

# 미분변환법과 일반화 미분구적법을 이용한 가변단면 원호 아치의 진동 해석

Vibration Analysis for Circular Arches with Variable Cross-section by using  
Differential Transformation and Generalized Differential Quadrature

신 영 재<sup>1)</sup> · 권 경 문<sup>2)</sup> · 윤 종 학<sup>3)</sup> · 유 영 찬<sup>4)</sup> · 이 주 형<sup>5)</sup>

*Shin, Young Jae Kwon, Kyung Mun Yun, Jong Hak Yoo, Yeong Chan Lee, Ju Hyung*

요 약 : 구조물과 같은 아치의 진동해석은 많은 산업분야에서 다양하게 적용되기 때문에 공학적문제에 중요한 주제이다. 특히 변화하는 단면형상을 가지는 아치는 질량이나 강도를 최적화 하거나 특별한 구조물이나 요구조건들을 만족하기 위해서 폭넓게 사용되어 진다. 최근에는 일반화 미분구적법(GDQM)이나 미분변환법(DTM)은 각각 Shu와 Zou에 의해서 제안되어 졌다. 연구에서는 변화하는 단면형상을 가지는 아치의 진동해석에 일반화 미분구적법과 미분변환법을 적용하였다. 변화하는 단면형상을 가지는 아치에 대하여 지배방정식이 유도되어졌으며, 미분변환과 일반화 미분구적법의 개념이 간단히 소개되었다. 변화하는 단면형상을 가지는 아치의 무차원화된 고유진동수가 다양한 경계조건에 대해서 구해졌으며, 이러한 방법들에 의해서 얻어지는 결과들은 선행연구와 비교 되어졌다. 일반화 미분구적법과 미분변환법은 변화하는 단면형상을 가지는 아치의 진동문제를 해석함에 있어서 빠른 수렴, 정확도, 효율성, 유효성을 보인다.

ABSTRACT : The vibration analysis of the circular arch as a member of a structure has been an important subject of mechanics due to its various applications to many industrial fields. In particular, circular arches with variable cross section are widely used to optimize the distribution of weight and strength and to satisfy special architectural and functional requirements. The Generalized Differential Quadrature Method (GDQM) and Differential Transformation Method (DTM) were recently proposed by Shu and Zou, respectively. In this study, GDQM and DTM were applied to the vibration analysis of circular arches with variable cross section. The governing equations of motion for circular arches with variable cross section were derived. The concepts of Differential Transformation and Generalized Differential Quadrature were briefly introduced. The non-dimensionless natural frequencies of circular arches with variable cross section were obtained for various boundary conditions. The results obtained using these methods were compared with those of previous works. GDQM and DTM showed fast convergence, accuracy, efficiency, and validity in solving the vibration problem of circular arches with variable cross section.

핵심용어 : 비확장 조건, 미분변환법, 미분구적법

KEYWORDS : inextensible condition, Differential Transformation Method, Generalized Differential Quadrature Method

## 1. 서론

아치(arch)는 구조적으로 매우 이상적이어서 토목, 건축, 기계, 선박, 항공 등의 각종 구조물에 있어서 기본 단위 구조로 사용되기 때문에 아치구조의 진동에 대한 연구가 요구된

다. 특히 구조물의 고유 특성 중의 하나인 자유진동(free vibration)을 해석하는 것은 진동 문제 중에서도 가장 먼저 선행되어야 할 연구 과제이다.

일반적으로 회전관성과 전단변형의 영향을 무시한 베르누이-오일러 보(Bernoulli-Euler Beam)이론에서 아치축의

- 1) 정회원, 안동대학교 기계공학부 교수  
(Tel. 051-510-2350, Fax. 051-513-9596, E-mail : yjshin@andong.ac.kr)
- 2) DAEWOO POWERTRAIN(주) (autotm@autotm.co.kr)
- 3) 정회원, 안동대학교 대학원 박사과정(yun1121@anuis.andong.ac.kr)
- 4) 정회원, 안동대학교 건축공학부 조교수(ycyoo@andong.ac.kr)
- 5) 서울정수기능대학(7895661@hanmail.net)

본 논문에 대한 토의를 2004년 8월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

비확장 조건(inextensible condition)을 적용한 일정 단면 및 가변 단면 원호 아치에 대한 자유진동을 해석한 연구들이 많다.

Laura(1988)는 선형 가변단면 및 집중 질량을 갖는 아치 구조물을 진동해석 하였으며, Gutierrez(1989)는 다양한 형태의 가변 단면 아치에 대한 진동해석을 하였다. 이들은 리츠 방법(Ritz method)에 의한 자유진동을 해석하여, 제 1고유 진동수만을 계산하였다. Auciello(1994)는 셀 이산법(Cells Discretization Method), 유한요소법(Finite Element Method), 갤러킨 방법(Galerkin Method) 및 리츠방법등 다양한 수치해석방법을 통하여 가변단면을 갖는 원호아치에 대한 진동해석을 수행하여 여러 수치해석방법들을 비교, 고찰 하였다. Tong(1998)는 가변단면 원호 아치에 대한 진동해석을 유한개의 요소로 분할하여 해석적인 해를 유도하였다.

지금까지의 아치관련 연구들은 유한요소법, 리츠방법, 셀 이산법, 갤러킨 방법 등을 사용하였으나 이러한 수치해석 방법은 복잡한 수식을 사용하고, 정확한 해를 구하기 위해 많은 계산 시간을 필요로 한다.

따라서 간단한 수식관계에 의한 빠른 수렴성을 갖는 수치 해석 방법의 요구에 부응하여 새로운 수치 해석 방법으로 미분변환법(Differential Transformation Method)과 일반화 미분구적법(Generalized Differential Quadrature Method)이 개발되었다.

본 연구는 미분변환법과 일반화 미분구적법을 이용하여 가변단면을 갖는 원호아치의 자유진동 해석이 연구목적이다. 이를 위하여 가변단면 원호아치의 자유진동을 지배하는 지배미분방정식을 유도하였으며, 다양한 경계조건하에서 미분변환법과 일반화 미분구적법을 적용하여 수치해석을 수행하였다. 또한 기존의 수치해석결과와 비교하여 미분변환법과 일반화 미분구적법의 타당성을 검증하였으며, 가변단면 원호아치의 자유진동해석에 있어 미분변환법과 일반화 미분구적법의 특성을 고찰 하였다.

## 2. 지배 방정식

그림 1은 원호 아치의 반경이  $R$  이고, 원호 아치의 정점에서 단면 2차 모멘트 및 단면적이  $I_0, A_0$  인 임의의 위치에서 부재의 열림각  $\theta$  를 갖는 가변단면 원호 아치의 기하학적 형상을 나타내며  $w, v, \phi$  는 원호아치의 열림각이  $\theta$  인 임의의 위치에서 접선방향 변위, 곡률방향 변위 및 단면 회전각등을 표시한다.

그림 2는 자유 진동하는 원호 아치의 미소요소  $\theta$  에 작용하는

응력들을 나타낸 것으로  $M, N$  및  $T$  는 각각 굽힘 모멘트, 축방향력, 전단력을 나타낸다.

미소요소의 변위  $w$  에 관한 가변단면 원호 아치의 자유진동을 지배하는 운동방정식은 식 (1)과 같이 유도되며 미소요소에 작용하는 전단력 및 축방향력은 식 (2)와 식 (3)으로 나타낼 수 있다. (4)

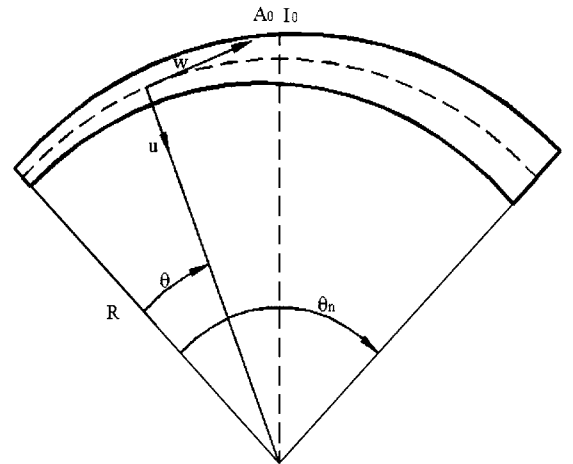


그림 1. 변화하는 단면적을 가지는 원형아치

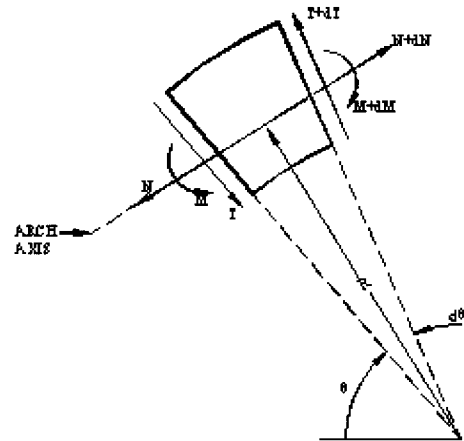


그림 2. 원형아치 상의 하중

$$\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left[ EI(\theta) \left( \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ EI(\theta) \left( \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] + R^4 \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \rho \bar{A}(\theta) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial t^2} \right] - \rho \bar{A}(\theta) R^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$T(\theta, t) = -\frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ EI(\theta) \left( \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2)$$

$$N(\theta, t) = -\frac{\partial T(\theta, t)}{\partial \theta} + \rho \bar{A}(\theta) R \frac{\partial^2 u(\theta, t)}{\partial t^2}$$

$$= -\frac{1}{R^3} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[ E \bar{I}(\theta) \left( \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] + \rho \bar{A}(\theta) R \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial t^2} \quad (3)$$

상기의 지배방정식에서 사용된 단면은 단면 폭은 일정하고, 높이가 변화하는 경우를 채택하였다. 원호 아치의 정점에서의 단면 폭을  $b$  라 하고 높이를  $h$  라 하면 단면적은  $A_0 = bh$  와 같이 표현할 수 있으며 단면 2차 모멘트는  $I_0 = bh^3 / 12$  와 같이 나타낼 수 있다. 아치의 열림각  $\theta$  에 대한 높이 변화의 함수  $f$  를 도입하여 임의의  $\theta$  에 대한 단면 변화  $\bar{A}(\theta)$  및 단면 2차 모멘트의 변화  $\bar{I}(\theta)$  는

$$\bar{A}(\theta) = A_0 f = A_0 \sum_{i=0}^r f_i \theta^i$$

$$\bar{I}(\theta) = I_0 q = I_0 \sum_{i=0}^p q_i \theta^i \quad (4)$$

와 같이 표현 할 수 있다. 여기서  $r, p$  는 각각  $\bar{A}(\theta), \bar{I}(\theta)$  를 다항식으로 표현하는 차수이다.

식(4)는 임의의 가변단면에도 적용할 수 있으며, 단면변화 함수  $f$  (arch cross section variation function)와 단면 2차 모멘트의 변화 함수  $q$  의 관계식은  $q = f^3$  같다.

가변단면 원호아치의 진동이 조화진동을 한다고 가정하면

$$w(\theta, t) = W(\theta) e^{i\omega t} \quad (5)$$

와 같이 표현할 수 있으며, 식 (5)을 식 (1)에 대입하여  $e^{i\omega t}$  를 소거하면 가변단면 원호 아치의 운동방정식은 다음 식으로 유도된다.

$$\frac{d^3}{d\theta^3} \left[ q \left( \frac{d^3 W}{d\theta^3} + \frac{dW}{d\theta} \right) \right] + \frac{d}{d\theta} \left[ q \left( \frac{d^3 W}{d\theta^3} + \frac{dW}{d\theta} \right) \right]$$

$$+ \frac{d}{d\theta} \left[ -\frac{\rho A_0 R^4}{EI_0} \omega^2 f \frac{dW}{d\theta} \right] + \frac{\rho A_0 R^4}{EI_0} \omega^2 f W = 0 \quad (6)$$

여기서,  $\omega$  는 원호 아치의 고유각 진동수 ( $rad/sec$ ) 이다.

상기의 지배 미분방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수를 도입하였다.

$$X = \frac{\theta}{\theta_n}$$

여기서,  $\theta_n$  은 아치의 열림각을 나타낸다.

무차원 변수를 이용하여 가변단면 원호 아치의 지배방정식을 다시 쓰면 식 (7)과 같은 무차원 지배 방정식이 유도된다.

$$\frac{d^3}{\theta_n^3 dX^3} \left[ q(X) \left( \frac{d^3 W}{\theta_n^3 dX^3} + \frac{dW}{\theta_n d\theta} \right) \right]$$

$$+ \frac{d}{\theta_n dX} \left[ q(X) \left( \frac{d^3 W}{\theta_n^3 dX^3} + \frac{dW}{\theta_n dX} \right) \right]$$

$$+ \frac{d}{\theta_n dX} \left[ -\lambda^2 f(X) \frac{dW}{\theta_n dX} \right] + \lambda^2 f(X) W = 0 \quad (7)$$

여기서  $\lambda = \sqrt{\frac{\rho A_0 R^4}{EI_0}} \omega$  는 무차원 고유진동수이다.

본 연구에서는 가변단면 원호 아치의 경계조건으로 고정 (clamped) - 고정 (clamped), 힌지 (hinged) - 힌지 (hinged)의 경계조건을 고려하였다. 고정단 및 힌지단에서의 경계조건식은 다음과 같다.

$$\text{고정단} : w = 0, w' = 0, \psi = 0 \text{ at } X = 0, 1 \quad (8)$$

$$\text{힌지단} : w = 0, w' = 0, M = 0 \text{ at } X = 0, 1 \quad (9)$$

경계조건식에서 단면회전각  $\Psi$  와 굽힘모멘트  $M$  에 대한 수학적 표현은 식 (10)에서 식 (11)과 같이 표시된다.

$$\psi = \frac{1}{R} \left( \frac{d^2 w}{\theta_n^2 dX^2} + w \right) \quad (10)$$

$$M = -\frac{EI_0 q}{R^2} \left( \frac{d^3 w}{\theta_n^3 dX^3} + \frac{dw}{\theta dX} \right) \quad (11)$$

### 3. 미분변환법과 일반화 미분구적법

#### 3.1 미분변환법

미분변환법은 테일러 시리즈(Taylor series expansion)에 기본을 두었으며, 기본연산에 의한 변환 관계식으로부터 순환관계식을 유도하여 해를 구하며, 선형과 비선형 문제의 해를 구하는데 유용한 방법이다.

임의의 원함수(original function)에 대한 미분 변환은 식 (12)과 같이 정의 된다.

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (12)$$

여기서  $Y(k)$ 를  $T$ -function 이라 한다.

$Y(k)$ 의 미분역변환은 (Differential Inverse Transformation)은 식 (13)와 같이 정의 된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (13)$$

여기서 미분변환의 정의 식 (12)를 미분역변환 식 (13)에 대입하여 다시 쓰면 원함수  $y(x)$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[ \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (14)$$

표 1. 원함수와 미분변환 함수의 관계

원 함수	변 환 함수
$w(x) = y(x) \pm z(x)$	$W(k) = Y(k) \pm Z(k)$
$z(x) = \lambda y(x)$	$Z(k) = \lambda Y(k)$
$w(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}$	$W(k) = (k+1)(k+2) \cdots (k+n)Y(k+n)$
$w(x) = y(x)z(x)$	$W(k) = \sum_{l=0}^k Y(l)Z(k-l)$
$w(x) = x^m$	$W(k) = \begin{matrix} 1 & k = m \\ \delta(k-m) & \text{at } 0 & k \neq m \end{matrix}$
$w(x) = \sin(\lambda x)$	$W(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$

상기식 (14)에서 미분변환은 테일러 시리즈에서 유래되었다는 것을 알 수 있다.

상기의 정의로부터 표 1에 미분 변환에 관한 기본적인 연산의 예를 나타내었다. 표 1과 식(12)-(14)에서 알 수 있듯이 미분변환은 간단한 변환 관계식으로 수치해석에 적용될 수 있다.

실제의 적용에 있어서는  $y(k)$ 는 근사적으로 유한개의 항만을 고려한 식 (15)와 같이 표시된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^n x^k Y(k) \quad (15)$$

여기서  $n$ 은 자연수로서 해의 수렴도에 의해 결정되어진다.

#### 3.2 일반화 미분구적법

일반화 미분구적법은 주어진 이산점에서 공간변수에 관한 상미분방정식 또는 편미분방정식이 공간영역에서 모든 이산점에 대한 함수 값을 가중 선형 합으로서 표현할 수 있는 것에 기초한다.

격자의  $i$ 번째 이산점에서 함수  $u(x, t)$ 의  $x$ 에 관한 1차 미분은 전형적인 integral quadrature의 개념에 따라, Bellman(1972)등이 식 (16)와 같이 근사화시켰다.

$$u_x(x_i, t) = \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(n)} u(x_j, y) \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

여기서  $u_x(x_i, t)$ 는  $x_i$  점에서  $x$ 에 관한  $u(x, t)$ 의  $n$ 차 미분이며,  $N$ 은 이산 grid 개수이다.  $c_{ij}^{(n)}$ 은 가중 계수 (weighting factor)이다.

일반화 미분구적방법에서 1차 미분에 대한 가중계수는 다음 식과 같다.

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)} \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

but  $i \neq j$  (17)

$$c_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}^{(1)} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \text{for } i = j \quad (18)$$

여기서  $M^{(1)}(x_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^N (x_i - x_j)$  이다.

2차 또는 고차 미분함수의 가중계수는 식 (19) 및 (20)에 나타난  $u_x^{(m)}(x_i, t)$  에서 m차 가중계수  $c_{ij}^{(m)}$  의 순환관계식에 의해서 구할 수 있다.

$$c_{ij}^{(m)} = m \left( c_{ii}^{(m-1)} c_{ij}^{(1)} - \frac{c_{ij}^{(m-1)}}{x_i - x_j} \right) \text{ for } i \neq j, \quad m = 2, 3, \Lambda, N-1, \quad i, j = 1, 2, \Lambda, N \quad (19)$$

$$c_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}^{(m)} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

본 장에서 설명한 것과 같이 일반화 미분구적법의 가중계수 결정 식들은 매우 간결하고 단순하며, 그것의 순환특성 때문에 공식화하고, 프로그래밍하기 매우 쉽다는 것을 알 수 있다.

#### 4. 수치해석 결과 및 고찰

##### 4.1 미분변환법

미분변환법에 의한 수치해석은 미분변환된 운동방정식과 각 경계조건식으로 구성된 다음식과 같은 매트릭스방정식에 기초하여 수행된다.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(0) \\ U(1) \\ \vdots \\ U(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

상기 방정식의 해인  $U(0), U(1), \dots, U(n)$  의 근이 0이 아닌 근을 가지기 위해서는 상기식의 행렬식이 0가 되어야 한다.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = 0 \quad (22)$$

상기 식으로부터 원호 아치에 대한 고유진동수 방정식을 구할 수 있다.

##### 4.2 일반화 미분구적법

일반화 미분구적법에 의한 수치해석은 변환된 운동방정식으로부터 다음식과 같은 내부영역(interior portion)과 경계영역(boundary portion)으로 나눈 행렬 형태로 표현할 수 있다.

$$[A_{IB}] \cdot \{W_B\} + [A_{II}] \cdot \{W_I\} = \lambda^2 \cdot \{W_I\} \quad (23)$$

여기서  $[A_{IB}]$ ,  $[A_{II}]$ 는 지배 방정식에서 경계 영역 및 내부 영역의 계수 행렬이다.

변환된 경계조건식을 행렬 형태로 표현하면

$$[A_{BB}] \cdot \{W_B\} + [A_{BI}] \cdot \{W_I\} = 0 \quad (24)$$

와 같이 나타낼 수 있다.

여기서  $[A_{BB}]$ ,  $[A_{BI}]$ 는 경계조건식에서 경계 영역 및 내부 영역의 계수 행렬이다.

식 (24)을 식 (23)에 대입하여 다시 쓰면 아치의 진동해석 문제는 고유값을 구하는 문제가 된다.

$$([A_{II}] - [A_{IB}] \cdot [A_{BB}]^{-1} \cdot [A_{BI}]) \cdot \{W_I\} = \lambda^2 \cdot \{W_I\} \quad (25)$$

본 수치해석에 사용된 격자함수(grid distribution)는 일반화 미분구적법에 많이 쓰이는 불균일 격자인 Chebyshev 다항식의 근을 사용하였으며 식 (26)에 표시하였다.

$$X_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{\pi(i-1)}{(N-1)} \right) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (26)$$

##### 4.3 가변단면을 갖는 원호 아치

###### 4.3.1 선형 가변단면

선형 가변단면을 갖는 원호 아치는 단면폭은 일정하고 단면 높이가 선형적으로 변화하는 경우로서 가변단면함수는 다음식과 같이 표현할 수 있다.

$$f(X) = 1 + \alpha(2X - 1) \text{ for } 0 \leq X \leq 1 \quad (27)$$

여기서  $\alpha$  는 단면 파라메타이다.

선형 가변단면을 갖는 원호 아치에 대한 수치해석은 고정 - 고정, 힌지 - 힌지, 고정 - 힌지의 3가지 경계조건에 대해 수행하였으며, 무차원 고유진동수는 유효자리수를 5개로 정하여 수치해석결과를 산출하였으며, 참고 문헌과 비교 고찰하였다.

표 2~3은 고정-고정, 힌지-힌지의 경계조건인 경우  $\alpha$  값이 0.1인 경우의 선형 가변단면변화에 따른 수치해석결과를 나타내었다. 미분변환법에 의한 무차원 고유진동수와 일반화 미분구적법에 의한 무차원 고유진동수의 값이 일치함을 알 수 있으며, 이들 값은 레일리 - 리츠법(Rayleigh-Ritz)과 셀 이산법에 의한 무차원 고유진동수값 보다 크다는 것을 알 수 있다. 이것은 레일리 - 리츠법과 셀 이산법은 항상 하한계의 값을 가지기 때문이다. 그러나 유한 요소법에 의한 결과와 미분변환법과 일반화 미분구적법에 의한 결과가 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

표 2. 연속적으로 변화하는 단면을 가지는 고정-고정 원형 아치의 무차원 기초 진동수:  $f = 1 + \alpha(2X - 1)$

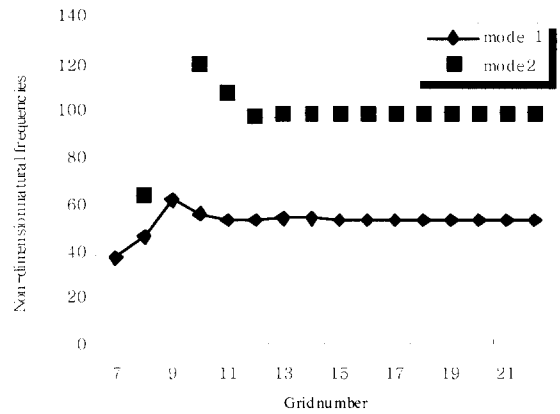
열림각 (degrees)	Methods				
	Ritz <sup>(3)</sup>	FEM <sup>(3)</sup>	CDM <sup>(3)</sup>	DTM	GDQM
$\alpha = 0.1$					
10	1999.9		2000.5	2017.0	2017.0
20	498.33	502.52	499.44	502.30	502.30
30	220.06		220.56	221.82	221.82
40	122.70	123.65	122.97	123.67	123.67
50	77.632		77.813	78.258	78.258
60	53.172	53.674	53.303	53.607	53.607

표 3. 연속적으로 변화하는 단면을 가지는 힌지-힌지 원형 아치의 무차원 기초 진동수:  $f = 1 + \alpha(2X - 1)$

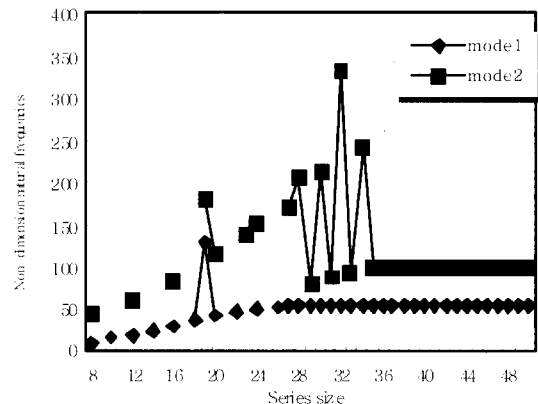
열림각 (degrees)	Methods				
	Ritz(3)	FEM(3)	CDM(3)	DTM	GDQM
$\alpha = 0.1$					
10	1286.5		1287.8	1290.5	1290.5
20	319.09	320.81	320.11	320.76	320.76
30	141.05		140.92	141.20	141.20
40	78.069	78.438	78.220	78.373	78.373
50	49.124		49.218	49.312	49.312
60	33.430	33.621	33.484	33.546	33.546

그림 3은 미분변환법과 일반화된 미분구적법에 의한 무차원 고유진동수의 수렴을 나타내었다. 미분구적법에 의한 해

는 격자수가 비교적 적은 13개에서부터 수렴경향을 보이고 있으며, 격자수가 18개인 경우 수렴을 하였고, 제 1 무차원 고유진동수와 제 2 무차원 고유진동수의 값들이 동시에 수렴하였다.



a) GDQ solution



b) DTM solution

그림 3. 연속적으로 변화하는 단면을 가지는 고정-고정 원형 아치의 무차원 고유 진동수의 수렴 :

$$(\theta = 60^\circ \text{ and } f(X) = 1 + 0.1(2X - 1))$$

일반화 미분구적법에 의한 해는 급수항이 28개 일 때부터 제 1 무차원 고유진동수의 수렴경향을 보이고 있으며, 38개 일 때 완전히 수렴하였다. 제 2 무차원 고유진동수는 약 37개일 때부터 수렴경향을 보이며, 47개 일 때 수렴함을 알 수 있다. 미분변환법은 제 1 무차원 고유진동수가 어느 정도 수렴하면 순차적으로 제 2 무차원 고유진동수가 수렴하는 것으로 급수항을 크게 한다면 고차의 무차원 고유진동수 역시 구할 수 있다. 그러나 일반화 미분구적법은 미분변환법과는 달리 일시에 제 2 무차원 고유진동수까지 쉽게 구할 수 있다.

### 4.3.2 2차 함수 형태의 가변단면

원호 아치의 단면 폭은 일정하고 단면 높이가 2차 함수 형태로 변화하는 경우로서 가변단면함수는 다음과 같다.

$$f(X) = (1 + \alpha(2X - 1))^2 \text{ for } 0 \leq X \leq 1 \quad (28)$$

표 4~5은 고정-고정, 힌지-힌지의 경계조건인 경우  $\alpha$ 값이 0.1에 2차 함수 형태의 가변단면을 갖는 원호 아치의 무차원 고유진동수를 나타내었다. 미분변환법과 일반화 미분구적법에 의한 2차 무차원 고유진동수까지 구한 결과는 두 수치해석방법 모두 일치한다는 것을 알 수 있다

표 4. 연속적으로 변화하는 단면을 가지는 고정-고정 원형 아치의 고유 진동수:

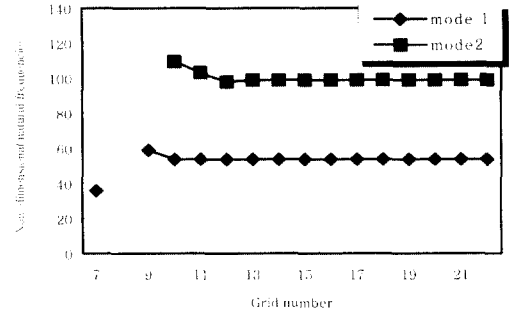
열림각 (degrees)	Methods			
	DTM		GDQM	
	Mode1	Mode2	Mode1	Mode2
$\theta = 0.1$				
10	2012.2	3622.0	2012.2	3622.0
20	501.12	904.18	501.12	904.18
30	221.30	400.88	221.30	400.88
40	123.39	224.73	123.39	224.73
50	78.082	143.20	78.082	143.20
60	53.491	98.920	53.491	98.920

표 5. 연속적으로 변화하는 단면을 가지는 힌지-힌지 원형 아치의 고유 진동수:

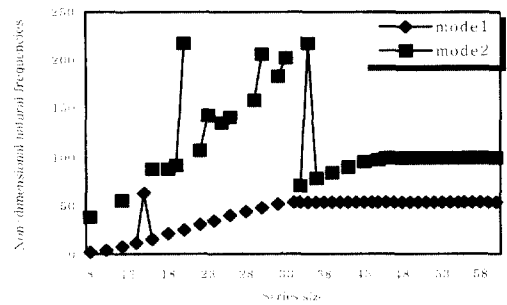
열림각 (degrees)	Methods			
	DTM		GDQM	
	Mode1	Mode2	Mode1	Mode2
$\theta = 0.1$				
10	1285.1	2750.4	1285.1	2750.4
20	319.43	686.25	319.43	686.25
30	140.61	304.00	140.61	304.00
40	78.046	170.22	78.046	170.22
50	49.106	108.30	49.106	108.30
60	33.405	74.671	33.405	74.671

그림 4에는 두 수치해석방법에 의한 무차원 고유진동수의 수렴상태를 나타내었다. 그림 4에 의하면 미분변환법에 의한 제 1 무차원 고유진동수는 급수항이 30개일 때 수렴 경향을 보이고 있으며 38개에 완전 수렴함을 알 수 있다. 제 2 무차원 고유진동수는 급수항이 40개일 때 수렴 경향을 보이며 급수항이 52개일 때 수렴한다는 것을 알 수 있다. 일반화 미분구적법에 의한 수치해석 결과는 격자점의 개수가 10개 일

때 제 1, 2 무차원 고유진동수의 수렴경향을 보이며 격자점의 개수가 18개 일 때 제 1, 2 무차원 고유진동수 모두 수렴하였다.



a) GDQ solution



b) DT solution

그림 4. 연속적으로 변화하는 단면을 가지는 고정-고정 원형 아치의 무차원 고유 진동수의 수렴:

$$((\theta = 60^\circ \text{ and } f(X) = (1 + 0.1(2X - 1))^2)$$

그림 3~4로부터 미분변환법에 의한 수치해석은 가변단면 함수의 차수에 영향을 받아 무차원 고유진동수의 수렴은 가변단면 함수의 차수가 증가 할수록 수렴개수 또한 증가한다는 것을 알 수 있다. 그러나 일반화 미분구적법은 가변단면 함수의 차수에 대한 영향을 거의 받지 않는다는 것을 알 수 있으며, 특정 격자점에서 제 1, 2 무차원 고유진동수가 동시에 수렴한다는 것을 알 수 있다.

### 4.3.2 sine 함수 형태의 가변단면

원호 아치의 단면 폭은 일정하고 단면 높이가 sin함수 형태로 변화하는 경우로서 가변단면함수는 다음과 같다.

$$f(X) = 1 - \alpha(\sin(\pi X - 1)) \text{ for } 0 \leq X \leq 1 \quad (29)$$

표 6~7은 고정-고정, 힌지-힌지의 경계조건인 경우  $\alpha$ 값이 0.1인 경우의 sin함수 형태의 가변단면 원호 아치의 무차원

고유진동수를 나타내었다.

일정단면을 갖는 원호아치에 대한 수치 해석 결과와 비교해서 sin함수 형태의 단면변화는 모두 큰 값을 가졌다. sin함수형태의 단면변화를 갖는 경우에도 미분변환법과 일반화 미분구적법에 의한 무차원 고유진동수는 일치함을 알 수 있다.

표 6. 연속적으로 변화하는 단면을 가지는 고정-고정 원형 아치의 고유 진동수:  $f = 1 - \textcircled{R} (\sin(\frac{1}{4}X - 1))$

열림각 (degrees)	Methods			
	DTM		GDQM	
	Mode1	Mode2	Mode1	Mode2
$\textcircled{R} = 0.1$				
10	2127.1	3816.5	2127.1	3816.5
20	529.82	952.76	529.82	952.76
30	234.04	422.45	234.04	422.45
40	130.53	236.84	130.53	236.84
50	82.635	150.94	82.635	150.94
60	56.638	104.28	56.638	104.28

표 7. 연속적으로 변화하는 단면을 가지는 힌지-힌지 원형 아치의 고유 진동수:  $f = 1 - \textcircled{R} (\sin(\frac{1}{4}X - 1))$

열림각 (degrees)	Methods			
	DTM		GDQM	
	Mode1	Mode2	Mode1	Mode2
$\textcircled{R} = 0.1$				
10	1333.8	2874.8	1333.8	2874.8
20	331.58	717.30	331.58	717.30
30	145.99	317.77	145.99	317.77
40	81.050	177.94	81.050	177.94
50	51.012	113.22	51.012	113.22
60	34.715	78.067	34.715	78.067

### 5. 결 론

본 연구에서는 가변단면 원호 아치에 대한 운동방정식을 유도하였고, 미분변환 방법과 일반화 미분구적법을 이용해 다양한 경계조건에서 가변단면 원호 아치의 수치해석을 수행하였으며, 기존 해석 결과와 비교하여 본 해석의 타당성을 검증하였다.

미분변환 방법과 일반화 미분 구적법을 이용해 가변단면 원호 아치에 대한 수치 해석을 통하여 아래와 같은 결론을 얻었다.

- (1) 미분변환법에 의한 수치해석결과와 일반화 미분구적법에 의한 수치해석 결과가 서로 일치함을 알 수 있

었다.

- (2) 미분변환법은 급수항의 개수가 커짐에 따라 무차원 고유진동수가 빠르게 수렴을 하며, 정확한 결과를 얻을 수 있었다.
- (3) 일반화 미분구적법은 20개 미만의 적은 격자를 사용하여도 정확한 결과를 얻을 수 있었다.
- (4) 무차원 고유진동수의 수렴에 있어 미분변환법에 의한 수치해석은 가변단면 함수의 차수에 영향을 받으나 일반화 미분구적법은 가변단면 함수의 차수에 영향을 받지 않는다는 것을 알았다.
- (5) 미분변환법과 일반화 미분구적법은 기존의 수치해석방법에 비해 적용이 쉽고, 빠른 수렴을 하며, 해가 정확하여 진동문제를 해석하는데 있어 효율적인 방법임을 알 수 있었다.

### 감사의 글

이 논문은 2002학년도 안동대학교 학술연구 조성비에 의하여 연구되었음

### 참 고 문 헌

권경문, 신영재, 유영순(2001) 미분변환에 의한 비균질 보의 진동해석, 한국소음진동공학회 2001년도 추계학술대회 논문집, pp.617-621.

신영철, 신영재(2001) Differential Transformation방법에 의한 가변단면을 갖는 봉의 진동해석, 한국해양공학회 2001년도 춘계학술대회 논문집, pp. 229-233.

ARCHER, R. R.(1960) Small Vibrations ofThin Incomplete Circular Rings, *International Journal of Mechanical Science*, vol. 1, pp. 45-56.

AUCIELLO, N. M and ROSA, M. A.(1994) Free Vibrations of Circular Arches: a Review, *Journal of Sound and Vibration*, Vol 176, No 4, pp. 433-458.

BELLMAN, R.,KASHEF, B. G. and CASTI, J.(1972) Differential Quadrature: a Technique for the Rapid Solution of Nonlinear partial differential equation, *Journal of Computational Physics*, vol. 10, pp. 40-52.

CHEN, C. K and HO, S. H.(1999) Transverse vibration of a rotating twisted Timoshenko Beams under Axial Loading using Differential Transform, *International Journal of Mechanical*



- Sciences*, vol.41, pp. 1339-1356.
- CHEN, C. Kuang and Ho. S. H.(1996) Application of Differential Transformation to Eigenvalue Problems, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 79, pp 173-188.
- CHEN, Cheng. Jen and WU, W. J.(1994) Application of the Taylor Differential Transformation Method to Viscous Damped Vibration of Hard and Soft spring System. *Computer and Structures*, vol. 59, no. 4, pp. 631-639.
- CHIDAMPARAM, P and LEISSA, A. W.(1995) Influence of Centerline Extensibility on the In-Plane Free Vibrations of Loaded Circular Arches, *Journal of Sound and Vibration*, Vol 183, No 5, pp. 779-795.
- GUTIERREZ, R. H and LAURA, P. A.(1989) In-Plane Vibrations of Non-Circular Arcs of Non-Uniform Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*, Vol 129, No 2, pp. 181-200.
- HO, S. H and CHEN, C. K.(1998) Analysis of General elastically end restrained Non-Uniform Beams using Differential Transform, *Applied Mathematical Modeling*, vol. 22, pp. 219-234.
- LAURA, P. A. and VERNIERE DE IRASSAR, P. L.(1988) A Note on In-plane Vibrations of Arch-type Structures of Non-Uniform Cross-Section: the Case of Linearly varying Thickness, *Journal of Sound and Vibration*, Vol 124, No 1, pp. 1-12.
- Malik. Moinuddin and Dang. H. H.(1998) Vibration Analysis of Continuous Systems by Differential Transformation, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 96, pp 17-26.
- NELSON, F. C.(1962) In-plane Vibration of a Simply Supported Circular Ring Segment, *International Journal of Mechanical Science*, vol. 4, pp. 517-527.
- SHU, C.(2000) *Differential Quadrature and its Application in Engineering*, Springer, Inc.
- SHU, C. and DU, H.(1997) Implementation of Clamped and Simply Supported Boundary Condition in the Generalized Differential Quadrature Free Vibration Analysis of Beams and Plate, *International Journal of Solids Structure*, Vol. 34, No 7, pp. 819-835.
- SHU, C.(1996) Free Vibration Analysis of Composite Laminated Conical Shells by Generalized Differential Quadrature, *Journal of Sound and Vibration*, Vol 194, No 4, pp. 587-604.
- SOEDEL, W.(1981) *Vibrations of Shells and Plates*, Marcel Dekker, Inc.
- TONG, X. and MRAD, N. and TABARROK, B.(1998) In-Plane Vibration of Circular Arches with Variable Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*, Vol 212, No 1, pp. 121-140.
- ZHOU, J. K.(1986) *Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits*, Huazhong University Press, Wuhan China(in Chinese).  
(접수일자 : 2003. 12. 10 / 심사일 2003. 12. 29 / 심사완료일 2004. 1. 27)