

# 탄성보 이론을 적용한 원형평판의 지지단길이 변화에 따른 강성도 해석

한동섭\*, 한근조#, 심재준\*, 김태형\*\*

## The Stiffness Analysis of Circular Plate Regarding the Length of Supporting End Using Elastic Beam Theory

Dong-Seop Han\*, Geun-Jo Han#, Jae-Joon Shim\*, and Tae-Hyong Kim\*\*

### ABSTRACT

This paper investigates the characteristics of deflection for circular plate that has same supporting boundary condition along the width direction of plate according to the length change of supporting end. For two boundary conditions such as simple supporting and clamping on both ends, this study derives maximum deflection formula of circular plate using differential equation of elastic curve, assuming that a circular plate is a beam with different widths along the longitudinal direction. The deflection formula of circular plate is verified by carrying out finite element analysis with regard to the ratio of length of supporting end to radius of circular plate.

**Key Words** : Circular plate (원형평판), Deflection formula (처짐식), Beam theory (보 이론), FEA (유한요소 해석), Differential equation of elastic curve (탄성곡선의 미분방정식)

### 기호설명

A,B = Numerical coefficients  
R<sub>L</sub> = Length ratio of supporting end  
D = Deflection of circular plate  
D<sub>x</sub> = Deflection along to x-axis  
D<sub>y</sub> = Deflection along to y-axis  
D<sub>max</sub> = Maximum deflection of circular plate  
D<sub>x,max</sub> = Maximum deflection along to x-axis  
D<sub>y,max</sub> = Maximum deflection along to y-axis

### 1. 서론

원형평판은 잠수함의 창, 유압실린더의 피스톤, 관에서 사용되는 밸브, 인공심장에 사용되는 판막 등 산업전반에 걸쳐 다양하게 사용되고 있다.<sup>1,2</sup> 잠수함의 원형 창과 같이 경계조건이 외곽을 따라 균일하게 적용되는 축대칭형 경계의 원형평판 처짐식은 오래 전부터 계산되어 사용되고 있다. 그러나 일반적으로 선박용 엔진에 사용되는 쇼크밸브나 인공심장에 사용되는 판막과 같이 평판 외곽의 경계조건이 일부분만 지지되는 비축대칭형 경계를 갖

접수일: 2003년 6월 16일; 게재승인일: 2004년 1월 9일

\* 동아대학교 기계공학과 대학원

# 교신저자: 동아대학교 기계공학과

E-mail gjhan@daunet.donga.ac.kr Tel. (051) 200-7650

\*\* 경남정보대학 기계자동차산업학부

는 원형평판의 처짐에 관한 이론적 접근은 아직 미흡한 실정이다.

본 연구에서는 이러한 비축대칭형 경계를 갖는 원형평판의 지지부 길이에 따른 처짐 특성을 보 이론을 사용하여 살펴보고자 한다. 이를 위해 원형평판을 길이방향을 따라 단면이 변하는 보로 가정하고, 탄성 처짐의 미분방정식을 적용하여 반지름  $r$ 인 원형평판의 최대 처짐식을 계산한다. 공식의 일반화를 위해 변수는 원판의 반지름에 대한 지지단 길이의 비로서 무차원화 시킨 지지단 길이비( $R_L$ )를 사용하였다. 또한 보 이론을 사용하여 유도한 처짐식의 검증을 위해 지지단 길이비를 0.1에서 0.5까지 0.1씩 변화시킨 5가지 모델에 대해 유한요소해석을 수행하고 결과를 비교하였다.

해석을 위해 사용된 재료는 연강으로써 기계적 성질은 Table 1과 같다. 보 이론을 적용하여 유도된 최대 처짐식의 결과와 비교하기 위하여 각 부분의 치수를 Table 2와 같이 설정하였고, 하중은 재료의 허용응력범위 내에서 변위를 가시화하기 위해 0.1 MPa의 면압을 원형평판의 상부에 작용시켰다.<sup>3,4</sup>

Table 1 Mechanical properties of mild steel

Items	Symbol	Value
Elastic modulus	E	$2.1 \times 10^5$ MPa
Poisson's ratio	$\nu$	0.29
Yield strength	$\sigma_y$	206 MPa
Tensile strength	$\sigma_t$	519 MPa

Table 2 Dimensions of circular plate for analysis

Items	Symbol	Value
Thickness of plate	t	10 mm
Radius of circular plate	r	100 mm
Length of supporting end	a	$0.1r \sim 0.5r$

## 2. 원형평판의 길이방향에 따른 처짐 공식

### 2.1 탄성곡선의 미분방정식

Fig. 1과 같이 두께가  $t$ 인 원형평판의  $x$ 축에 따른 최대 처짐  $D_{x,max}$ 는 식(1)에 나타낸 탄성곡선의 미분방정식을 사용함으로써 얻을 수 있다.<sup>5</sup>

$$E \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{M_x}{I_x} \quad (1)$$

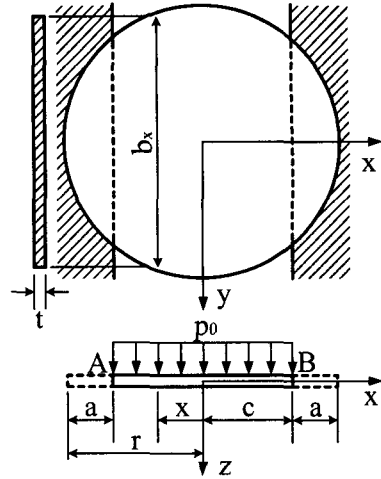


Fig. 1 Dimensions of the circular plate under the distributed load

임의의 점  $x$ 에서 평판의 폭  $b_x = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ 이므로 압력  $p_0$ 가 작용할 때 그 지점의 분포하중은 압력과 폭의 곱으로써  $w_x = p_0 b_x$ 가 되고 단면 2차모멘트  $I_x = b_x t^3 / 12$ 가 된다.

### 2.2 경계조건에 따른 처짐 공식

본 연구에서는 보의 지지조건을 조합한 4가지 경계조건에 대해 지지단 길이비에 따른 원형평판의 최대 처짐식을 구한다. Fig. 2는 원형평판의 4가지 경계조건을 각각 나타내었다.

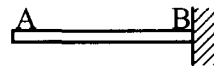


Fig. 2(a) Boundary condition of free and clamped end

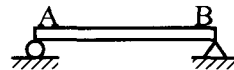


Fig. 2(b) Boundary condition of roller and hinged end

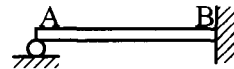


Fig. 2(c) Boundary condition of roller and clamped end

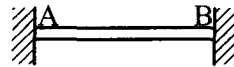


Fig. 2(d) Boundary condition of both Clamped ends

**2.2.1 일단자유 타단고정경계**

지지단 길이 a인 일단자유 타단고정경계를 갖는 원형평판에 압력 p<sub>0</sub>가 작용할 때 임의의 지점 x에서 모멘트 M<sub>x</sub>는

$$M_x = -P_x(x - x_0) \tag{2}$$

이다. 여기서

$$P_x = \int_{-c}^x w_x dx$$

$$x_0 = \int_{-c}^x x w_x dx / \int_{-c}^x w_x dx$$

이고, c=r-a로서 중심에서 지지단까지의 길이이다. 식(1)에 모멘트 M<sub>x</sub>와 단면 2차모멘트 I<sub>x</sub>를 대입하여 적분하면

$$E \frac{dz}{dx} = \frac{2p_0}{3t^3} \left\{ 15r^2x + x^3 - 9c\sqrt{r^2 - c^2} \sqrt{r^2 - x^2} - 9r^2\sqrt{r^2 - x^2} \tan^{-1} \frac{c}{r^2 - c^2} + (6c^2\sqrt{r^2 - c^2} - 3r^2(2\sqrt{r^2 - c^2} + 3\sqrt{r^2 - x^2})) \tan^{-1} \frac{c}{r^2 - c^2} \right\} + C_1 \tag{3}$$

$$Ez = \frac{p_0}{6t^3} \left\{ 39r^2x^2 + x^4 + 24c^2\sqrt{r^2 - c^2} \sqrt{r^2 - x^2} - 24r^2\sqrt{(r^2 - c^2)(r^2 - x^2)} - 18cx\sqrt{(r^2 - c^2)(r^2 - x^2)} + 6(-3cr^2\sqrt{r^2 - c^2} + 4c^2x\sqrt{r^2 - c^2} - r^2x(4\sqrt{r^2 - c^2} + 3\sqrt{r^2 - x^2})) \tan^{-1} \frac{x}{r^2 - x^2} - 9r^4 \tan^{-1} \frac{x}{r^2 - x^2} \right\} + C_1x + C_2 \tag{4}$$

이 된다. 일단자유 타단고정경계의 경계조건

$$x = c \text{ 일 때 } \frac{dz}{dx} = 0, z = 0 \tag{5}$$

을 식(3)과 (4)에 대입하면 적분상수 C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>는

$$C_1 = \frac{4p_0}{3t^3} \left\{ 5c^3 + 3cr^2 + 3(c^2 - 4r^2) \sqrt{r^2 - c^2} \tan^{-1} \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \right\} \tag{6}$$

$$C_2 = \frac{p_0}{2t^3} \left\{ 15c^4 - 15c^2r^2 + 8r^4 - 6cr^2 \sqrt{r^2 - c^2} \tan^{-1} \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} + 9r^4 \tan^{-1} \left( \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \right)^2 \right\} \tag{7}$$

이 된다. 식(6)과 (7)을 식(4)에 대입하면 길이 x에 관한 원형평판의 처짐식 D<sub>x</sub>가 구해진다

x축 방향에 따른 최대 처짐은 자유단(x=-c)에서 발생하므로 원형평판의 처짐식 D<sub>x</sub>에 x대신 -c를 대입하고 지지단 길이비(R<sub>L</sub>=a/r)을 사용하여 정리하면, 지지단 길이비에 따른 일단자유 타단고정 경계를 갖는 원형평판의 최대 처짐 D<sub>x,max</sub>는

$$D_{x,max} = \frac{2p_0r^4}{3Et^3} \left[ 11R_L^{*4} + 21R_L^{*2} + (12R_L^{*2} - 30)\sqrt{1 - R_L^{*2}} \tan^{-1} \left( \frac{R_L^*}{\sqrt{1 - R_L^{*2}}} \right) + 9 \tan^{-1} \left( \frac{R_L^*}{\sqrt{1 - R_L^{*2}}} \right)^2 \right] \tag{8}$$

이 된다. 여기서 R<sub>L</sub><sup>\*</sup> = 1 - R<sub>L</sub>이다.

**2.2.2 일단roller 타단힌지경계**

지지단 길이 a인 일단roller 타단힌지경계를 갖는 원형평판에 압력 p<sub>0</sub>가 작용할 때 임의의 지점 x에서 모멘트는

$$M_x = R_A(x + c) - P_x(x - x_0) \tag{9}$$

이다. 여기서 A점 반력

$$R_A = \int_{-c}^0 w_x dx$$

$$= p_0 \left\{ c\sqrt{r^2 - c^2} + r^2 \tan^{-1} \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \right\}$$

이므로 2.1절에서와 같은 방법으로 식(1)에 식(9)를 대입하고 적분한다. 길이  $x$ 에 따른 처짐식  $D_x$ 는 일단롤러 타단한지경계의 경계조건

$$x = -c \text{ 일 때 } z = 0$$

$$x = c \text{ 일 때 } z = 0 \quad (10)$$

을 대입하여 적분상수  $C_1, C_2$ 를 구한 후 얻는다.

대칭경계조건이므로  $x$ 축 방향에 따른 최대 처짐은 원형평판의 중심( $x=0$ )에서 발생한다. 원형평판의 처짐식  $D_x$ 에  $x$ 대신 0을 대입하고 지지단 길이비( $R_L$ )을 사용하여 정리하면, 일단롤러 타단한지경계를 갖는 원형평판의 최대 처짐  $D_{x,max}$ 는

$$\begin{aligned} D_{x,max} = & \frac{p_0 r^4}{6Et^3} \left[ 24 - 51R_L^{*2} - 13R_L^{*4} - (24 \right. \\ & + 12R_L^{*2})\sqrt{1-R_L^{*2}} - 6R_L^* \{ 6 - (13 \\ & + 2R_L^{*2})\sqrt{1-R_L^{*2}} \} \tan^{-1} \left( \frac{R_L^*}{\sqrt{1-R_L^{*2}}} \right) \\ & \left. + 9(1+4R_L^{*2})\tan^{-1} \left( \frac{R_L^*}{\sqrt{1-R_L^{*2}}} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (11)$$

이 된다.

### 2.2.3 일단롤러 타단고정경계

지지단 길이  $a$ 인 일단롤러지지 타단고정경계를 갖는 원형평판에 압력  $p_0$ 가 작용할 때 임의의 지점  $x$ 에서 모멘트는 식(9)와 같다. 그러나 부정정보 형태이므로 A점에서의 반력  $R_A$ 는 적분식을 계산한 후 얻는다.

2.1절에서와 같은 방법으로 식(1)에 모멘트  $M_x$ 를 대입하고 적분한다. 길이  $x$ 에 따른 처짐식  $D_x$ 는 일단지지 타단고정경계의 경계조건

$$x = -c \text{ 일 때 } z = 0$$

$$x = c \text{ 일 때 } \frac{dz}{dx} = 0, z = 0 \quad (12)$$

을 대입하여 적분상수  $C_1, C_2$ 와 반력  $R_A$ 를 구한 후 얻는다.  $x$ 축 방향에 따른 최대 처짐은 처짐각  $dz/dx = 0$ 이 되는 지점이므로 계산하면  $x \approx -0.15c$ 가 얻

어진다. 따라서 원형평판의 처짐식  $D_x$ 에  $x$ 대신  $-0.15c$ 를 대입하고 지지단 길이비( $R_L$ )을 사용하여 정리하면, 일단롤러 타단고정경계를 갖는 원형평판의 최대 처짐  $D_{x,max}$ 는

$$\begin{aligned} D_{x,max} = & \frac{p_0 r^4}{6Et^3} \left[ R_L^* (3840000 - 3455919R_L^{*4} \right. \\ & - 28659600R_L^{*2})\sqrt{1-R_L^{*2}} - 1600R_L^* (120 \\ & - 705R_L^{*2} - 103R_L^{*4})\sqrt{400-9R_L^{*2}} \\ & + 800R_L^{*2} (11280 + 4760R_L^{*2} + 600R_L^{*4} \\ & - 27\sqrt{(400-9R_L^{*2})(1-R_L^{*2})})\tan^{-1} \\ & \left( \frac{3R_L^*}{\sqrt{400-9R_L^{*2}}} \right) - 1440000R_L^*\sqrt{1-R_L^{*2}} \\ & \tan^{-1} \left( \frac{3R_L^*}{\sqrt{400-9R_L^{*2}}} \right)^2 - \{ 3840000 \\ & - 32019600R_L^{*2} + 28248881R_L^{*4} \\ & + 3168162R_L^{*6} - 4800(40-175R_L^{*2} \\ & - 3R_L^{*4})\sqrt{(400-9R_L^{*2})(1-R_L^{*2})} \\ & - 2400R_L^* (9(1+2R_L^{*2})\sqrt{400-9R_L^{*2}} \\ & - 80(47+22R_L^{*2})\sqrt{1-R_L^{*2}})\tan^{-1} \\ & \left( \frac{3R_L^*}{\sqrt{400-9R_L^{*2}}} \right) - 1440000(1+2R_L^{*2}) \\ & \tan^{-1} \left( \frac{3R_L^*}{\sqrt{400-9R_L^{*2}}} \right)^2 \} \tan^{-1} \left( \frac{R_L^*}{\sqrt{1-R_L^{*2}}} \right) \\ & + 4800R_L^* \{ (60-9R_L^{*2})\sqrt{400-9R_L^{*2}} - 80 \\ & (25-28R_L^{*2})\sqrt{1-R_L^{*2}} - 1020R_L^* \tan^{-1} \\ & \left( \frac{3R_L^*}{\sqrt{400-9R_L^{*2}}} \right) \} \tan^{-1} \left( \frac{R_L^*}{\sqrt{1-R_L^{*2}}} \right)^2 \\ & - 288000(5+27R_L^{*2})\tan^{-1} \left( \frac{R_L^*}{\sqrt{1-R_L^{*2}}} \right)^3 \\ & \left. + 160000 [ R_L^*\sqrt{1-R_L^{*2}} - (2R_L^{*2}+1)\tan^{-1} \right. \\ & \left. \left( \frac{R_L^*}{\sqrt{1-R_L^{*2}}} \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

이 된다.

### 2.2.4 양단고정경계

지지단의 길이 a인 양단고정경계를 갖는 원형 평판에 압력 p<sub>0</sub>가 작용할 때 임의의 지점 x에서 모멘트 M<sub>x</sub>는

$$M_x = -M_a + R_a(x+c) - P_x(x-x_0) \quad (14)$$

이다. 2.3절과 같이 부정정보 형태이므로 A점에서의 반력 R<sub>A</sub>와 모멘트 M<sub>A</sub>는 적분식을 계산하여 얻을 수 있다.

2.1절에서와 같은 방법으로 식(1)에 모멘트를 대입하고 적분한다. 길이 x에 따른 처짐식 D<sub>x</sub>는 양단고정경계의 경계조건

$$\begin{aligned} x = -c \text{ 일 때 } \frac{dz}{dx} &= 0, z = 0 \\ x = c \text{ 일 때 } \frac{dz}{dx} &= 0, z = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

을 대입하여 적분상수 C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>와 반력 R<sub>A</sub>, 모멘트 M<sub>A</sub>를 구한 후 얻을 수 있다.

대칭경계조건이므로 x축 방향에 따른 최대 처짐은 평판의 중심(x=0)에서 발생한다. 따라서 원형 평판의 처짐식 D<sub>x</sub>에 x대신 0을 대입하고 지지단 길이비(R<sub>L</sub>)을 사용하여 정리하면, 양단고정경계를 갖는 원형평판의 최대 처짐식 D<sub>x,max</sub>는

$$\begin{aligned} D_{x,max} &= \frac{P_0 r^4}{6 E t^3} \left[ 4R_L^{*2}(15 + R_L^{*2}) \{ R_L^{*2} - 1 \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1 - R_L^{*2}} \} - R_L^* \{ 96 - 32R_L^{*2} - (96 \right. \\ &\quad \left. - 53 R_L^{*2} - 3 R_L^{*4}) \sqrt{1 - R_L^{*2}} \} \tan^{-1} \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{R_L^*}{\sqrt{1 - R_L^{*2}}} \right) - (36 - 75 R_L^{*2} + 15 R_L^{*4} \right. \\ &\quad \left. - 36 \sqrt{1 - R_L^{*2}} \} \tan^{-1} \left( \frac{R_L^*}{\sqrt{1 - R_L^{*2}}} \right) \right)^2 \\ &\quad \left. - 27 R_L^* \sqrt{1 - R_L^{*2}} \tan^{-1} \left( \frac{R_L^*}{\sqrt{1 - R_L^{*2}}} \right) \right]^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 9 \tan^{-1} \left( \frac{R_L^*}{\sqrt{1 - R_L^{*2}}} \right)^4 \left[ -R_L^* \right. \\ &\quad \left. \sqrt{1 - R_L^{*2}} + \tan^{-1} \left( \frac{R_L^*}{\sqrt{1 - R_L^{*2}}} \right) \right] \tan^{-1} \\ &\quad \left( \frac{R_L^*}{\sqrt{1 - R_L^{*2}}} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

이 된다.

### 3. 해석결과 및 고찰

보 이론을 적용한 원형평판의 처짐식과 유한요소해석을 수행한 결과와의 상관관계를 상관계수(correlation coefficient)를 이용하여 평가하였다. 상관계수 R<sub>c</sub>는

$$R_c = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2 \sum (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad (17)$$

와 같으며, R<sub>c</sub>=0이면 상관관계가 없으며, R<sub>c</sub>=1이면 완전한 상관관계가 있다고 말할 수 있다. 일반적으로 상관관계는 R<sub>c</sub>의 제곱인 R<sub>c</sub><sup>2</sup>으로 분석하며, R<sub>c</sub><sup>2</sup>이 0.65 이상이면 상관관계가 있다고 말할 수 있다.

#### 3.1 일단자유 타단고정경계조건

일단자유 타단고정경계조건을 갖는 원형평판을 x축에 따라 단면이 변하는 보로 가정하고 유도한 처짐식과 원형평판에 대한 유한요소해석(FEA)결과를 비교하여 Table 3에 나타내었다.

Table 3 Comparison of the results from beam theory and FEA with respect to R<sub>L</sub> (BC : FE-CE<sup>†</sup>)

R <sub>L</sub>	Beam theory	Finite Element Analysis	
	D <sub>x,max</sub>	D <sub>x,max</sub>	D <sub>max</sub>
0.1	0.8446	0.8779	0.8779
0.2	0.5000	0.4908	0.4908
0.3	0.2855	0.2735	0.2735
0.4	0.1518	0.1435	0.1435
0.5	0.0725	0.0682	0.0682

<sup>†</sup> FE: free end, CE: clamped end

Table 3을 살펴보면 유한요소해석을 수행한 결과 x축(y=0)을 따라 발생하는 처짐 D<sub>x</sub>의 최대 값

$D_{x,max}$ 는 보 이론을 적용하여 구한 최대 처짐 값과 상관관계는  $R_c^2=0.999$ 로서 매우 높은 상관관계를 보였으며, x축을 따라 나타나는 최대 처짐 점( $x=-c, y=0$ )에서 폭 방향으로 처짐의 변화는 거의 나타나지 않았다. 즉, 일단자유 타단고정경계조건을 갖는 원형평판의 처짐식은 보 이론만으로도 구할 수 있음을 알 수 있다.

**3.2 일단롤러 타단한지경계조건**

일단롤러 타단한지경계조건을 갖는 원형평판의 처짐식과 유한요소해석결과를 비교하여 Table 4에 나타내었다.

Table 4 Comparison of the results from beam theory and FEA with respect to  $R_L$  (BC : RE-HE<sup>†</sup>)

$R_L$	Beam theory	Finite Element Analysis	
	$D_{x,max}$	$D_{x,max}$	$D_{max}$
0.1	0.0759	0.0784	0.1099
0.2	0.0477	0.0464	0.0630
0.3	0.0281	0.0266	0.0354
0.4	0.0152	0.0143	0.0186
0.5	0.0074	0.0070	0.0089

† RE: roller end, HE: hinged end

Table 4을 살펴보면 유한요소해석을 수행한 결과 x축( $y=0$ )을 따라 발생하는 처짐  $D_x$ 의 최대 값  $D_{x,max}$ 는 보 이론을 적용하여 구한 최대 처짐 값과 상관관계는  $R_c^2=0.999$ 로서 매우 높은 상관관계를

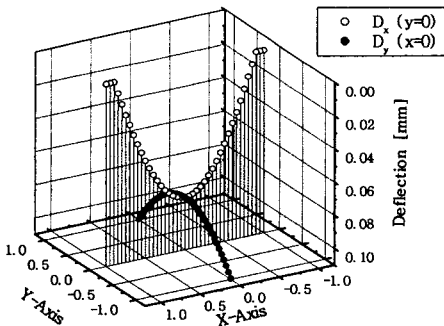


Fig. 3 Deflection of the circular plate with free and hinged end when length ratio of supporting end( $R_L$ ) is 0.1

보였으나, 원형평판의 최대 처짐 값  $D_{max}$ 는  $D_{x,max}$ 의 최대 1.4배까지 증가하였다. 이는 x축을 따라 나타나는 최대 처짐 점( $x=0, y=0$ )에서 폭 방향으로 처짐이 Fig. 3과 같이 추가적으로 발생하기 때문이다. 즉, 폭 방향으로 동일한 처짐 값을 갖는 것으로 가정한 보 이론만으로는 일단자유 타단고정경계조건을 갖는 원형평판의 처짐식을 유도할 수 없음을 알 수 있다.

길이방향을 따라 발생하는 처짐을  $D_x, D_x$ 의 최대 값을  $D_{x,max}, D_{x,max}$  발생 지점( $x=0, y=0$ )에서 폭 방향으로 추가적으로 발생하는 처짐을  $D_y, D_y$ 의 최대 값을  $D_{y,max}$ 로 정의하면, 일단롤러 타단한지경계조건을 갖는 원형평판의 최대 처짐  $D_{max}$ 는

$$D_{max} = D_{x,max} + D_{y,max} \tag{18}$$

이 된다.  $D_{x,max}$ 는 식(11)에 나타낸바와 같고,  $D_y$ 를  $D_{x,max}$ 에 대한 추가 처짐비  $D_y/D_{x,max}$ 로 정의할 때  $D_y/D_{x,max}$ 는 좌우 대칭형이므로 최소사승법을 이용하여 나타낼 수 있다. 차수는 0.1%이내의 오차를 갖도록 4차까지 설정하여  $Ay^4+By^2$ 의 형태로 표현하였다. 이 때 지지단의 길이비( $R_L$ )에 따른 계수 A, B를 Table 5에 나타내었다.

Table 5 The coefficients with respect to the length ratio of supporting end (BC : RE-HE)

$D_y/D_{x,max} = Ay^4 + By^2$					
$R_L$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
A	-0.03E-9	0.58E-9	1.20E-9	1.87E-9	2.63E-9
B	4.02E-5	3.07E-5	2.17E-5	1.20E-5	0.18E-5

계수 A와 B는  $R_L$ 에 대한 일차 함수의 형태로서

$$A = (6.62 R_L - 0.74) \times 10^{-9}$$

$$B = -(9.56 R_L - 4.99) \times 10^{-5} \tag{19}$$

이 되며, 지지단의 길이비 0.4를 기준으로 폭방향에 대한 평판의 추가 처짐비  $D_y/D_{x,max}$ 는 y에 대한 2차식의 형태에서 4차식의 형태로 바뀌어 가는 것으로 나타났다.

일단롤러 타단한지경계조건을 갖는 원형평판의 최대 처짐은  $x=0, y=\pm r$ 인 지점에서 발생하며, 이 때

최대 처짐  $D_{max}$ 는

$$D_{max} = D_{x,max} + D_{y,max}$$

$$= D_{x,max} (A r^4 + B r^2 + 1) \quad (20)$$

이 된다.

### 3.3 일단롤러 타단고정경계

일단롤러 타단고정경계에 대하여  $x$ 축에 따라 단면이 변하는 보로 가정하고 유도한 처짐식과 원형평판에 대한 유한요소해석결과를 비교하여 Table 6에 나타내었다.

Table 6 Comparison of the results from beam theory and FEA with respect to  $R_L$  (BC : RE-CE<sup>†</sup>)

$R_L$	Beam theory	Finite Element Analysis	
	$D_{x,max}$	$D_{x,max}$	$D_{max}$
0.1	0.0371	0.0377	0.0626
0.2	0.0221	0.0205	0.0334
0.3	0.0126	0.0113	0.0178
0.4	0.0067	0.0060	0.0090
0.5	0.0032	0.0029	0.0042

<sup>†</sup> RE: roller end, CE: clamped end

Table 6을 살펴보면 유한요소해석을 수행한 결과  $x$ 축( $y=0$ )을 따라 발생하는 처짐  $D_x$ 의 최대 값  $D_{x,max}$ 는 보 이론을 적용하여 구한 최대 처짐 값과 상관관계는  $R_c^2=0.998$ 로서 매우 높은 상관관계를 보였으나, 원형평판의 최대 처짐 값  $D_{max}$ 는  $D_{x,max}$ 의 최대 1.66배까지 증가하였다. 이는  $x$ 축을 따라 나타나는 최대 처짐 점( $x=-0.15c$ ,  $y=0$ )에서 폭 방향으로 처짐이 추가적으로 발생하기 때문이다. 즉, 일단롤러 타단힌지경계조건과 같이 보 이론만으로는 일단자유 타단고정경계조건을 갖는 원형평판의 처짐식을 유도할 수 없음을 알 수 있다.

$D_{x,max}$ 에 대한 폭 방향의 추가 처짐비  $D_y/D_{x,max}$ 는 일단롤러 타단힌지경계와 같이  $y$ 의 4차 항과 2차 항의 조합으로 표현되며, 이 때 지지단의 길이비 ( $R_L$ )에 따른 계수 A, B를 Table 7에 나타내었다.

계수 A와 B는  $R_L$ 에 대한 일차 함수의 형태로서 이 되며, 지지단의 길이비 0.4를 기준으로 폭 방향에 대한 평판의 추가 처짐비  $D_y/D_{x,max}$ 는  $y$ 에 대한 2

차식의 형태에서 4차식의 형태로 바뀌어 가는 것으로 나타났다.

Table 7 The coefficients with respect to the length ratio of supporting end (BC : RE-CE)

$D_y/D_{x,max} = Ay^4 + By^2$					
$R_L$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
A	-0.63E-9	0.34E-9	1.36E-9	2.44E-9	3.44E-9
B	7.30E-5	6.02E-5	4.42E-5	2.60E-5	0.80E-5

$$A = (10.25 R_L - 1.68) \times 10^{-9}$$

$$B = -(16.4 R_L - 9.15) \times 10^{-5} \quad (21)$$

일단롤러 타단고정경계조건을 갖는 원형평판의 최대 처짐은  $x=-0.15c$ ,  $y=\pm r\sqrt{1-(0.15R_L^*)^2}$ 인 지점에서 발생하며, 이 때 최대 처짐  $D_{max}$ 는

$$D_{max} = D_{x,max} + D_{y,max}$$

$$= D_{x,max} [A r^4 \{1 - (0.15R_L^*)^2\}^2 + B r^2 \{1 - (0.15R_L^*)^2\} + 1] \quad (22)$$

이 된다. 이 때  $D_{x,max}$ 는 식(13)과 같다.

### 3.4 양단고정경계

양단고정경계에 대하여  $x$ 축에 따라 단면이 변하는 보로 해석한 이론식과  $x$ ,  $y$  평면을 갖는 원형평판에 대한 유한요소해석결과를 비교하여 Table 8에 나타내었다.

Table 8을 살펴보면 유한요소해석을 수행한 결과  $x$ 축( $y=0$ )을 따라 발생하는 처짐  $D_x$ 의 최대 값  $D_{x,max}$ 는 보 이론을 적용하여 구한 최대 처짐 값과 상관관계는  $R_c^2=0.997$ 로서 매우 높은 상관관계를 보였으나, 원형평판의 최대 처짐 값  $D_{max}$ 는  $D_{x,max}$ 의 최대 2.08배까지 증가하였다. 이는  $x$ 축을 따라 나타나는 최대 처짐 점( $x=0$ ,  $y=0$ )에서 폭 방향으로 처짐이 추가적으로 발생하기 때문이다. 즉, 보 이론만으로는 일단자유 타단고정경계조건을 갖는 원형평판의 처짐식을 유도할 수 없음을 알 수 있다.

Table 8 Comparison of the results from beam theory and FEA with respect to  $R_L$  (BC : CE-CE<sup>†</sup>)

$R_L$	Beam theory	Finite Element Analysis	
	$D_{x,max}$	$D_{x,max}$	$D_{max}$
0.1	0.0201	0.0197	0.0410
0.2	0.0115	0.0101	0.0205
0.3	0.0064	0.0055	0.0103
0.4	0.0033	0.0030	0.0050
0.5	0.0016	0.0015	0.0022

<sup>†</sup> CE: clamped end

$D_{x,max}$ 에 대한 폭 방향의 추가 처짐비  $D_y/D_{x,max}$ 는 일단롤러 타단힌지경계와 같이  $y$ 의 4차 항과 2차 항의 조합으로 표현되며, 이 때 지지단의 길이비 ( $R_L$ )에 따른 계수 A, B를 Table 9에 나타내었다.

Table 9 The coefficients with respect to the length ratio of supporting end (BC : CE-CE)

$D_y/D_{x,max} = Ay^4 + By^2$					
$R_L$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
A	-1.69E-9	-0.18E-9	1.56E-9	3.20E-9	4.53E-9
B	12.5E-5	10.5E-5	7.29E-5	3.88E-5	0.90E-5

계수 A와 B는  $R_L$ 에 대한 일차 함수의 형태로서

$$A = (15.82 R_L - 3.26) \times 10^{-9}$$

$$B = -(29.9 R_L - 15.99) \times 10^{-5} \quad (23)$$

이 되며, 지지단의 길이비 0.4를 기준으로 폭 방향에 대한 평판의 추가 처짐비  $D_y/D_{x,max}$ 는  $y$ 에 대한 2차식의 형태에서 4차식의 형태로 바뀌어 가는 것으로 나타났다.

일단롤러 타단고정경계조건을 갖는 원형평판의 최대 처짐은 일단롤러 타단힌지경계조건과 같이  $x=0, y=\pm r$ 인 지점에서 발생하며, 이 때 최대 처짐  $D_{max}$ 는 식(20)와 같고, 이 때  $D_{x,max}$ 는 식(16)과 같다.

#### 4. 결론

보 이론과 유한요소해석을 수행하여 지지부 길이 변화에 따른 원형평판의 최대 처짐식을 유도한

결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 모든 경계조건에서 보의 적분이론을 통해 얻은 최대 처짐  $D_{x,max}$ 는  $x$ 축( $y=0$ )을 따른 원형평판의 최대 처짐과  $R_c^2=0.997$  이상의 상관관계를 보여 서로 간에 상관관계가 높은 것으로 나타났다.
2. 일단자유 타단고정경계조건에서는 원형평판이 폭 방향으로 처짐의 변화를 무시할 수 있으나 나머지 경계조건에서는  $y$ 축을 따라 처짐이 1.4배에서 최대 2.08배까지 증가하였다.
3. 원형평판의 폭 방향에 따른 추가 처짐식은 지지부 길이비  $R_L=0.4$ 를 기준으로 2차식에서 4차식의 형태로 변하게 되며, 추가 처짐을 고려한 원형평판의 최대 처짐식을 최소사승법을 이용하여 유도하였다.
4. 본 연구에서 제안된 처짐식은 비대칭경계조건을 갖는 압력밸브, 인공판막뿐만 아니라 길이에 따라 단면이 변하는 보를 갖는 다양한 구조물에 응용될 수 있다.

#### 후 기

이 논문은 2001학년도 동아대학교 학술연구조성비(연구기초)에 의하여 연구되었음.

#### 참고문헌

1. Han, G. J., Oh, S. W., Kim, K. Y., Ahn, S. C. and Jeon, H. Y., "Analysis of Strength and Displacement of Jig Body in Index Machine," J. of the KSPE, Vol. 15, No. 3 pp. 24-30, 1998.
2. Han, G. J., Ahn, S. C., Shim, J. J. and Kim, S. Y., "Nonlinear Analysis of the Monoleaflet Polymer Valve according to Shape of Supporting Members," J. of the KSPE, Vol. 20, No. 3, pp. 120-124, 2003.
3. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., "Theory of elastic stability," 2nd Edition, McGraw-Hill, pp. 1-45, 1998.
4. Hoffman, J., "Numerical methods for engineers," McGraw-Hill, 1992.
5. Ugural, A. C., "Stresses in Plates and Shells," McGraw-Hill, pp. 106-139, 1981.