

수정 GPA법을 이용한 충돌거동의 수치해석에 대한 연구

김용환*, 김용석#

A Study on Numerical Analysis of Impact Behavior by the Modified GPA Method

Yong Hwan Kim* and Yong Seok Kim#

ABSTRACT

A modified generalized particle algorithm, MGPA, was suggested to improve the calculation efficiency of standard SPH Method in numerical analysis of high speed impact behavior. MGPA had a new weight function to reduce computation time. The efficiency of this method was proven through calculation for the sample problems of one dimensional rod impact problem and two dimensional plate impact problem. The MGPA method reduced the calculation error and stress oscillation near the boundaries. The validity of this approach was shown by the comparison with ABAQUS results in two dimensional plate impact problem.

Key Words : Smoothed Particle Hydrodynamics (입자완화 유체동역학), Hydrocode (유체동역학 프로그램), Plate Impact (평판충돌), Particle Method (입자법), Elastic-Plastic Analysis (탄소성 해석)

1. 서론

1977년 Lucy^[1]와 Monaghan^[2]이 수치개념을 창안한 완화입자 유체동역학 (SPH, Smoothed Particle Hydrodynamics)의 해석방법은 요소를 사용하지 않고 라그랑지(Lagrange) 좌표계에서 속도나 응력, 밀도와 같은 물리량들을 독특한 커널근사법을 사용하여 외연적 방법으로 시간에 따른 적분 계산을 수행한다. 이 기법을 사용하면 요소 재구성(Remeshing)을 하지 않고도 대변형 해석이나 두 물체간의 충돌 거동을 수치적으로 해석하는 알고리즘 구현이 기존의 유한요소법이나 유한차분법에 비하여 손쉽게 처리할 수 있기 때문에 하이드로코드 연구자들에게 초고속 충돌문제 해석에 아주 유용한

도구로 인정받았다^[3-5].

그 뒤 1990년 Libersky^[6]에 의하여 충돌속도가 약 2km/s 이하에서 재료의 강도를 고려해야하는 고체 문제에도 적용되었다. 이로서 SPH의 응용범위는 천체물리학이나 유체동역학뿐만 아니라, 충돌속도 측면에서 수백 m/s 이하에서 재료의 압축효과를 고려하지 않아도 되는 고체문제까지 획기적으로 넓어졌으나 더불어 많은 문제점들도 발생하였다.

SPH 수치알고리즘이 본래 가지고 있는 특징으로 인장응력 구역에서 입자간의 인장력을 적절히 증가시켜 주지 못해 수치파괴를 유발시키는 인장불안정 현상, 자유경계면 근처나 이종재료간의 충돌 경계면에서 부정확한 커널 근사 계산, 저속충돌 해석에서는 충돌면이 분리될 때 필요한 충돌알고리즘의

접수일: 2003년 8월 5일; 게재승인일: 2003년 11월 14일

* 충남대학교 기계설계공학과

교신저자 : 국방과학연구소

E-mail kys1893@hananet.net Tel. (042) 821-2129

개발, 그리고 실제문제에서 적용되어야 할 여러 가지 경계조건의 처리 등이 부가적으로 해결되어야 할 문제점으로 나타났으며, 최근 몇 년간에 걸쳐 이들에 대한 많은 성과들이 있었다.

1999년 Chen^[7]은 기존의 커널근사식을 테일러 급수로 전개하여 구한 CSPH(Corrective SPH) 근사식과 일부 경계조건의 처리방법을 제안하고 열전달 문제에 적용하여 정확도의 개선 효과를 얻었다. 2000년 Libersky는 근사해의 정확도를 높이고 수치불안정 및 경계조건을 효율적으로 처리하기 위해서 입자를 속도점과 응력점으로 구분하고, 이동최소자승법을 접목한 NSPH(Normalized SPH)^[8-9] 근사법을 고안하여 몇 가지 1차원충돌문제와 봉충돌 문제 해석에 적용하였다. 또한 같은 해에 Johnson은 자신이 발표한 커널정규화 개념을 활용하여 가중함수를 입자간의 거리와 크기, 방향을 고려하여 3가지 함수식의 조합으로 정의하여 도함수를 구하는 일반화된 입자 알고리즘(GPA, Generalized Particle Algorithm)도 발표하였다^[10].

또한 김 등은 재료의 탄소성 거동이 중요한 저속 충돌문제를 입자법으로 수치계산을 수행할 때 충돌체의 변형을 잘 묘사할 수 있는 구성방정식의 특성에 대한 연구도 이루어지고 있다^[11].

본 연구에서는 GPA 근사식의 유도개념을 활용하여 경계면 근처에서도 커널근사식의 정확도가 개선되는 새로운 형태의 수정된 GPA근사식을 제안한다. 이 방법은 가중함수를 3차 스플라인으로 바꾸고, 또한 입자크기를 고려한 항을 저속충돌 상태의 경우 그 영향이 미미하기 때문에 가중함수에서 제외한다. 그리고 입자의 배열방법도 형상정의 및 접촉처리 알고리즘 구현이 용이하도록 경계면을 따라 위치시킨다. 이렇게 제안된 근사식을 SPH 방법과 비교검토하기 위해서 상수 및 선형, 포물선 함수를 이용하여 1차원 상의 입자점에서 함수값 및 도함수 값을 재구성할 때 얻을 수 있는 정확도를 가중함수와 입자수, 영향구역의 크기 및 근사방법에 따라 각종 수치 파라메타별로 고찰하였다. 그리고 1차원봉 충돌문제에 적용하여 탄소성 해석을 수행하고 기존의 SPH 해석결과와 비교 분석하며, 새로 제안한 근사식을 2차원 평판충돌 해석에도 적용하여 유한요소 해석 결과와 비교 분석하므로써 수치계산의 타당성과 이 방법의 개선점도 살펴보았다.

2. 입자 근사법

2.1 SSPH 근사법

Lucy가 제안한 기존의 완화입자 유체동력학의 함수 근사법을 SSPH(Standard SPH)라 하면 여기에는 여러 가지 제안된 근사식이 있지만 널리 사용되는 입자점에서의 함수 및 도함수 근사식 형태는 아래와 같다.

$$f_I = \sum_{J=1}^N \frac{m_J}{\rho_J} f_J W_{IJ} \quad (1)$$

$$\frac{df}{dx_I} = \sum_{J=1}^N \frac{m_J}{\rho_J} (f_J - f_I) \nabla W_{IJ} \quad (2)$$

여기서 J는 이웃입자, m_J 는 입자질량, ρ_J 는 입자밀도, f_I 는 I점의 입자값, f_J 는 J점의 입자값, W_{IJ} 는 I입자와 J입자간의 거리에 따른 가중함수값, ∇W_{IJ} 는 가중함수의 도함수값을 나타낸다. 가장 많이 사용되는 가중함수는 식(3)과 같은 3차 스플라인함수이다.

$$W_{IJ} = \frac{C_n}{h^n} \begin{cases} (1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3) & 0 \leq q \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2-q)^3 & 1 \leq q \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

여기서 $q = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_J|/h$ 이며, h는 완화길이라서 보통 바로 인접한 이웃입자간의 거리와 같게 취한다. 입자의 배열방법은 입자법에서 고속충돌 해석시 처음으로 제안된 Fig. 1의 Array①과 같이 속도 및 위치를 계산하는 속도점과 응력, 내부에너지 등 상태값을 계산하는 응력점이 동일하며, 경계면의 안쪽에 배열하는 방법을 적용하기로 한다.

2.2 수정 GPA 근사법(MGPA)

본 연구에서 제안한 근사법은 GPA 근사식에서 도함수의 선택조건을 더욱 일반화시킨 점에 착안하여 가중함수를 3종류의 조합으로 두지 않고 식(3)인 3차 스플라인식의 도함수를 이용하며 우함수 조건을 만족시키기 위해서 아래 식(4)과 같이 위치벡터의 증분량을 곱한 형태이며, NSPH에서 적용한바 있는 각 입자의 크기에 해당하는 항을 제외한다. 이것은 저속 충돌의 경우 체적 수축의 영향이 거의 없기 때문에 근사계산에서 받아들이기 만한 것으로

확인되었다.

$$\frac{df}{dx}_I = \left[\sum_{j=1}^N (f_j - f_I) (x_j - x_I) W'_{IJ} / r_{IJ} \right] / \left[\sum_{j=1}^N (x_j - x_I)^2 W'_{IJ} / r_{IJ} \right] \quad (4)$$

여기서 W'_{IJ} 는 식(3)에서 q 에 대한 미분을 나타내고, r_{IJ} 는 I입자와 J입자간의 거리이다. 이 근사식에서 y -방향 및 z -방향의 도함수는 위 식에서 $(x_j - x_I)$ 대신에 각각 $(y_j - y_I)$ 및 $(z_j - z_I)$ 로 대체하여 쉽게 구할 수 있다. 이것은 2차원 이상의 경우에 CSPH 방법에서 자코비안 행렬의 역행렬을 구하거나 NSPH 방법에서 3차 텐서와 2차 텐서의 내적을 계산하는 것을 피하고 단순히 각 방향으로의 도함수값에 가중함수의 영향을 곱한 것을 합산하는 형태여서 고차원 문제로 갈수록 대폭적인 계산시간의 절감을 기대할 수 있다. 그리고 입자의 배열방법은 Fig. 1의 Array②를 적용하기로 한다. 그 이유는 입자가 물체의 경계에 위치함으로써 경계가 분명하고 경계조건을 처리할 때에도 경계 입자점의 변수값을 바로 이용할 수 있기 때문이다. 또한 이렇게 되면 충돌처리 방법을 유한요소법에서 사용이 입증된 가속도 수정방법^[12]과 Johnson의 입자 충돌 알고리즘^[10] 등을 바로 적용할 수 있다.

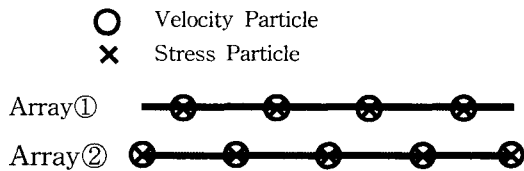


Fig. 1 Particle array of problem domain

그리고 동역학 계산시 외연적 적분방법을 사용하며, 문제의 영역을 그림 1과 같이 일정 크기의 격자로 구분하고 격자내의 중앙에 입자의 위치를 결정하고 초기밀도와 체적으로부터 각 입자의 질량을 계산하고, 계산의 효율성 높이기 위해 각각의 입자에 대하여 근방입자의 목록을 조사한다. 여기에는 여러 가지 방법이 있으나 현재까지는 Swegle

이 고안한 연결목록 조사법(Linklist searching algorithm)이 변수의 기억용량과 계산비용 측면에서 우수한 것으로 평가받고 있어서 대부분 계산에 많이 사용한다. 외연적 시간적분 루프는 기존의 유한요소법과 같이 계산한다. 즉 응력 증분을 구하기 위해서 공간상의 속도벡터 구배로부터 변형율속도 텐서 구하고 구성방정식과 상태방정식을 이용하여 응력증분을 구하며, 응력텐서의 발산으로부터 가속도를 계산하는 방법에서 공간 도함수를 계산하는 방법이 유한요소법과 차이가 있을 뿐이다. 하이드로 계산에 사용되는 질량, 운동량, 에너지 보존방정식은 각각 식(5), 식(6), 식(7)에 나타나 있다^[13].

$$\left(\frac{d\rho}{dt} \right)_I = \rho_I \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (u_j - u_I) \nabla W_{IJ} \quad (5)$$

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_I = - \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_1}{\rho_1^2} + \frac{\sigma_2}{\rho_2^2} \right) \nabla W_{IJ} \quad (6)$$

$$\left(\frac{de}{dt} \right)_I = \sum_{j=1}^N m_j \frac{\sigma_1}{\rho_1^2} (u_j - u_I) \nabla W_{IJ} \quad (7)$$

3. 함수 재구성 특성

3.1 재구성 함수 선정

동역학 계산에서 재료의 거동을 기술하려면 강체의 이동에 관계된 상수함수와 변위의 도함수로 표현되는 변형율을 나타낼 수 있어야 하므로 재구성 함수에는 선형함수가 포함되어야 한다. SSPH 및 MGPA에 대한 근사식의 상수함수, 선형함수 재구성 가능 여부가 Table 1에 나타나 있다. 여기서 SSPH는 상수 도함수 이외 모든 항목의 재구성이 불가능(×표시)한 이유는 경계근처에서 이웃입자가 부족하여 발생하는 것으로 나머지 내부 입자들에서는 재구성이 양호하기 때문에 수치해석 도구로서 사용할 수 있다. 그러나 경계 근처의 오차를 줄이는 노력은 무엇보다 중요한 문제이다. MGPA 근사식은 선형 함수값을 제외한 모든 경우에서 가능(0 표시)한 결과를 보여 SSPH 방법이 개선되었음을 알 수 있다. 본 연구에서는 재구성의 오차 및 수치 파라메타의 영향을 상대적으로 비교하기 위해서 $0 \leq x < 1$ 에서는 $f(x)=x$, $1 \leq x < 2$ 에서는 $f(x)=1.0$, $2 \leq x < 3$ 구간은 $f(x)=(x-2)^2+1$ 인 2차함수를 정의하여 재구성 함수로 사용한다.

Table 1 Reproducibility of particle method

Particle method	Constant function		Linear function	
	Function	Derivative	Function	Derivative
SSPH	×	○	×	×
MGPA	○	○	×	○

3.2 가중함수의 영향

가중함수의 영향을 살펴보기 위해 정규화 조건을 적용하는 SSPH 및 MGPA에 대하여 알려져 있는 3차 스플라인 및 수정 Gaussian, Cusp 함수, 2차 스플라인 함수^[14-15]를 이용하여 앞에서 정의한 함수의 재생오차를 상대적으로 비교해 보았다. 비교지표는 $\| \text{함수값} - \text{근사값} \| / \text{입자수}$ 로 정의한 평균오차와 표준편차이다. Fig. 2에서 결과를 살펴보면 MGPA 방법이 SSPH보다 가중함수에 따라 약간의 차이가 있지만 전체적으로 오차의 크기가 약 1/10로 개선되었고 가중함수 선정에 영향을 적게 받는다는 것을 알 수 있으며, 가중함수별로 보면 3차 스플라인 함수의 결과가 가장 우수하다.

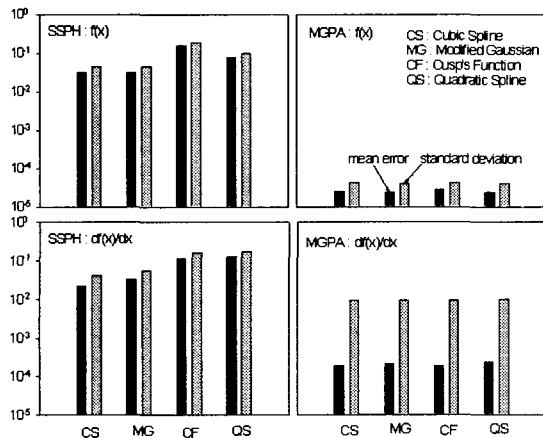


Fig. 2 Mean error and standard deviation of reproducing function and derivative with weighting functions

3.3 입자수의 영향

앞에서 정의한 함수를 재구성할 때 3차 스플라인 가중함수를 사용하고 입자수를 30, 300, 3000, 30000 개로 변화시켜 근사값이 수렴되는 정도를 살펴 보았다. 이 때 동역학 계산도중 입자들이 이동하

여 밀도가 증가하거나 감소한 경우를 가상하여 전산기의 난수를 이용 입자의 위치를 Δx 의 10% 범위 내에서 좌우로 이동하며, 영향구역 반경은 $2 * \Delta x$ 를 유지하였다. Fig. 3에서 e, s는 재구성 함수값의 오차, 표준편차를 de, ds는 재구성 도함수값의 오차, 표준편차를 의미한다. MGPA는 입자수에 따라 평균오차 및 표준편차가 로그선도에서 선형적으로 감소하는 경향을 보여 근사식의 정확도는 개선되나, SSPH 방법은 입자수를 증가 시켜도 오차의 개선효과는 한계가 있음을 알 수 있다.

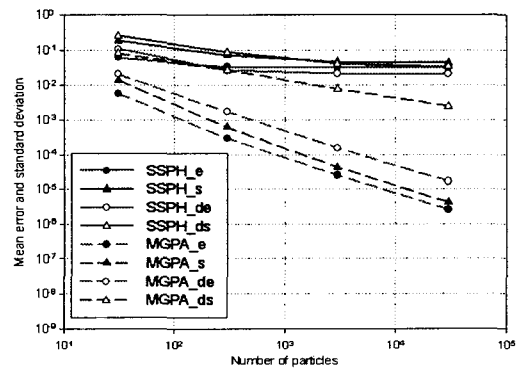


Fig. 3 Mean error and standard deviation of reproducing function and derivative with number of particles

3.4 가중함수와 영향구역의 민감도

동역학 계산에서 SSPH의 큰 단점 중 하나는 Fig. 4와 같이 영향구역의 크기에 따라 근사값이 많은 차이가 있다는 사실이며 개선책에 대한 연구가 필요하다. 여기서 영향구역의 크기 h 는 Δx 를 매개변수로 1.0에서 3.0까지를 조사하였다. 그 결과 가중함수가 CS 및 MG의 경우 1.1 근방에서 오차가 가장 작고, 도함수값은 1.5~1.7범위에서 최적치를 보였다. 3차 다항식으로 표현된 CF는 최적치가 대략 2.0~3.0 범위다. 이것은 CS에 비하여 오차도 클 뿐만 아니라 이웃입자의 수가 약 2배 이상 증가하기 때문에 수치 모델에서 사용을 피하는 것이 좋아 보인다. 같은 방법으로 MGPA에 대하여 살펴보면 h 값이 1.0에 가까울수록 오차가 줄어든다. 이렇게 되면 이웃입자의 수가 줄어들어 고차원 수치모델에서 계산시간의 감소효과가 클 것으로 기대된다.

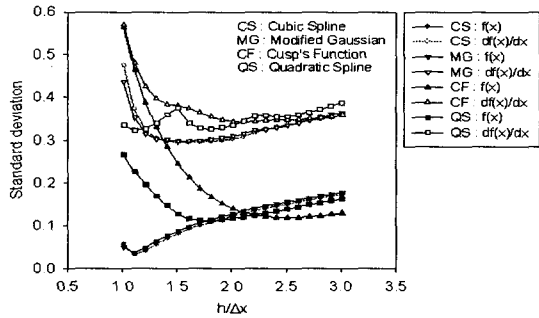


Fig. 4 Standard deviation of reproducing function and derivative with influence domain size

3.5 함수 재구성 결과

앞에서 정의한 복합함수를 CS 가중함수와 근사 방법별 최적의 영향구역 크기로 재구성 해보았다. 이때 $h = \Delta x$ 를 적용하고 31개의 입자를 이용한다. Fig. 5는 함수값을 Fig 6은 도함수값을 재구성한 결과를 보여 준다. 여기서 MGPA 방법은 선형함수 구간은 도함수값을 정확하게 재생하며, SSPH는 재생하지 못한다. SSPH와 MGPA는 각각 2차함수 영역의 경계입자 오차는 51.6%, 9.5%이다. 여기서 특이한 점은 SSPH의 경우 경계점에서 함수값이 0이면 오차가 아주 작아지고 0이 아닌 다른 값을 가지면 그 값에 따라서 오차의 크기가 관련된다는 사실이다. 또한 MGPA는 2차함수 영역에서 내부입자는 도함수값을 재생하지만 경계입자는 5.0%의 오차를 보이며, SSPH의 오차는 52.5%이다.

Fig. 7은 101개의 입자를 사용하여 비선형함수에 대한 MGPA 근사법으로 함수값을 재구성한 것이며, Fig. 8은 도함수값을 재구성한 것으로 아주 양호한 결과를 보여준다.

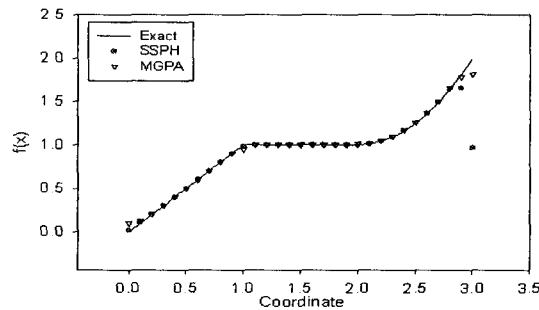


Fig. 5 Reproduced function with particle methods

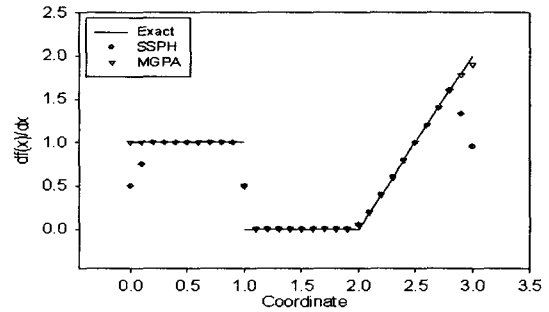


Fig. 6 Reproduced derivative function with particle methods

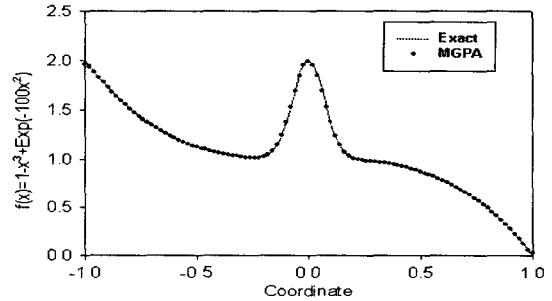


Fig. 7 Reproduced nonlinear function with MGPA particle method

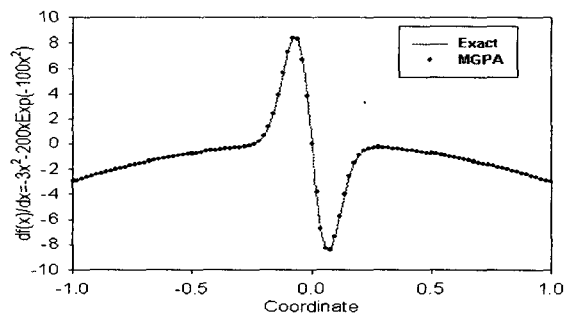


Fig. 8 Reproduced nonlinear derivative function with MGPA particle method

4. 수치 해석

4.1 1차원 봉충돌 해석

기존의 SPH 방법과 MGPA 방법을 이용하여 Fig. 9에 나타낸 1차원 봉충돌 문제를 해석하여 비교분석 하였다.

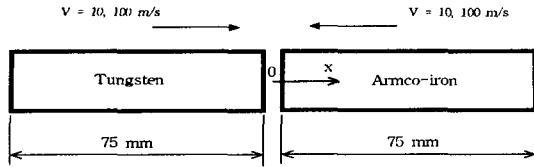


Fig. 9 Schematic representation of the 1D impact problem

입자수는 SSPH는 100개, MGPA는 102개이며, 각각의 마주보는 방향으로 충돌속도는 탄성응력 범위인 10m/s와 소성응력 범위인 100m/s인 두 종류에 대하여 참고문헌 16에 재료 물성이 알려져 있는 Armco Iron과 군사용으로 많이 사용되는 텅스텐 중합금에 대하여 수치계산을 하였다.

Fig. 10은 SSPH로 커널 충돌해석에서 1, 25, 50, 75, 100 μ s에서 봉내부 응력과의 거동을 나타낸 것이며, Fig. 11은 MGPA 방법으로 유한요소법에서 많이 사용되는 가속도 수정법을 충돌 알고리즘으로 채용한 해석 결과를 보여준다. SSPH 방법은 밀도 차이가 약 2.2배인 두 물체가 서로 충돌할 경우로 충돌점에서 응력값이 심하게 진동하는 현상을 볼 수 있다. 이것은 앞에서 지적하였듯이 충돌점에서 밀도의 차이 때문에 커널 근사값이 부정확하여 발생하는 현상으로 판단 된다. 반면에 Fig. 11은 MGPA에서는 응력의 불안정 현상도 없으며, 충돌점에서 인장응력이 발생하지 않고 물체의 분리 현상도 잘 나타내 보이고 있다. Fig. 12는 텅스텐과 강재의 소성충돌 경우 SSPH 계산결과며, Fig. 13은 MGPA로 계산한 응력값으로 SSPH와 전체적으로 유사한 분포를 보이나 MGPA 계산치가 충돌점 근처에서 응력과 진동이 제거되어 아주 양호한 결과를 보여준다.

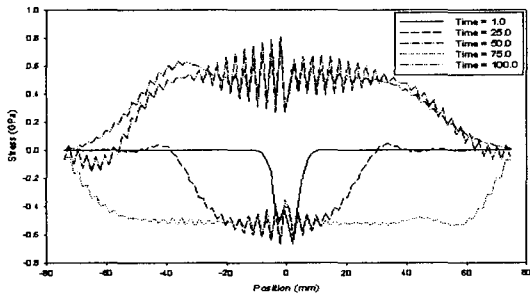


Fig. 10 Elastic rod impact (Tungsten-Steel material, velocity=10m/s, SSPH method)

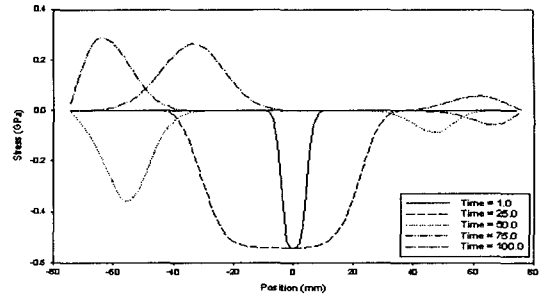


Fig. 11 Elastic rod impact (Tungsten-Steel material, velocity=10m/s, MGPA method)

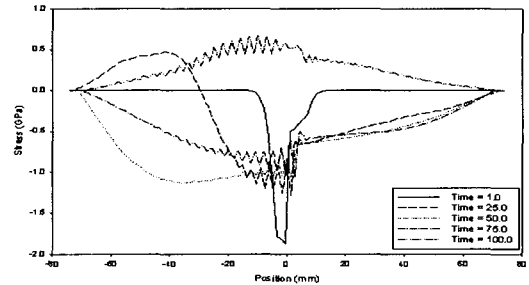


Fig. 12 Plastic rod impact (Tungsten-Steel material, velocity=100m/s, SSPH method)

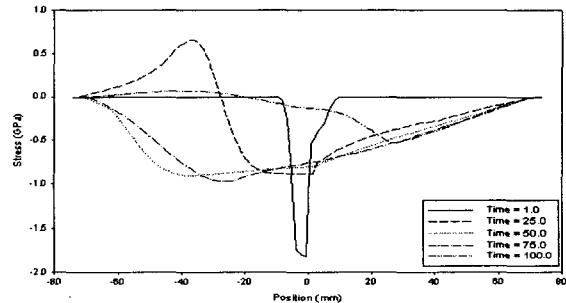


Fig. 13 Plastic rod impact (Tungsten-Steel material, velocity=100m/s, MGPA method)

4.2 2차원 평판충돌 해석

정지해 있는 강체에 두께 1.0mm의 평판이 200m/s의 속도로 강체벽에 충돌하는 문제를 해석하였다. 평판의 크기는 7.6mm × 50.2mm이며, 입자수는 가로 11개, 세로 67개이며 총 737개이다. 재료는 Armco Iron이다. 해석에는 대칭성을 이용하여 충돌체의 절반만 모델링 하였다. 해석 결과를 비교하기 위해서 유한요소법 프로그램인 ABAQUS

Ver5.8^[17]로도 해석하였으며, 이 경우 충돌면은 강체벽으로 만들고 y-축에 대칭면은 변위를 고정시켰다. MGPA 해석에서는 Libersky^[13]가 적용한 방법과 같이 대칭면에 1점의 가상입자를 만들고 이 입자에 대응되는 응력 및 속도를 부가하여 속도 도함수와 응력의 발산 값으로부터 가속도 값을 구하였다. 그리고 자유 경계면은 각 입자에서 법선 방향을 구하고 응력 텐서를 이 방향으로 회전하여 법선 성분을 0으로 처리한 후 다시 고정 좌표계 방향으로 회전하여 자유경계조건을 적용하였다.

Fig. 14는 평판이 강체벽에 충돌할 때의 MGPA로 해석한 입자의 분포도를 보여준다. 충돌 후 10 μ s일 때 판의 높이와 충돌 경계면의 최대변형 폭은 각각 44.6mm, 11.9mm이고, 30 μ s에서는 39.8mm, 16.1mm로서 ABAQUS 해석 결과와 약 3%이내의 오차로 잘 일치한다. 그리고 Fig. 15 및 Fig. 16은 평판이 강체벽에 충돌할 때 30 μ s에서 유효소성 변형율과 유효응력값의 등고선을 FEM 및 MGPA로 해석한 결과와 비교하였다. 유효소성변형율의 크기는 약 1.26이하로서 충돌면의 중앙부가 가장 높고 소성파가 전파되지 않은 평판의 상단부는 변형이 거의 발생하지 않았다. 이상의 결과에서 MGPA 결과는 ABAQUS 결과와 유효소성변형율 및 유효응력의 분포가 잘 일치하여 MGPA 알고리즘의 수치해석 유용성을 확인하였다.

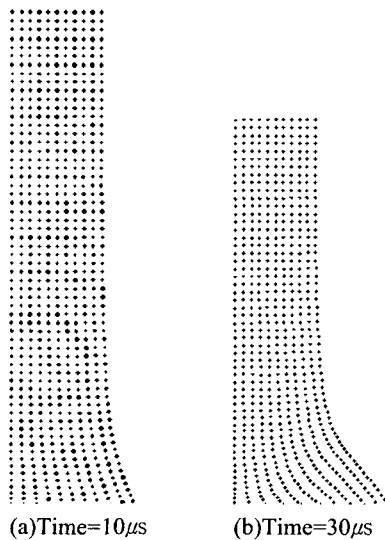


Fig. 14 Plate impact (Armco Iron to rigid wall, velocity=200m/s, MGPA method)

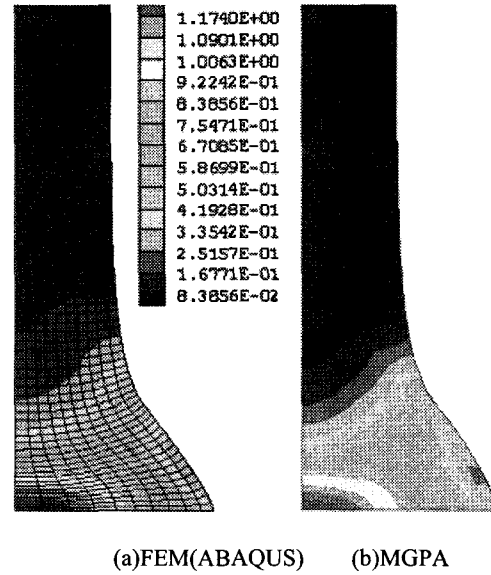


Fig. 15 Contours of effective plastic strain

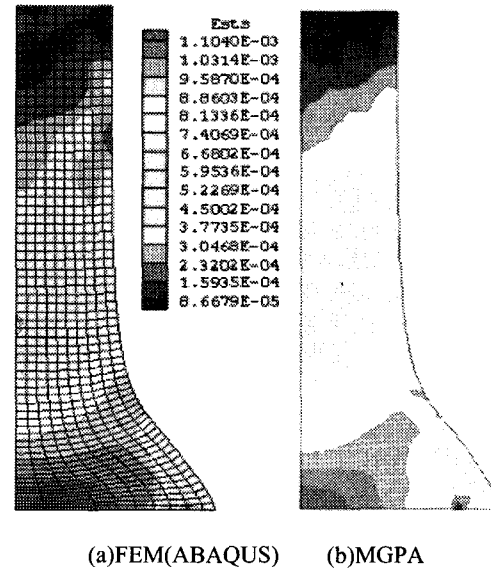


Fig. 16 Contours of effective stress

5. 결론

본 연구에서 제안한 MGPA 근사방법을 이용한 함수의 재구성 결과와 1차원 탄소성 충돌문제, 2차원 평판 충돌문제를 수치해석한 결과 다음과 같은 결

론을 얻었다.

1) SSPH는 경계에서 오차가 큰 반면에 MGPA는 확실한 개선효과를 보였으며, 복합함수 및 비선형 함수를 큰 오차없이 재구성할 수 있었다.

2) 1차원 탄소성 봉충돌 해석에서 SSPH는 밀도 차이가 큰 경우 응력파의 진동 현상이 발생하고, MGPA 해석에서 개선효과를 볼 수 있었다.

3) 2차원 탄소성 평판충돌 해석에서 MGPA 결과는 ABAQUS 유한요소법 프로그램의 결과와 유효소성변형을 및 유효응력의 분포가 잘 일치하여 MGPA 알고리즘의 타당성을 확인하였다.

4) 보다 실제적인 문제를 풀기 위해서는 MGPA 수치알고리즘에서 충돌면이나 일반 경계조건의 처리를 위한 개선 노력이 필요할 것으로 사료된다.

후기

본 연구의 일부는 충남대학교 자체연구비의 지원으로 수행되었으며 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

1. Lucy L. B., "A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis," *Astron. J.*, Vol. 82, pp.1013-1024, 1977.
2. Gingold R. A. and Monaghan J. J., "Smoothed Particle Hydrodynamics : Theory and Application to non-Spherical stars," *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, Vol. 181, pp. 375-389, 1977.
3. Gingold R. A. and Monaghan J. J., "Kernel Estimates as a Basis for General Particle Methods in Hydrodynamics," *J. Computational Physics*, Vol. 46, pp. 429-453, 1982.
4. Monaghan J. J., "Why Particle Methods Work", *SIAM J. Scientific and Statistical Computing*, Vol. 3, No. 4, pp. 422-433, 1982.
5. Swegle J. W., Hicks D. L. and Attaway S. W., "Smoothed Particle Hydrodynamics Stability Analysis," *J. Computational Physics*, Vol. 116, pp. 123-134, 1995.
6. Libersky L. D. and Petschek A. G., "Smooth Particle Hydrodynamics With Strength of Materials, *Advances in the Free-Lagrange Method*," *Lecture Notes in Physics*, Vol. 395,

pp. 248-257, 1990.

7. Chen J. K., Beraun J. E. and Carney T. C., " A Corrective Smooth Particle Method for Boundary Value Problems in Heat Conduction," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 46, pp. 231-252, 1999.
8. Randles P. W. and Libersky L. D., "Normalized Smooth Particle Hydrodynamics with Stress Points," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 48, pp. 1445-1462, 2000.
9. Gordon R. J. and Beissel S. R., "Normalized Smoothing Functions for SPH Impact Computations," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 39, pp. 2725-2741, 1996.
10. Johnson G. R., Stryk R. A. and Beissel S. R., "A Generalized Particle Algorithm for High Velocity Impact Computations," *Computational Mechanics*, Vol. 25, pp. 245-256, 2000.
11. Kim Y. H., Kim Y. S. and Lee J. M, "Characteristics of Constitutive Equations under Rod Impact Analysis by Smoothed Particle Hydrodynamics," *Journal of the Korea Institute of Military Science and Technology*, Vol. 6, No. 3, pp. 62-73, 2003.
12. Yoo Y. H. and Chung D. T., "An Analysis of High Speed Forming Using the Explicit Time Integration Finite Element Method(II)," *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers*, Vol. 15, No. 5, pp.1551-1562, 1994.
13. Randles P. W. and Libersky L. D., "Smooth Particle Hydrodynamics: Some Recent Improvements and Applications," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 139, pp. 375-408, 1996.
14. Johnson G. R., Stryk R. A. and Beissel S. R., "SPH for High Velocity Impact Computations," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 139, pp. 347-373, 1996.
15. Kum O. Y., "Nonequilibrium Flows with Smooth Particle Applied Mechanics," Ph. D. Thesis, Lawrence Livermore National Lab., pp. 21-23, 1995.
16. Johnson G. R. and Cook W. H, "A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Temperatures," *Proc. 7th Int. Symp. on Ballistics*, pp. 541-547, 1983.
17. ABAQUS/Explicit User's Manual, Version 5.8, Vol. 1, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 1998.