

## T-S 퍼지 모델을 이용한 비선형 시스템의 퍼지 슬라이딩 모드 제어

### Fuzzy Sliding Mode Control of Nonlinear System Based on T-S Fuzzy Dynamic Model

유병국 · 양근호

Byung Kook Yoo and Keun Ho Yang

한려대학교 멀티미디어정보통신공학과

#### 요 약

본 논문에서는 Takagi-Sugeno(T-S) 퍼지 시스템 모델을 이용한 비선형 시스템의 퍼지 슬라이딩 모드제어방식을 제안한다. 이 방식에서는 하나의 T-S 퍼지 모델을 구성하는 각 선형 동력학의 입력 이득행렬을 단일화 하는 과정을 필요로 한다. 이 과정에서 생성되는 입력 불확실성은 슬라이딩 모드 제어의 외란에 대한 처리 방법으로 해결될 수 있다. 또한 기존의 T-S 퍼지 모델에 대한 제어방식에서 처리하지 못했던, 상태변수에 독립적이기 때문에 선형화되지 않는 비선형 항에 대한 문제를 해결할 수 있다. 제안된 제어시스템의 안정도를 보이며 제어 입력이 슬라이딩 평면에 대한 도달조건을 만족함을 보인다. 제안된 제어방식의 타당성과 제어기 설계과정을 보이기 위하여 역진자 시스템에 적용한 시뮬레이션 결과를 보인다.

#### Abstract

This paper suggests the design and analysis of the fuzzy sliding mode control for a nonlinear system using Takagi-Sugeno(T-S) fuzzy model. In this control scheme, identifying procedure that the input gain matrices in a T-S fuzzy model are manipulated into the same one is needed. The input disturbances generated in the identifying procedure are resolved by incorporating the disturbance treatment method of the conventional sliding mode control. The proposed control strategy can also treat the input disturbances that can not be linearized in the linearization procedure of T-S fuzzy modeling. Design example for the nonlinear system, an inverted pendulum on a cart, demonstrates the utility and validity of the proposed control scheme.

**Key Words** : Fuzzy Sliding Mode Control, T-S Fuzzy Model

#### 1. 서 론

퍼지 시스템을 이용한 제어는 실제 여러 응용에서의 성공에도 불구하고 그 안정도 증명의 어려움으로 인해 제어 이론적인 측면에서 일반적이거나 체계적이지 못한 단점을 가지고 있었다. 이러한 문제를 해결하기 위해 많은 연구자들에 의해 설계 방식의 체계화나 안정도 분석에 관한 여러 연구들이 행해져 왔다. 이러한 노력은 크게 두 가지로 대별된다. 먼저 Wang[1]에 의해 수학적으로 증명된 Universal Approximation Theorem이다. 이것은 퍼지 시스템이 compact한 입력공간상의 어떠한 비선형 함수도 임의의 오차 이내로 근사될 수 있다는 것이다. Wang은 이 정리를 근거로 오차방정식을 이용한 적응 퍼지제어방식을 제안하였다. [2]에서는 이 정리를 이용하여 슬라이딩 모드제어방식에 퍼지 시스템을 도입하는 방식을 제안하였으며 그 외의 많은 연구에서도 퍼지시스템의 도입을 통해 기존 제어이론의 부분적인 문제점을 해결하려 하였다. 이 방식들은 Mamdani 타입의 퍼지시스템을 이용하는 것이었으며 퍼지시스템 자체의 안정도 증명이 아닌 기존 제어이론의 안정도 분석 방식을 이용하는 것이었다. 이와는 다른

방법으로, 비선형 시스템을 Takagi-Sugeno타입의 퍼지시스템[3]으로 모델링하고 이 모델에 대한 안정도를 분석하는 연구가 있었다[4]. 이것은 하나의 퍼지 시스템이 몇 개의 선형 시스템(부 시스템)으로 표현된 유한개의 규칙으로 구성되며 각 부 시스템에 대하여 퍼지 합성(fuzzy blending)에 의해 최종 추론되는 시스템이다. 이러한 퍼지 합성 방식을 병렬분산보상(PDC, parallel distributed compensation)이라 하며 T-S 퍼지 시스템을 이용하여 설계된 입력에 대하여 시스템의 안정도 분석이 [5]에 소개되어졌다. 이 안정도 분석은 각 부 시스템에 대하여 공통의 대칭 양정실 행렬을 찾는 문제로 귀결된다. 이러한 선형 행렬 부등식(LMI) 문제에 대하여는 [14,15]에서 소개된 이론을 근거로 하고 있다. 또한 [6]에서는 퍼지 제어기와 퍼지 관측기의 분리 성질(separation property)에 대하여 분석하였으며 [7]에서는 선형 제어기를 이용하여 퍼지 시스템을 안정화하는 방법을 제안하였다. [8]에서는 각 부시스템의 시스템 행렬  $A_i$ 가 교환법칙이 성립한다는 가정 하에서 T-S 타입의 퍼지 제어기에 대한 안정도 조건을 제시하고 여기에 시스템 행렬의 불확실성 도입을 시도하였다. 이러한 연구들에서는 하나의 비선형 시스템이 T-S 퍼지 모델로 모델링 될 수 있다는 가정 하에서 그 T-S 퍼지 모델에 대한 안정도 및 T-S 타입 퍼지 제어기에 대한 안정도를 보이는 것이었다. 즉, 하나의 비선형 시스템을 각각 다른 몇 개의 상태공간상에서 선형화하여 선형 모델로 모델링 하고

접수일자 : 2003년 8월 14일

완료일자 : 2003년 12월 9일

각 선형 모델을 퍼지 합성을 통해 전체 시스템을 하나의 T-S 퍼지 모델로 표현 가능하도록 하는 것이다. 이러한 T-S 퍼지 모델에 대한 제어방식에서는 대부분 극 재배치 방식이나 강인 제어방식을 도입하였다.

최근 슬라이딩 모드 제어방식과 T-S 퍼지 모델을 합성하는 연구로, [9]에서 T-S 퍼지 시스템을 슬라이딩 평면으로 설정하는 제어 방식이 제안되었다. 그러나 이 방식에서는 슬라이딩 모드의 수학적 안정도 분석이 없고 2차 시스템에 국한된 것이며 단지 시간 최적화에 주안점을 둔 것이었다.

본 논문에서는 비선형 시스템이 T-S 퍼지 모델로 모델링될 수 있다는 가정하에서 슬라이딩 모드 제어이론을 도입한 퍼지 슬라이딩 모드 제어방식을 제안한다. 이 방식에서는 T-S 퍼지 모델을 구성하는 각 부시스템의 입력 이득행렬을 단일화하고 이 단일화 과정에서 발생된 입력 외란이 슬라이딩 모드 제어이론에 의해 처리될 수 있으며 T-S 퍼지 모델링 과정에서 선형화되지 않는, 즉 상태에 독립적인 입력 외란 또한 처리될 수 있음을 보인다. 제안된 제어 방식에 대하여 그 안정도를 보이며 또한 제어 입력이 슬라이딩 평면에 대한 도달조건(reaching condition)을 만족함을 증명한다. 제안된 제어 알고리즘의 설계과정과 그 타당성을 보이기 위해 역진자 시스템에 적용하고 그 결과를 고찰한다.

본 논문의 구성은, 먼저 2장에서 T-S 퍼지 모델의 일반적인 안정도 분석 방식에 대하여 소개하고 퍼지 슬라이딩 모드 제어를 위한 모델의 변형에 대하여 서술한다. 3장에서는 변형된 T-S 퍼지 모델에 대한 퍼지 슬라이딩 모드 제어방식을 제안하고 그 안정도를 보인다. 4장에서는 역진자 시스템에 대하여 제안된 제어 방식을 적용하며 그 시뮬레이션 결과는 보이고 마지막으로 결론을 5장에 서술한다.

## 2. 기존의 T-S 퍼지 모델과 그 변형

본 장에서는 일반적인 T-S 퍼지 모델을 고려하며 슬라이딩 모드 제어기 설계를 위하여 T-S 퍼지 모델을 변형한다. 비선형 시스템에 대한 일반적인 T-S 퍼지 모델은 다음과 같이 부분적인 선형 입출력시스템으로 표현된 유한개의 퍼지 규칙으로 이루어진다.  $i$ -번째 퍼지 규칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Rule } i: & \text{IF } z_1(t) \text{ is } Z_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_p(t) \text{ is } Z_{ip} \\ \text{THEN } & \dot{x}(t) = A_i x + B_i u, \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $Z_{ij}(i=1, 2, \dots, r, j=1, 2, \dots, p)$ 는 퍼지 집합이며  $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 는 상태 벡터이다.  $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 는 입력 벡터,  $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$ 는  $i$ -번째 IF-THEN 규칙의 출력,  $A_i$ 와  $B_i$ 는 각각  $n \times n$ 과  $n \times m$  행렬이다.  $r$ 은 전체 규칙 수를 나타내며  $z_i$ 는 측정 가능한 시스템 변수이며 퍼지 모델의 입력변수이다. 본 논문에서는 모든 상태변수가 측정 가능하며 모든  $(A_i, B_i)$ 는 제어 가능하다고 가정한다.

일반적인 T-S 퍼지 시스템 모델은 (1)과 같이 표현되어지지만 본 논문에서 제안하는 알고리즘을 도입하기 위해 먼저 (1)과 같은 규칙의 결론부에 대한 비선형 시스템 표현을 고려해 보자.

$$\dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i(x, t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(x, t))u(t) + f_i(t) \quad (2)$$

여기서  $\Delta A_i, \Delta B_i$ 는 불확실성 행렬을 나타내며  $f_i(t)$ 는

$n \times 1$  외란 벡터를 나타낸다. 그러나 T-S 퍼지 모델링은 각각 다른  $r$ 개의 상태공간상에서 선형화하여 선형 모델로 모델링하는 것이기 때문에  $\Delta A_i$ 와  $\Delta B_i$ 가 시간  $t$ 에 대하여 explicit한 함수가 아니라면 고려할 필요가 없다. 그러나 (1)의 모든  $B_i$ 에 대하여 동일화 과정을 거친다면  $\Delta B_i$ 는 고려의 대상이 된다. 또한  $f(t)$ 는 일반적인 T-S 퍼지 모델에서는 고려하지 않는 항이지만 본 논문에서는  $f(t)$ 가 상태의 함수가 아니라 시간  $t$ 의 함수라 가정하여 고려한다. 이러한 점을 고려하고 가정 1의 정합조건을 만족하다고 가정한다면 T-S 퍼지 모델 (1)은 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Rule } i: & \text{IF } z_1(t) \text{ is } Z_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_p(t) \text{ is } Z_{ip} \\ \text{THEN } & \dot{x}(t) = A_i x(t) + B[u(t) + d_i(x, t)], \quad (3) \\ & i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

(1)의 모든  $B_i(i=1, 2, \dots, r)$ 는  $i$ 에 대하여 공통의 행렬  $B$ 로 동일화되며 이 때 행렬  $B$ 와  $d_i \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 에 대하여 다음과 같은 가정이 성립한다고 하자.

**가정 1. (정합조건) :** (3)에서  $d_i(x, t)$ 는 다음과 같이 표현되어질 수 있다.

$$d_i(x, t) = \Delta \bar{B}_i(x, t)u(t) + \bar{f}_i(x, t), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4)$$

여기서

$$\begin{aligned} \text{rank}(\Delta \bar{B}_i, B) &= \text{rank } B, \quad \Delta \bar{B}_i(x, t) = B \Delta \bar{B}_i(x, t) \\ \text{rank}(\bar{f}_i, B) &= \text{rank } B, \quad \bar{f}_i(x, t) = B \bar{f}_i(x, t) \end{aligned} \quad \square$$

여기서  $\Delta \bar{B}_i(x, t)$ 는  $m \times m$ 행렬,  $\bar{f}_i$ 는  $m \times 1$ 벡터이다. 이 때  $\Delta \bar{B}_i$ 는 일반적인 입력 불확실성 행렬을 나타내는 것이 아니라  $B_i(i=1, 2, \dots, r)$ 를 동일화 하는 과정에서 발생된 입력 외란이다. 결국  $d_i$ 는 정합조건을 만족하도록 하는  $\Delta \bar{B}_i$ 의 선형항과 모델링 시에 선형화 시키지 못한 입력 외란의 합으로 표현되어진다. 또한 다음과 같은 두 개의 가정이 만족된다고 가정한다.

**가정 2 :** (3)에서 모든  $(A_i, B)$ 는  $i=1, 2, \dots, r$ 에 대하여 locally controllable하다.  $\square$

**가정 3 :** 다음과 같은 양의 함수  $\rho_i(x, t)$ 가 존재한다.

$$\|d_i(x, t)\| < \rho_i(x, t), \quad \forall (x, t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (5)$$

$\square$   
단일값 퍼지화, 곱 추론, 그리고 무게중심법 비퍼지화 방법을 사용하는 일반적인 추론을 통한 퍼지시스템 (3)의 출력은 다음과 같이 표현되어진다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i [A_i x(t) + B(u(t) + d_i(x, t))]}{\sum_{i=1}^r w_i} \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i [A_i x(t) + B(u(t) + d_i(x, t))] \end{aligned} \quad (6)$$

여기서

$$\begin{aligned} w_i &= w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p Z_{ij}(z_j(t)), \\ \mu_i &= \mu_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{j=1}^r w_j(z(t))}, \end{aligned}$$

$z(t)=[z_1(t)z_2(t)\cdots z_r(t)]$ ,  $Z_{ij}(z_j(t))$ 는  $Z_{ij}$ 에 대한  $z_j(t)$ 의 소속정도이다. 여기서 다음과 같이 가정한다.

$$w_i(z(t)) \geq 0, \quad i=1, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\mu_i(z(t)) \geq 0, \quad i=1, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) = 1.$$

### 3. 퍼지 슬라이딩 모드 제어

본 절에서는 병렬분산보상(PDC)의 개념을 이용하여 퍼지 슬라이딩 모드 제어를 설계한다. 이것은 주어진 T-S 퍼지 모델(플랜트)에 대하여 각 규칙에 대한 보상을 설계하는 것이다. 즉, 각각의 플랜트 규칙에 대응되는 슬라이딩 모드 제어가 전체적으로 하나의 T-S 퍼지 모델에 퍼지 합성(fuzzy blending)되는 비선형 제어를 설계하는 것이다.

먼저 슬라이딩 모드 제어를 위해 안정한  $n-m$ 차원의 스윙칭 공간  $\Omega$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\Omega = \{x: h_j(x) \equiv s_j x = 0, j=1, \dots, m, s_j \in \mathbb{R}^{1 \times n}\} \quad (7)$$

즉, 다음과 같은 스윙칭 함수를 설계한다.

$$h = Sx \quad (8)$$

여기서  $h=[h_1, h_2, \dots, h_m]^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 이며  $S$ 는 다음과 같다.

$$S=[s_1^T, s_2^T, \dots, s_m^T]^T \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (9)$$

이 때  $S$ 는 다음 가정을 만족하도록 설정해야 한다.

**가정 4 :** (3)에 대하여 다음 조건을 만족하는  $S$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} \text{rank } S &= m < n \\ |SB| &\neq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

이것은  $S$ 가 full rank이어야 하며  $SB$ 가 nonsingular이어야 함을 의미한다. 따라서 (10)의 조건을 만족하며  $n-m$ 차원의 스윙칭 공간  $\Omega$ 가 안정하도록  $S$ 를 설계해야 한다.

이제 설정된  $S$ 를 이용하여 퍼지 슬라이딩 모드 제어를 설계한다. 이 제어기에서의 퍼지 집합은 (1)에서의 퍼지 집합과 동일한 집합을 사용하며 퍼지 규칙의 전제부 또한 동일하다. 퍼지 슬라이딩 모드 제어기는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Rule } i: & \text{ IF } z_1(t) \text{ is } Z_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_r(t) \text{ is } Z_{ir} \\ \text{ THEN } & u = -(SB)^{-1}Kh + u_{ei} + u_{si}, \quad i=1, \dots, r \end{aligned} \quad (11)$$

여기서  $K$ 는  $m \times m$  양정실 행렬이며  $u_{ei}$ 는 다음과 같이 nominal 시스템에 대한 조건에서 유도되어진다.

$$h = SA_i x + SB u_{ei} = 0, \quad i=1, 2, \dots, r. \quad (12)$$

따라서

$$u_{ei} = -(SB)^{-1}SA_i x \quad (13)$$

또한  $u_{si}$ 는 입력 외란과 관련된 입력으로서 다음과 같이 설계되어진다.

$$u_{si} = \begin{cases} -\frac{B^T S^T h}{\|B^T S^T h\|}(\rho_i(x, t) + \eta), & \text{if } h \neq 0 \\ 0 & \text{if } h = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$i=1, 2, \dots, r$ . 여기서  $\eta > 0$ 이다. (11)에 대하여 단일값 퍼지화, 곱 추론, 그리고 무게중심법 비퍼지화 방법을 사용하는 일반적인 추론을 통한 출력은 다음과 같이 표현되어진다.

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i [-(SB)^{-1}Kh + u_{ei} + u_{si}]}{\sum_{i=1}^r w_i} \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i [-(SB)^{-1}Kh + u_{ei} + u_{si}]. \end{aligned} \quad (15)$$

슬라이딩 모드 제어에서는 제어 입력이 반드시 다음과 같은 도달조건(reaching condition)을 만족해야 한다.

$$h^T \dot{h} < -\eta \|h\| \quad (16)$$

따라서 제안된 제어 입력이 (16)과 같은 도달조건을 만족하고 또한 전체 폐루프 제어 시스템이 안정함을 다음의 정리를 통해 증명한다.

**정리 1 :** 시스템 (1)에 대하여 가정 1, 2, 3이 만족되고, 안정한 스윙칭 공간  $\Omega$ 를 구성하며 가정 4를 만족하는 안정한  $S$ 가 존재한다면 제어입력 (11)은 (16)의 도달조건을 만족하며 또한 전체 폐루프 시스템은 안정하다.  $\square$

**증명 :** 다음과 같은 양정실 함수  $V$ 를 Lyapunov 후보함수로 선정한다.

$$V = \frac{1}{2} h^T h. \quad (17)$$

이를 시간에 대하여 미분하며 (14)를 (6)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= h^T S \left( \frac{\sum_{i=1}^r w_i [A_i x(t) + B(u(t) + d_i(x, t))]}{\sum_{i=1}^r w_i} \right) \\ &= h^T \left( \frac{\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j SA_j x(t) + \sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j SB d_j}{\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j} \right) \\ &\quad + \left( \frac{\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j SB [-(SB)^{-1}Kh + u_{ej} + u_{sj}]}{\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j} \right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j h^T SA_j x(t) + \sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j h^T SB d_j}{\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j} \\ &\quad + \left( \frac{-\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j h^T K h - \sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j h^T SA_j x}{\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j} \right) \\ &\quad - \left( \frac{\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j h^T SB \frac{B^T S^T h}{\|B^T S^T h\|}(\rho_j + \eta)}{\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq -\frac{\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j h^T K h}{\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j} \\ &\quad + \frac{\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j \|h^T S B\| \|d_i(x, t)\|}{\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j} \\ &\quad - \frac{\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j \|B^T S^T h\| (\rho_j + \eta)}{\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j} \\ &\leq \frac{-\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j h^T K h - \sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j \|B^T S^T h\| \eta}{\sum_{i=1}^r w_i \sum_{j=1}^r w_j} \\ &= -h^T K h - \|B^T S^T h\| \eta. \end{aligned}$$

따라서  $h \neq 0$ 에 대하여  $\dot{V} < 0$ 이다. 이것은 상태 궤적이 유한 시간 내에 스위칭 평면에 도달됨을 의미한다. 즉, (16)의 도달조건을 만족한다. 그리고 가정 4를 만족하며 (7)과 같은  $n-m$ 차원의 스위칭 공간이 안정하도록  $S$ 를 선정한다면 스위칭 평면에 도달된 이후의 상태 궤적은 슬라이딩 모드의 안정한 동특성에 의해 원점으로 점근적으로 수렴한다.

Q.E.D.

#### 4. 예제 시스템

본 절에서는 제안된 제어방식의 타당성을 보이기 위하여 역진자 시스템을 예로 그 제어기 설계 과정과 시뮬레이션 결과를 보인다. 이것은 [5-7]에서 사용한 예와 동일하며 여기에 외란을 더 고려한 것이다. 역진자 시스템의 역진자에 대한 동력학은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - a m l x_2^2 \sin(2x_1)/2 - a \cos(x_1) u}{4l/3 - a m l \cos^2(x_1)} + 0.1 \sin(20t) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서  $x_1$ 은 수직축에 대한 진자의 각도,  $x_2$ 는 각속도,  $u$ 는 cart에 가해지는 제어입력,  $g$ 는 중력가속도이다. 시뮬레이션에 사용한 각 파라미터의 값은 다음과 같다. 진자의 질량 :  $m = 0.5 [kg]$ , Cart의 질량 :  $M = 1.0 [kg]$  진자의 길이 :  $l = 0.5 [m]$ ,  $a = 1/(m+M)$ 이다. (18)에 대하여 외란을 제외한 일반 T-S 퍼지 모델은 2 개의 퍼지 규칙 ( $r=2$ )으로 표현되어질 수 있다[7].

$$\begin{aligned} R1: & \text{ IF } x_1(t) \text{ is Zero, THEN } \dot{x} = A_1 x + B_1 u \\ R2: & \text{ IF } x_1(t) \text{ is Big, THEN } \dot{x} = A_2 x + B_2 u \end{aligned} \quad (19)$$

여기서

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - amlb^2)} & 0 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ab}{4l/3 - amlb^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

여기서  $b = \cos(88^\circ)$ 이다. 그러나 본 논문에서 고려한 형태로, 입력 이득행렬  $B_1, B_2$ 를 동일화 하며 (3)과 같이 외란

을 고려하는 형태로 변형하여야 한다. 따라서 (18)에 대한 변형된 T-S 퍼지 모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R1: & \text{ IF } x_1 \text{ is Zero, THEN } \dot{x} = A_1 x + B(u + d_1) \\ R2: & \text{ IF } x_1 \text{ is Big, THEN } \dot{x} = A_2 x + B(u + d_2) \end{aligned} \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - amlb^2)} & 0 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix} \\ \Delta \bar{B}_1 &= 0, & \Delta \bar{B}_2 &= \frac{b(4l/3 - aml)}{4l/3 - amlb^2} - 1 = -0.9738. \end{aligned} \quad (21)$$

$f_1 = f_2 = [0.0 \ 0.1 \sin(20t)]^T$ 이므로  $\bar{f}_1 = \bar{f}_2 = -0.075 \sin(20t)$ 이며  $d_1$ 과  $d_2$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} d_1 &= -0.075 \sin(20t) \\ d_2 &= -0.9738 u - 0.075 \sin(20t). \end{aligned} \quad (22)$$

그리고  $\rho_1$ 과  $\rho_2$ 를 다음과 같이 선정한다.

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0.075 |\sin(20t)| \\ \rho_2 &= |u_{ke2}| + 0.075 |\sin(20t)| \end{aligned} \quad (23)$$

여기서  $u_{ke2} = -(SB)^{-1} S A_2 x - (SB)^{-1} K h$ 이며  $S$ 는 다음과 같이 선택하였다.

$$S = [10 \ 1] \quad (24)$$

따라서  $n-m$ 차원의 스위칭 공간은 1차 동력학 시스템이 된다. 이 경우의 슬라이딩 모드는  $x_2 = \dot{x}_1 = -10x_1$ 이 되고 이는  $x_1(t) = e^{-10t}$ 의 해를 갖는다. 따라서 슬라이딩 모드는 점근적으로 안정하다. 또한  $S$ 는 full rank이며  $SB$  또한 nonsingular이다. 그리고  $\eta$ 는 5.0,  $K$ 는 10.0으로 설정하였다. 시뮬레이션에 사용된 퍼지집합은 다음과 같이 선정하였다[7].

$$\begin{aligned} \mu_{Zero}(x_1) &= \frac{1 - 1/(1 + \exp(-7(x_1 - \pi/4)))}{1 + \exp(-7(x_1 + \pi/4))} \\ \mu_{Big}(x_1) &= 1 - \mu_{Zero}(x_1). \end{aligned} \quad (25)$$

그림 1은 제안된 제어입력에 대한 적용 결과를 나타내며 그림 2는 상태 궤적을 상태공간상에 나타낸 것이다. 여기서 상태 초기값은  $x_1(0) = \pm 0.5, \pm 1.4, x_2(0) = 0$ 으로 하였다. 이 결과로부터 제어 목적을 달성함을 알 수 있다. 특히 그림 2에서는 (24)에서 선정한  $S$ 에 따른 1차원의 스위칭 선을 확인할 수 있으며 상태가 이 스위칭 선에 도달되고 도달된 상태가 스위칭 선을 따라 원점으로 수렴되는 것을 알 수 있다. 그림 3은 초기값을  $x_1(0) = 0.5$ 로 한 경우에 대한 제어입력을 나타낸다. 그러나 실제 적용시 actuator의 한계에 대한 문제나 모델화 되지 않는 고주파 동특성을 발생시킬 수 있는 채터링이 나타난다. 이것은 슬라이딩 모드 제어의 일반적인 특성이다. 따라서 채터링을 없애기 위해 스위칭 평면 주위에 경계층(boundary layer)을 두어 처리하는 방식을 도입하며 (14)의  $u_{sl}$ 를 다음과 같이 개선한다.

$$u_{si} = \begin{cases} -\frac{B^T S^T h}{\|B^T S^T h\|} (\rho_i(x, t) + \eta), & \text{if } \|B^T S^T h\| > \epsilon \\ -\frac{B^T S^T h}{\epsilon} (\rho_i(x, t) + \eta), & \text{if } \|B^T S^T h\| < \epsilon \end{cases}$$

for  $i=1, 2, \dots, r$ . (26)

그림 4는 초기값을  $x_1(0) = \pm 0.5, \pm 1.4$ 에서 연속제어입력에 대한 시뮬레이션 결과를 나타낸다. 이 때  $\epsilon = 0.1$ 로 하였다. 그림 5는 초기값을  $x_1(0) = 0.5$ 로 한 연속제어입력을 나타낸 것이다. 이로부터 제어입력이 연속화 된 것을 확인할 수 있으며 이러한 연속제어입력에 대하여도 제어 결과가 스위칭 입력과 다르지 않다는 것을 알 수 있다.

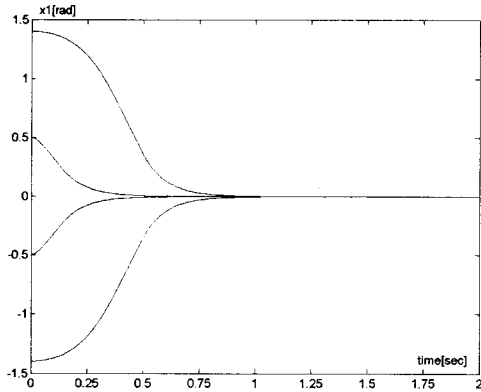


그림 1. 스위칭 제어입력에 대한 제어결과  
(초기값 :  $x_1(0) = \pm 0.5, \pm 1.4, x_2(0) = 0$ )  
Fig. 1. Control results for switching control inputs  
(Initial states :  $x_1(0) = \pm 0.5, \pm 1.4, x_2(0) = 0$ )

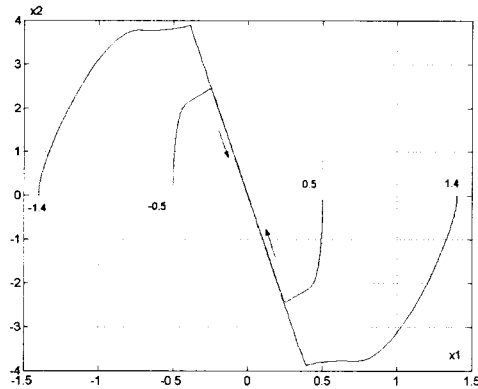


그림 2. 스위칭 입력에 대한 상태궤적  
(초기값 :  $x_1(0) = \pm 0.5, \pm 1.4, x_2(0) = 0$ )  
Fig. 2. State trajectories for switching control inputs  
(Initial states :  $x_1(0) = \pm 0.5, \pm 1.4, x_2(0) = 0$ )

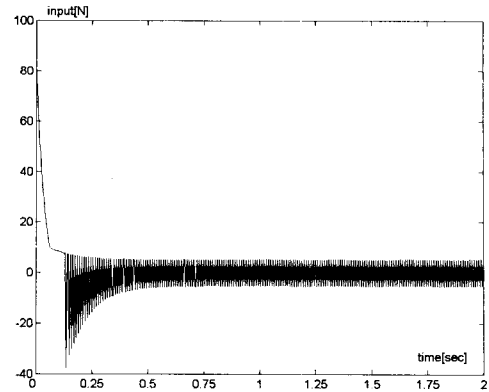


그림 3. 스위칭 제어입력(초기값:  $x_1(0) = 0.5$ )  
Fig. 3. Switching control input  
(Initial state :  $x_1(0) = 0.5$ )

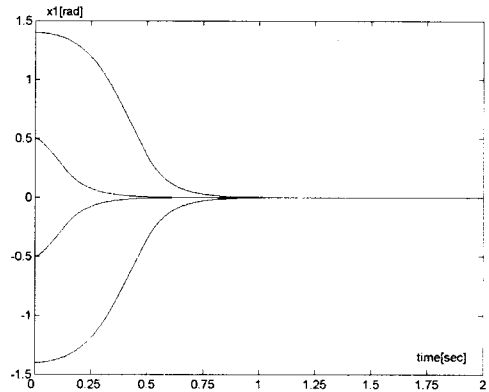


그림 4. 연속 제어입력에 대한 제어결과  
(초기값 :  $x_1(0) = \pm 0.5, \pm 1.4, x_2(0) = 0$ )  
Fig. 4. Control results for continuous control inputs  
(Initial states :  $x_1(0) = \pm 0.5, \pm 1.4, x_2(0) = 0$ )

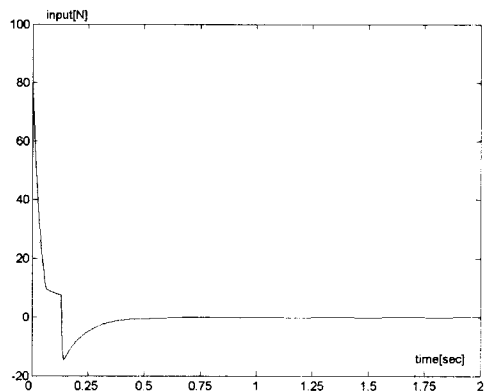


그림 5. 연속 제어입력(초기값:  $x_1(0) = 0.5$ )  
Fig. 5. Continuous control input  
(Initial state :  $x_1(0) = 0.5$ )

### 5. 결론

본 논문에서는 비선형 시스템에 대한 T-S 퍼지 모델을 이용한 퍼지 슬라이딩 모드 제어방식을 제안하였다. 제안된 제어알고리즘에서는 기존의 T-S 퍼지 모델의 형태를 변형하여야 하며 입력 이득 행렬의 동일화 과정과 이를 외란으로 처리하는 과정을 필요로 한다. 또한 기존의 T-S 퍼지 모델을 이용한 제어방식에서 처리되지 못했던 선형화 되지 않는 외란에 대하여 슬라이딩 모드 제어이론의 도입으로 해결할 수 있음을 보였다. 제안된 제어 입력이 도달조건을 만족함을 증명하였으며 전체 폐루프 시스템이 안정함을 보였다. 제안된 제어방식을 역진자 시스템의 진자 균형제어에 대하여 적용하여 그 타당성을 확인하였다.

### 참고문헌

- [1] L. X. Wang, "Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis," Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1994.
- [2] B. K. Yoo and W. C. Ham, "Adaptive fuzzy sliding mode control of nonlinear system", *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 2, May 1998.
- [3] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. System Man Cybernetics*, vol. 15, pp.116-132, 1985.
- [4] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, no. 2, pp. 135-156.
- [5] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 1, pp. 14-23, Feb. 1996.
- [6] X. J. MA, Z. Q. Sun, and Y. Y. He, "Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 1, pp. 41-51, Feb. 1998.
- [7] S. H. Zak, "Stabilizing fuzzy system models using linear controllers," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 7, no. 2, pp. 236-240, Apr. 1999.
- [8] J. S. Joh, Y. H. Chen, and R. Langari, "On the stability issues of linear Takagi-Sugeno fuzzy models," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 3, pp. 402-410, Aug. 1998.
- [9] B. Iliev and I. Hristozov, "Variable structure control using Takagi-Sugeno fuzzy system as a sliding surface," *IEEE Trans. Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE'02*, pp.644-649, 2002.
- [10] V. A. Utkin, "Sliding modes and their applications in variable structure systems," Moscow: Mir, 1978.
- [11] J.-J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
- [12] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control: A survey," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, Feb. 1993
- [13] K. B. Park and J. J. Lee, "Adaptive sliding mode controller with monotonically non-increasing gain for nonlinear uncertain systems, IEEE Workshop on Variable Structure Systems, VSS'96, pp. 139-142, 1996.
- [14] L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, and S. Boyd, "Linear matrix inequalities in systems and control theory," SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [15] L. E. Ghaoui and S.-L. Niculescu, *Advances in linear matrix inequality methods in control*," SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [16] R. H. Baumann and W. J. Rugh, "Feedback control of nonlinear systems by extended linearization," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-31, no. 1, pp. 40-46, 1986.

### 저 자 소개



**유병국(Byung Kook Yoo)**

제 12권 6호 참조

Phone : 061-760-1173

Fax : 061-761-6709

E-mail : bkyoo@hlu.hanlyo.ac.kr



**양근호(Keun Ho Yang)**

전북대학교 전자공학과(공학사)

전북대학교 대학원 전자공학과

(공학석사)

전북대학교 대학원 전자공학과

(공학박사)

현재 : 한려대학교 멀티미디어정보통신공학과 전임강사

관심분야 : 퍼지응용, 영상통신, 영상신호처리, DSP응용

Phone : 061-760-1139

Fax : 061-761-6709

E-mail : khyang@hlu.hanlyo.ac.kr