형상은 마주보는 변이 서로 평행하지 않은 일반적인 사변형이다. 적용한 재료물성치는 다음과 같으며, 적층조건은 역대칭 크로스-플라이 [0/90]이다.

$$E_2 = 1.0 \times 10^6 \text{ N/m}^2, E_1/E_2 = 25.0$$

$$G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5, G_{23}/E_2 = 0.2$$

$$\nu_{12} = 0.25$$

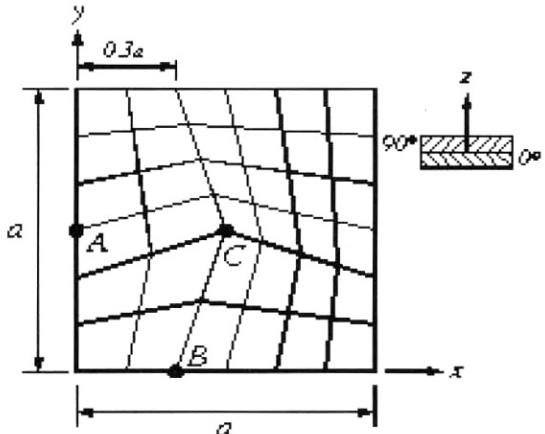


그림 7. 단순지지된 정사각형판

표 4에서 수직처짐  $\bar{w}$ 는 C점, 면내변위  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ 는 A와 B 점에 무차원화하여 나타낸 것이며, (·)은 요소를 일정한 정방향으로 분할한 경우의 변위를 의미한다. 요소분할 6x6과 수직처짐  $w_c$ 에 한하여 각 이론에 따른 결과치를 해석적인 해와 비교해보면 MITC4, EAS7-AR, I4EASP는 임의의 요소형상을 갖는 경우 각각 3.13%, 2.72%, 2.35%, 동일한 크기의 정방형 요소를 갖는 경우 각각 1.23%, 0.94%, 0.55%의 오차를 갖는다. 면내변위에서 I4EASP와 EAS7-AR은 유사한 거동을 보인다. 그 이유는 동일한 추가면내변형률을 적용시켰기 때문이다. 결과적으로 유한요소개발 시 많은 기준이 되어온 MITC4와 비교하여 많은 개선점을 나타내고 있다.

#### 5.4 이종의 재료로 적층된 캔틸레버 경시판

표 4. 단순지지된 정사각형 복합적층판의 수치해석결과 비교  
([0/90],  $\bar{w} = 100 E_2 h^3 w / q_0 a^4$ ,  $\bar{u} = 100 E_2 h^2 u / q_0 a^3$ ,  $\bar{v} = 100 E_2 h^2 v / q_0 a^3$ )

Theory	$\bar{w}_c$		$\bar{u}_A$		$\bar{v}_B$	
	6x6	12x12	6x6	12x12	6x6	12x12
Analytical solution	1.9468863		0.1294059		0.1137818	
MITC4	1.8858 (1.9229)	1.9330 (1.9411)	0.1233 (0.1284)	0.1280 (0.1292)	0.1102 (0.1126)	0.1129 (0.1135)
EAS7-AR	1.8938 (1.9286)	1.9349 (1.9425)	0.1245 (0.1289)	0.1282 (0.1293)	0.1110 (0.1131)	0.1133 (0.1136)
I4EASP	1.9011 (1.9361)	1.9360 (1.9441)	0.1245 (0.1289)	0.1282 (0.1293)	0.1112 (0.1132)	0.1133 (0.1136)

이종의 재료 즉, 알루미늄(AL)과 복합재료로 구성된 캔틸레버 경사판을 해석모델로 설정하였다. 해석모델의 기하학적 형상은 그림 8과 같이  $L = 1.0\text{ m}$ ,  $h = 0.01\text{ m}$ 이고 경사 각은  $45^\circ$ 이다. 적용한 재료 물성치 및 각 재료의 두께는 다음과 같으며, 적층조건은 [AL/0/AL/0/AL]이다. 등분포 하중  $f_o = 100\text{ N/m}^2$ 을 받는 경사판의 자유단(C, D)에서의 처짐을 표 5에 비교하였다.

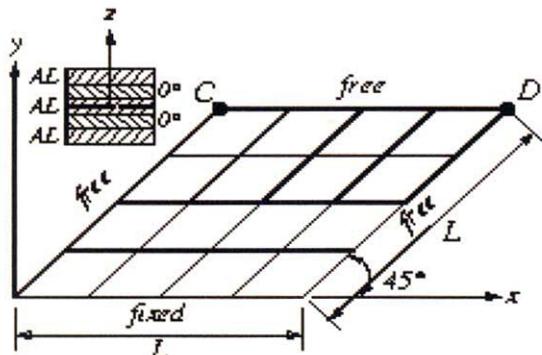


그림 8. 이종의 재료로 적층된 캔틸레버 경사판

표 5. 캔틸레버 복합재료 경사판의 수치해석결과 비교

Theory	Mesh	$w_C \times 10^{-3}$	$w_D \times 10^{-3}$
QTP9	4×4	0.5252	1.2965
	8×8	0.5271	1.3078
	10×10	0.5275	1.3096
MITC4	4×4	0.4973	1.2694
	8×8	0.5179	1.2897
	10×10	0.5209	1.2952
EAS7-AR	4×4	0.5084	1.3297
	8×8	0.5222	1.3132
	10×10	0.5239	1.3124
I4EASP	4×4	0.5145	1.3359
	8×8	0.5249	1.3173
	10×10	0.5266	1.3164

표에서 QTP9(Donea and Lamain, 1987)는 Jacobian 행렬을 이용하여 대체 전단변형률을 도입한 9절점 요소이다. 이 요소는 보다 많은 절점수를 가지며, 일반적으로 4절점 요소보다 우수한 것으로 알려져 있으므로 기준해로 삼는다. I4EASP는 QTP9과 비교하여 C, D점에서 각각 0.52%, 0.17%의 차이를 보인반면, MITC4는 1.10%, 1.25%로 보다 큰 차이를 나타내었다. 본 연구에서 제시한 추가 전단변형률을 포함한 I4EASP는 기존의 EAS 유한요소의 성능을 개선시켜 보다 높은 정확도

를 갖는다. 그림 9는 캔틸레버 경사판의 처짐형상을 나타낸 것이다.

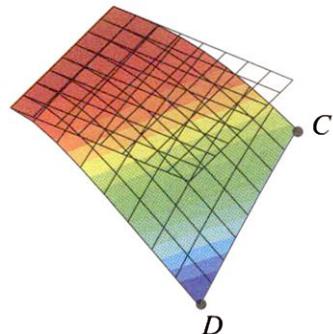


그림 9. 캔틸레버 경사판의 처짐형상

## 6. 결 론

본 연구에서는 7개의 내부인자를 갖는 추가변형률 EAS7 (Andelfinger and Ramm, 1993)은 동일하게 적용하고, 전단감김현상을 제거하고 흔 거동을 개선시키기 위해 새로운 형태의 추가 전단변형률을 제시하였다. 등방성 및 복합적층판 해석을 위한 개선된 EAS 평판 흔요소를 개발하였으며, I4EASP라 명하였다.

등방성 경사판 및 원형판, 복합적층판을 해석모델로 설정하여 그에 따른 폭-두께비, 하중조건, 요소분할 등의 매개변수 변화에 따라 해석하였다. 기준에 발표된 유한요소(EAS4-SR, MITC4, EAS7-AR)와 비교하여 I4EASP는 적은 요소수에서도 빠른 수렴성을 보였으며, 두께가 매우 얇은 경우에도 전단감김현상을 발생하지 않았다. 요소형상이 왜곡된 경우 보다 정확한 결과를 얻을 수 있었다. 결과적으로, 본 연구에서 개발한 개선된 4절점 평판 흔요소(I4EASP)는 강재, 콘크리트로 구성된 등방성 판은 물론 복합재료 적층판 해석에도 적용이 가능하다.

## 참 고 문 헌

- 박대용, 천경식, 장석윤 (2003) 복합적층판 해석을 위한 대체전단변형 및 비적합 등매개변수 4절점 평판요소, 대한토목학회 논문집, 제23권 6A호, pp.1183-1192.
- 박원태, 천경식, 손병직 (2004) EAS 유한요소-직접적분법을 이용한 복합적층 곡선패널의 강제진동응답, 한국구조물진단학회지, 제8권 2호, pp.247-258.
- 여승태 (2000), 추가변형률 성능개선을 위한 연구, 한국과학기술원 박사학위논문.
- 천경식, 임성순, 장석윤 (2004) 등방성 및 복합적층판 해석

- 을 위한 개선된 8절점 Serendipity 유한요소, 대한토목학회 논문집, 제24권 2A호, pp.401-407.
- 천경식, 장석윤 (2003) 복합재료 교량 바닥판의 주행속도에 따른 동적응답 평가, 한국복합재료학회지, 제16권 6호, pp.23-32.
- 천경식, 지효선, 장석윤 (2004) 이동하중을 받는 복합재료 적층판의 동적거동특성, 대한토목학회 논문집, 제24권 1A호, pp.125-134.
- Andelfinger, U. and Ramm, E. (1993), EAS-element for two-dimensional, three-dimensional plate and shell structures and their equivalence to HR-elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.36, pp.1311-1337.
- Bathe K.J. and Dvorkin E.N. (1986) A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.22, pp. 697-722.
- Choi, C.K., Lee, P.S. and Park, Y.M. (1999) Defect-free 4-node flat shell element: NMS-4F element, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.8(2), pp.207-231.
- Choi, C.K., Chung, K.Y. and Lee, T.Y. (2001) A direct modification method for strains due to non-conforming modes, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.11, pp.325-340.
- Donea, J. and Lamine, G. (1987) A modified representation of transverse shear in  $C^0$  quadrilateral plate elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.63, pp.183-207.
- Katili, I. (1993), A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields-Part 2: An extended DKQ element for thick-plate bending analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.36, pp.1885-1908.
- Korelc, J and Wriggers, P. (1996) An efficient 3D enhanced strain element with Taylor expansion of the shape functions, *Computational Mechanics*,

- Vol.19, pp.30-40.
- MacNeal, R.H. and Harder R. (1985), A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.1, pp.3-20.
- Morley, L.S.D. (1963), *Skew plates and Structures*, Pergamon Press, Oxford.
- Piltner, R. and Taylor, R.L. (1995) A quadrilateral mixed finite element with two enhanced strain modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.38, pp.1783-1808.
- Pian, T.H.H. and Sumihara, K. (1984) Rational approach for assumed stress finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.20, pp.1685-1695.
- Simo, J.C. and Rifai, M.S. (1990) A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.29, pp.1595-1638.
- Taylor, R.L., Beresford, P.J. and Wilson, E.L. (1976) A non-conforming element for stress analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.10, pp.1211-1219.
- Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty W.P. and Ghaboussi, J. (1973) Incompatible displacement models, in Fenves S.J. et al.(eds.), *Numerical and Computer Models in Structural Mechanics*, Academic Press, New York, 1973.
- Yeo, S.T. and Lee, B.C. (1996) Equivalence between enhanced assumed strain method and assumed stress hybrid method based on the Hellinger-Reissner principle, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.39, pp.3083-3099.
- Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (1989) The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems, Vol.1, McGraw-Hill, New York.

(접수일자 : 2004. 1. 19 / 심사일 2004. 2. 25 /  
심사완료일 2004. 5. 28)