

AHP에서 왜대칭행렬의 고유분해를 이용한 중요도 추정법의 제안

이광진¹⁾

요 약

AHP기법에서는 의사결정 요소들의 중요도를 추정함에 있어 통상 쌍대비교행렬 그 자체에 고유벡터법 또는 대수최소제곱법을 적용한다. 본 연구에서는 왜대칭행렬의 고유분해를 통해 쌍대비교행렬을 조정된 후 조정된 쌍대비교행렬에 대해 고유벡터법 또는 대수최소제곱법을 적용하는 중요도 추정법을 제안한다. 그리고 이 추정법이 가지는 여러가지 이점과 의미를 이론적 근거와 실제 사용 예를 통해 보이고자 한다. 본 연구결과는 불일치성이 높은 쌍대비교행렬이 주어진 경우 불일치성을 줄이는데 특히 유용하게 활용될 수 있을 것이다.

주요용어: AHP, 쌍대비교행렬, 중요도 추정, 고유벡터법, 대수최소제곱법, 왜대칭행렬의 고유분해

1. 서론

의사결정 분야에서 이용되고 있는 계층분석과정(Alytic Hierarchy Process : 이하 AHP 기법)은 다요소(Multi-Attribute) 의사결정 문제를 해결하는 가장 대표적인 방법이다(Saaty, 1980). 이 방법은 복잡한 의사결정 요소들과 다양한 대안들을 계층구조로 형식화하고, 층 내 요소들 또는 대안들에 대한 쌍대비교를 통해 문제를 해결하는 방식이다. 이 방법은 의사결정을 할 때 요소들의 중요도와 대안들에 대한 우선순위를 도출하는 방법으로 널리 인정받고 있다.

기존 여러 문헌들에서 언급된 AHP기법의 대표적 장점들은 다음과 같다. (1)정성, 정량적 의사결정 요소들을 모두 처리할 수 있다. (2)요소들의 중요도벡터(priority vector)는 쌍대비교행렬(pairwise comparison matrix)의 고유벡터를 통해 추정될 수 있다. (3)평가 또는 판단에 대한 일치성을 측정하는 측도로는 일치성 지수(Consistency Index : CI)가 이용된다. (4)의사결정 요소가 20개를 초과할 때는 AHP기법은 다른 다요소 의사결정 방법들보다 유용하다.

한편, AHP기법의 가장 큰 특징은 요소들의 중요도를 추정할 때 고유벡터법을 사용한다는 점이다. 다변량통계분석 및 수량화이론은 고유값 문제와 많은 관련이 있으며 AHP기법에서도 예외는 아니다. 실제로 AHP를 이용한 실제연구에서는 거의 대부분이 고유벡터법을 이용하고 있다. 이는 고유벡터법이 AHP기법을 창안한 Saaty(1980)에 의해 제안되었

1) (302-729) 대전광역시 서구 도안동 800, 목원대학교 사회과학대학 정보통계학과, 부교수
E-mail: leekj@mokwon.ac.kr

으며, AHP를 구현할 수 있는 소프트웨어들에서 고유벡터법으로 추정된 결과를 우선적으로 제시해 준다는 점에 기인한다.

요소들의 중요도벡터를 추정하는 방법으로는 쌍대비교 역수행렬(reciprocal matrix) 그 자체에 근거를 두는 고유벡터법(Eigen-Vector method : EV법)과 쌍대비교 역수행렬을 직접 사용하지 않는 대수최소제곱법(Logarithmic Least Square method : LLS법)이 있다. 여기에서 대수최소제곱법은 쌍대비교 역수행렬의 각 원소에 대수(log)변환을 하여 얻어진 왜대칭행렬(skew-symmetric matrix)을 이용하는 방법이다. 이 방법은 확률적 오차의 개념을 도입한 후 최소제곱법을 적용한다는 점에서 고유벡터법과 다르다.

Saaty(2001)는 AHP에서 고유벡터에 의한 추정이 필요한 이유를 설명한 바 있지만 이 추정법이 기존의 다른 추정법들에 비해 더 우수하다고 것을 증명하지는 못하였다. 따라서 AHP에서는 아직까지도 중요도에 대한 새로운 추정법들이 제안될 수 있는 여지가 있다고 할 수 있다.

본 연구에서는 고유분해 기법을 사용한 고유벡터법의 매력과 왜대칭행렬에 오차를 도입한 대수최소제곱법의 매력이 모두 가미된 중요도 추정법의 개발을 시도하고자 한다. 이를 위해 수리적으로는 왜대칭행렬의 고유분해 정리를 이용하였다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 대수최소제곱법과 고유벡터법의 기초와 이론적 근거를 살펴보았다. 3장에서는 제안된 추정법을 정리하고 그 이론적 근거와 그 사용법을 제시하였다. 4장에서는 수치 예들을 통해 제안된 방법의 장점을 정리하였다. 마지막으로 5장에서는 결론과 함께 향후 연구방향에 대해서 간략하게 기술하였다.

2. 고유벡터법과 대수최소제곱법

우선 본 연구에서 언급되는 네 가지의 쌍대비교행렬들에 대한 명명과 표기법을 그림 2.1을 이용하여 정의한다. n 개 의사결정 요소들의 이상적 중요도벡터를 w^* , 이의 각 원소의 역수들로 구성된 벡터를 $1/w^*$ 로 표현한다. 그러면 일치성을 가진 이상적 쌍대비교행렬 A^* 은 식 (2.1)과 같이 표현된다. 본 연구에서는 이를 ‘이상적 쌍대비교역수행렬’이라 명명한다.

$$A^* = \underline{w}^*(1/\underline{w}^*)^t = (w_i^*/w_j^*). \quad (2.1)$$

여기서, $\underline{w}^* = (w_1^* \ w_2^* \ \dots \ w_n^*)^t$, $1/\underline{w}^* = (1/w_1^* \ 1/w_2^* \ \dots \ 1/w_n^*)^t$ 이다. 한편 현실적 상황에서 의사결정자의 주관적 판단에 의해 부여된 쌍대비교 값들 사이에는 일반적으로 불일치성이 내포하게 된다. 이러한 쌍대비교행렬을 ‘현실적 쌍대비교역수행렬’이라 하고 $A = (a_{ij})$ 로 나타낸다.

역수행렬들 A^* 와 A 의 각 원소들을 대수변환하여 얻어지는 행렬들은 항상 왜대칭행렬이 된다. 이들을 각각 B^* 와 B 로 표현하고 ‘이상적 쌍대비교왜대칭행렬’, ‘현실적 쌍대비교왜대칭행렬’로 각각 명명한다. 식 (2.2)를 만족하는 오차행렬들 E 와 Δ 도 각각 역수행렬과 왜대칭행렬이 된다.

$$A = A^* \circ E, \quad B = B^* + \Delta. \quad (2.2)$$

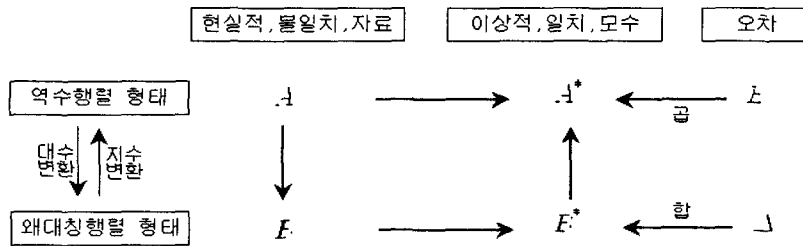


그림 2.1: 네 가지 쌍대비교행렬과 오차행렬

여기서, $B = (b_{ij}) = (\log a_{ij}) = \log(A)$, $B^* = (b_{ij}^*) = \log(A^*)$ 이고, 기호 ‘ \circ ’은 하다마드 곱(Hadamard product)의 연산기호이다.

AHP기법을 이용하는 응용연구들에서 연구자는 의사결정 요소들의 이상적 중요도벡터 w^* 를 추정하기 위해 먼저 n 개 요소들을 2개씩 짝지어 평가한 현실적 쌍대비교역수행렬 A 를 구한다. 이는 마치 통계학에서 모수들을 추정하기 위해 자료행렬을 구하는 것과 마찬가지로 볼 수 있다. 그런데 구해진 현실적 쌍대비교역수행렬에는 일반적으로 불일치성이 내재되어 있다고 여겨진다. 문제는 불일치성이 존재하는 현실적 쌍대비교역수행렬 A 로부터 이상적 쌍대비교역수행렬 A^* 를 형성하는 중요도벡터 w^* 를 어떻게 추정할 것인가 하는 것이다. 이에 관하여 통용되는 가장 대표적인 추정방법이 바로 고유벡터법과 대수최소제곱법이다.

고유벡터법의 논리적 근거는 다음과 같다. 우리가 추정하고자 하는 것은 요소들의 중요도벡터 w^* 이지만 의사결정자가 신중을 기하여 측정하고자 한 목표는 이상적 쌍대비교역수행렬 $A^* = w^*(1/w^*)$ 라고 할 수 있다. 그런데 A^* 는 다음과 같은 성질들을 가지고 있다. (i)계급(rank)은 항상 1이다. (ii)고유값으로 단일근인 n 과 $(n-1)$ 중근인 0을 가진다. (iii)최대고유값 n 에 대응하는 고유벡터를 규준화(normalize)한 것이 바로 이상적 중요도벡터인 w^* 가 된다. 즉 $A^*w^* = nw^*$ 가 만족된다. (iv)또한 A 의 최대고유값 λ 는 항상 양의 실수값으로 $\lambda \geq n$ (단, 등호관계는 A 가 일치일 때만 성립)라는 성질을 가진다. 이런 성질들에 근거하여 λ 가 n 에 가까울수록 일치성이 높다고 판단하고 그런 경우 A 로 A^* 를, 또는 A 로 w^* 를 잘 추정할 수 있을 것으로 기대한다. 만일 A 의 최대고유값 λ 에 대응하는 고유벡터를 규준화한 것을 w_{EV} 라 한다면 $Aw_{EV} = \lambda w_{EV}$ 라는 표현이 가능하게 되는데, 이를 $A^*w^* = nw^*$ 와 대비하여 봄으로써 λ 가 n 에 충분히 가까운 경우 w_{EV} 를 w^* 의 좋은 추정벡터로 생각하는 것이다. 물론 이 때 A^* 의 추정행렬은 $\hat{A}_{EV}^* = w_{EV}(1/w_{EV})^t$ 가 된다.

이 방법에서는 일치성지수 $CI = (\lambda - n)/(n - 1)$ 가 쌍대비교역수행렬의 원소들 사이의 논리적 일치성 정도를 측정하는 척도로 사용되고 있다. 물론 CI 의 단점을 어느 정도 보완한 일치성비율(Consistency Ratio : CR)이란 척도도 개발되어 일치성지수와 함께 널리 사용되고 있다.

한편 대수최소제곱법의 논리적 근거는 다음과 같다. 이상적 중요도벡터 w^* 로 표현될 수 있는 이상적 쌍대비교역수행렬 A^* 는 이를 대수변환하여 얻은 이상적 쌍대비교왜대칭행렬

B^* 과 '1대1 대응' 관계를 가진다. 이는 B^* 를 알면 A^* (또는 w^*)를 알 수 있다는 의미를 갖는다. 마찬가지로 이런 관계는 현실적 쌍대비교역수행렬 A 와 이에 대응하는 현실적 쌍대비교왜대칭행렬 B 사이에서도 성립된다. 따라서 이러한 관계를 통해 만일 현실적 쌍대비교역수행렬 A 가 일치성이 높아 A 로부터 A^* 를 잘 추정할 수 있는 상황이라면 B 로도 B^* 를 잘 추정할 수 있겠다. 이처럼 $B^* = (b_{ij}^*)$ 를 모수행렬로, $B = (b_{ij})$ 를 대응되는 자료행렬로 볼 수 있는 경우 일반적으로 통계학에서는 측정된 각 자료값에는 오차가 개입되어 있을 것이라는 가정 하에 다음과 같은 통계적 모형을 수립한다.

$$b_{ij} = b_{ij}^* + e_{ij}, \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

여기서, $b_{ij}^* = \log(w_i^*) - \log(w_j^*)$, e_{ij} 들은 오차변수들로 서로 독립인 연속확률변수이며 $E(e_{ij}) = 0$, $Var(e_{ij}) = \sigma^2$ ($i < j, i, j = 1, 2, \dots, n$)를 만족한다.

이 모형은 통계학에서는 선형모형(linear model)이라 불리는 것으로, 통상 최소제곱법으로 모수들을 추정한다. 이는 오차의 제곱합 $\sum_{i < j} e_{ij}^2$ 을 최소로 하는 $w^* = (w_i^*)$ 을 구하고 이를 w^* 의 좋은 추정벡터라고 생각하는 추정방법이다. 이 방법을 통해 얻어진 추정벡터를 대수최소제곱법에 의해 추정된 중요도벡터라 하고 w_{LLS} 로 표현한다. 관련 이론에 의하면 현실적 쌍대비교역수행렬 A 의 각 행 원소들의 기하평균들로 구성된 열벡터는 대수최소제곱 중요도벡터가 된다. 대수최소제곱법에 의한 중요도벡터 추정법은 공식암기와 계산이 쉽다는 장점과 아울러 $n \leq 3$ 인 경우 고유벡터법에 의한 추정 결과와 일치한다는 장점도 지니고 있다. 그러나 이 방법의 근간인 ' e_{ij} 는 연속확률변수'라는 기본가정 때문에 이 방법을 이용하기 위해서는 쌍대비교 값들을 연속인 실수값으로 측정하여야 한다. 문제는 '쌍대비교 값을 어떻게 연속형 실수값으로 측정할 수 있을까?'하는 것이다. 고유벡터법을 개발한 Saaty는 쌍대비교의 값을 연속형 실수값으로 측정할 수 있으면 좋기는 하지만 현실적으로 어렵다는 판단하에 쌍대비교행렬의 원소값을 1에서 9까지의 고정값과 그의 역수로 표현하는 방법을 우선 채택한 것으로 판단된다.

대수최소제곱법을 적용하더라도 고유벡터법에 의한 추정값과 극히 가까운 결과를 얻을 수 있지만, 사실 이산성이 가장 좋은 이항(binary) 평가의 경우 EV법이 LLS법보다 직관적으로 더 좋은 결과를 준다. 물론 어떤 객관적인 척도로 그 좋음을 증명한 경우는 아직도 이루어지지 않고 있다(박용성과 박태근, 2001).

3. 왜대칭행렬의 고유분해를 이용한 중요도 추정법

본 연구에서 제안되는 '왜대칭행렬의 고유분해를 이용한 중요도 추정법'은 쌍대비교역수행렬 A 를 대수변환하여 얻은 쌍대비교왜대칭행렬 B 에 대한 고유분해를 이용하는 추정법이라 할 수 있다. 이는 고유분해를 이용한다는 측면에서는 고유벡터법과, 쌍대비교역수행렬을 대수변환하여 얻은 쌍대비교왜대칭행렬 B 를 이용하면서 오차의 개념을 도입한다는 측면에서는 대수최소제곱법과 공통점을 지닌다. 그러나 가장 큰 특징이라면 현실적 쌍대비교역수행렬 A 에 대해 이에 내재된 불일치 유발 요소(사실은 덜 중요한 하위 비교기준들, 오차)의 효과를 왜대칭행렬 B 의 고유분해를 통해 제거해냄으로써 A 보다 불일치가 덜

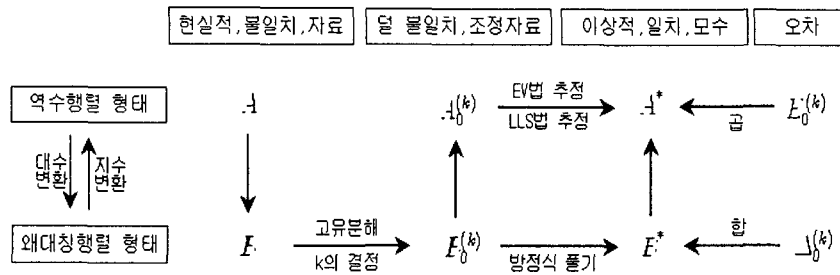


그림 3.1: 제안된 추정법의 흐름

심한 쌍대비교역수행렬을 생성한 후 이에 대해 고유벡터법 또는 대수최소제곱법을 적용한다는 점이다. 그림 2.1의 내용에 일부가 추가된 그림 3.1를 통해 관련 사항들을 설명한다.

Saaty(2001)에서는 $A = A^* \circ E$ 로부터 쌍대비교역수행렬 조건을 만족하는 행렬 E 가 $E \approx 11^t$ 일 때 A 를 ‘거의 일치(near consistent)’ 쌍대비교역수행렬이라고 정의하고, 행렬 E 에 대해 ‘reciprocal multiplicative perturbation of a consistent matrix’라는 표현을 사용한다. 본 연구에서는 이에 추가하여 $A = A_0^{(k)} \circ E_0^{(k)}$ 라는 조건을 만족하는 쌍대비교역수행렬들 $A_0^{(k)}$ 와 A 에 대해 $CI(A_0^{(k)}) < CI(A)$ 을 만족한다면 ‘ $A_0^{(k)}$ 는 A 보다 덜 불일치(less inconsistent)’라 정의한다.

본 연구에서 쌍대비교역수행렬 A 로부터 ‘ A 보다 덜 불일치’인 쌍대비교역수행렬 $A_0^{(k)}$ 를 생성하는 과정과 그 이론적 배경은 다음과 같다. 우선 A, A_0, E_0 의 원소들을 대수변환하여 얻어진 행렬을 각각 B, B_0, Δ_0 이라 한다면 다음 식 (3.1)과 같은 표현을 얻을 수 있는데, 이때 B, B_0 와 Δ_0 가 모두 왜대칭행렬이 된다는 단순한 사실이 본 연구의 첫 착안점이라고 할 수 있다.

$$A = A_0 \circ E_0, \quad B = B_0 + \Delta_0 \tag{3.1}$$

왜대칭행렬은 ‘계급이 항상 짝수’라는 성질을 가지는데, 계급이 $2s (\leq n)$ 인 왜대칭행렬 B 는 ‘왜대칭행렬의 고유분해 정리(竹内 啓과 藤野和建, 1988)’에 의해 항상 식 (3.2)와 같이 유일하게 표현될 수 있다.

$$B = B_1 + B_2 + \dots + B_s \tag{3.2}$$

여기서, $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_s^2 (\lambda_1 > \dots > \lambda_s > 0)$ 은 $B^t B$ 의 0 아닌 고유값들(모두 2중근)이고, r_{2i-1} 와 r_{2i} 가 고유값 λ_i^2 에 대응되는 두 고유벡터일 때 B_i 들은 모두 계급이 2인 왜대칭행렬들로서 $B_i = \lambda_i (r_{2i-1} r_{2i}^t - r_{2i} r_{2i-1}^t)$ 가 된다. 참고로, $B_i^2 = \lambda_i^2 (r_{2i-1} r_{2i-1}^t + r_{2i} r_{2i}^t)$, $B_i B_j = -B_j^t B_i = -B_i B_j^t = O (i \neq j)$ 가 만족된다.

식 (3.2)는 “계급이 $2s$ 인 왜대칭행렬은 계급이 2인 s 개의 왜대칭행렬들의 합으로 분해될 수 있음”을 의미하는 것으로, 본 연구에서는 첫 k 개 항까지의 합과 이의 지수변환 행렬을 각각 $B_0^{(k)}$ 와 $A_0^{(k)}$ 로 표현한다. 그리고 이들을 각각 ‘ k 번째 항까지로 조정된 쌍대비교왜

대칭행렬', ' k 번째 항까지로 조정된 쌍대비교역수행렬'이라 명명한다. 또한 B 에서 $B_0^{(k)}$ 를 뺀 행렬을 오차행렬이라 하고 $\Delta_0^{(k)}$ 로, 이의 지수변환 행렬을 $E_0^{(k)}$ 로 표현한다. 이 관계들을 정리하면 식 (3.3)과 같다.

$$B_0^{(k)} = B_1 + \dots + B_k, A_0^{(k)} = \exp(B_0^{(k)}), \Delta_0^{(k)} = B - B_0^{(k)}, E_0^{(k)} = \exp(\Delta_0^{(k)}) \quad (3.3)$$

이를 이용하면 식 (3.4)의 관계식이 얻어지는데, 이로부터 $B_0^{(s)} = B, \Delta_0^{(s)} = O, A_0^s = A, E_0^{(s)} = \mathbf{11}^t$ 가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$\text{모든 } k(k = 1, 2, \dots, s) \text{에 대해 } B = B_0^{(k)} + \Delta_0^{(k)}, A = A_0^{(k)} \circ E_0^{(k)} \text{가 성립} \quad (3.4)$$

이제 본 연구에서 제안하는 바를 서술하면 다음과 같다. 원래의 쌍대비교역수행렬 A 를 그냥 그대로 이용하여 중요도벡터를 추정하는 기존의 방식에 비해 '(적절히 선택된) k 항까지로 조정된 쌍대비교역수행렬 $A_0^{(k)}$ '를 이용하여 중요도벡터를 추정하는 것이 여러 의미에서 좋은 점을 지니기에 이를 이용하자는 것이다. 물론 연구자에 따라 $A_0^{(k)}$ 에 고유벡터법을 적용할 수도 있고 대수최소제곱법을 적용할 수도 있다. 또한 $k = s$ 로 두면 기존의 추정방식이 된다.

본 연구에서 제안되는 추정방법을 사용하기 위해서는 무엇보다도 먼저 k 의 선택 문제가 해결되어야 한다. 이를 위해 본 연구에서는 기존의 일치성지수와 일치성비를 공식을 그대로 $A_0^{(k)}$ 에 적용한 $CI(A_0^{(k)})$ 와 $CR(A_0^{(k)})$, 식(3.5)에 있는 $R^2(A_0^{(k)})$ 라는 세 가지 선택기준을 제시하고 이들의 선택적 또는 병행적 사용을 제안한다. 여기서 RI 는 Oak Ridge 연구실에서 제시한 임의지수(Random Index)로서 AHP 사용자들에게는 널리 알려진 수정지수이다.

$$\begin{cases} CI(A_0^{(k)}) = (A_0^{(k)} \text{의 최대고유값} - n)/(n - 1), \\ CR(A_0^{(k)}) = CI(A_0^{(k)})/RI, \\ R^2(A_0^{(k)}) = (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2)/(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_s^2) \end{cases} \quad (3.5)$$

$CI(A_0^{(k)})$ 와 $RI(A_0^{(k)})$ 는 k 항까지로 조정된 쌍대비교역수행렬의 일치성에 관한 측도로서 이에 담긴 의미는 김성희(1999) 등에서 자세히 설명되어 있으므로 더 이상 언급하지는 않는다. 다만 $R^2(A_0^{(k)})$ 라는 선택기준은 본 연구에서 처음 제시되는 것으로 회귀분석에서의 결정계수, 주성분분석에서의 설명력, 인자분석에서의 제곱다중상관과 같은 형태와 의미를 가진다. 이에 관련한 수식적 관계는 식 (3.6)과 같다.

$$R^2(A_0^{(k)}) = \text{tr}\{(B_0^{(k)})^t A_0^{(k)}\} / \text{tr}(B^t B) = 1 - \text{tr}\{(\Delta_0^{(k)})^t \Delta_0^{(k)}\} / \text{tr}(B^t B). \quad (3.6)$$

한편, 실제 의사결정 문제에서 k 의 값을 선택해야 하는 경우라면 연구자에 따라 다음과 같은 선택규칙을 사용할 수도 있을 것이다. 물론 요소의 수가 동일한 상황에서는 CI 와 CR 은 비례하다.

- ▷ 일치성지수 기준 : $CI(A_0^{(k)}) \leq c_1$ 를 만족하는 최대의 k
- ▷ 일치성비를 기준 : $CR(A_0^{(k)}) \leq c_2$ 를 만족하는 최대의 k
- ▷ 설명력 기준 : $R^2(A_0^{(k)}) \geq c_3$ 를 만족하는 최소의 k

여기서 c_1, c_2, c_3 는 연구자에 의해 결정될 상수로서, 예를 들면 c_1 과 c_2 는 AHP의 전통적 기준값인 0.1(=10%), c_3 는 주성분분석에서의 설명력 기준을 차용하여 0.8 등이 사용될 수도 있을 것이지만, 이에 관해서는 더 많은 논의와 연구가 필요할 것으로 본다.

이제 식(3.4)에 제시되었던 $B = B_0^{(k)} + \Delta_0^{(k)}$, $A = A_0^{(k)} \circ E_0^{(k)}$ 에 담긴 의미와 이점 몇 가지를 설명한다.

첫째, 가장 우선적인 것은 ‘조정’이라는 단어의 의미에 있다. 대수적 입장에서는 단순히 B 에서 $\Delta_0^{(k)}$ 를 뺀다는 것에 불과하지만 측정이론적 입장에서는 다음과 같은 실용적 의미가 포함되어 있다. 쌍대비교시 사용한 비교기준은 다차원적 개념으로서 이에 많은 하위개념들이 연관되어 있겠지만 그들 중 중요하지 않은, 즉 쌍대비교 값들에 큰 변화를 주지 못하는, 개념들을 이 조정의 과정을 통해 제거함으로써 비교기준을 좀 더 선명하게, 다시 말하면 좀 더 낮은 차원의 그리고 좀 더 해석이 쉬운 개념으로, 만든다는 것이다. 이는 비교기준의 조작적 정의(operational definition)와 관련된 것으로 통계학에서의 인자분석 모형에 비유될 수 있다. 이에 관한 좀 더 심도 있는 논의도 차후의 연구과제로 남긴다.

둘째, $A_0^{(k)} = \exp(B_0^{(k)})$ 가 $A = \exp(B)$ 보다 ‘덜 불일치’하다는 점이다. 컴퓨터 모의실험의 결과를 통해서 이보다 더 일반적인 다음의 관계식이 성립하는 것으로 나타났다.

표 3.1: 모의실험의 결과(요약)

	(k=1의 경우)					(k=2의 경우)				
	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8
$D < -0.01$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00
$-0.01 \leq D < -0.001$	0.40	0.16	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	1.40	0.28	0.01
$-0.001 \leq D < -0.0001$	1.87	0.26	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	5.88	0.51	0.01
$-0.0001 \leq D < -0.00001$	2.16	0.27	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	7.73	0.56	0.02
$-0.00001 \leq D < 0$	2.91	0.27	0.02	0.00	0.00	46.86	49.06	8.29	0.57	0.02
$0 \leq D < 0.00001$	3.90	0.27	0.02	0.00	0.00	99.99	100.00	8.78	0.58	0.02
$0.00001 \leq D < 0.0001$	4.81	0.27	0.02	0.00	0.00	99.99	100.00	11.17	0.61	0.02
$0.0001 \leq D < 0.001$	9.56	0.39	0.02	0.00	0.00	99.99	100.00	22.30	1.19	0.05
$0.001 \leq D < 0.01$	28.06	2.63	0.11	0.00	0.00	100.00	100.00	57.95	13.20	1.18
$0.01 \leq D$	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

	(k=3의 경우)					(k=4의 경우)				
	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8
$D < -0.01$			0.00	0.00	0.00					0.00
$-0.01 \leq D < -0.001$			0.00	0.00	1.44					0.00
$-0.001 \leq D < -0.0001$			0.00	0.00	8.69					0.00
$-0.0001 \leq D < -0.00001$			0.00	0.00	12.03					0.00
$-0.00001 \leq D < 0$			50.11	50.69	12.91					51.21
$0 \leq D < 0.00001$			100.00	100.00	13.59					100.00
$0.00001 \leq D < 0.0001$			100.00	100.00	17.77					100.00
$0.0001 \leq D < 0.001$			100.00	100.00	36.12					100.00
$0.001 \leq D < 0.01$			100.00	100.00	81.58					100.00
$0.01 \leq D$			100.00	100.00	100.00					100.00

$$CI(A) = CI(A_0^{(s)}) > CI(A_0^{(s-1)}) > \dots > CI(A_0^{(k)}) > \dots > CI(A_0^{(1)}). \quad (3.7)$$

SAS를 이용하여 이루어진 컴퓨터 모의실험은 요소의 수 n 의 값이 4부터 8까지의 각 경우에 대해 $CI(A) < 1.0$ 인 임의의 역수행렬(random reciprocal matrix)를 10,000개씩을 생성한 후 각 k 와 $D = CI(A) - CI(A_0^{(k)})$ 의 각 범위에 따라 발생된 비율을 측정하는 방식으로 이루어졌다. 모의실험에 사용된 프로그램은 부록 A에 제시되어 있으며, 모의실험 결과는 표 3.1과 같이 나타났다. 모의실험 결과에서 $k < (s-1)$ 인 경우 SAS에서의 유효숫자 처리방식을 고려한다면 식(3.7)이 성립하는 것으로 나타났다. 그러나 n 의 값이 4와 5일 때는 $s = 2$ 이므로 이보다 1이 작은 $k = 1$ 에서, n 의 값이 6과 7일 때는 $s = 3$ 이므로 이보다 1이 작은 $k = 2$ 에서, 그리고 n 의 값이 8일 때는 $s = 4$ 이므로 이보다 1이 작은 $k = 3$ 에서 공통적으로 $CI(A_0^{(k)})$ 가 $CI(A)$ 보다 1/10,000보다 더 커진 경우가 n 의 값이 4에서 8까지 각각 1.87%, 0.26%, 5.88%, 0.51%, 8.69% 발생하였는데 이러한 현상이 생긴 이유는 아마도 SAS에서 사용하고 있는 고유분해 방식과 복소수 고유값 처리 알고리즘 그리고 유효숫자 처리방식 등에 기인한 결합적 오차 때문이 아닌가 여겨진다. 그리고 기대에 반한 이러한 역현상을 일으킨 임의의 쌍대비교역수행렬 A 의 특징을 추적 연구해 본 바 일치성 지수가 아주 큰 것들, 다시 말하면 현실적으로는 거의 일어나지 않을 것들이 대부분을 차지하였다.

셋째, ' $i < j$ 이면 (B_i 의 원소들의 제곱의 총합)이 (B_j 의 원소들의 제곱의 총합)보다 크다'가 항상 성립된다는 점이다. 이는 $B = B_1 + B_2 + \dots + B_s$ 에서 $i < j$ 이면 B_i 가 B_j 보다 B 에 기여하는 몫이 크다는 것을 의미하는 것으로 B_k 이후의 항들은 크게 중요하지는 않은 하위 비교기준들에 의해 교란(perturbation)된 부분으로 해석될 수 있겠다.

넷째, $B^* = B_0^{(k)}$ 로부터 추정된 중요도벡터 w^* 는 $A_0^{(k)}$ 에 대수최소제곱법을 적용하여 추정된 중요도벡터와 동일하다는 점이다. 이의 수리적 증명은 부록 B에 남긴다.

다섯째, 식(3.2)를 보면 각 B_j 들은 $\mathcal{L}_{2j-1}, \mathcal{L}_{2j}$ 라는 서로 수직인 두 벡터와 관련이 되는데 이들을 통해 n 개 요소들을 2차원 좌표공간들 상에 위치시켜 볼 수 있다. 즉, 각 B_j 공간에서 i 번째 요소의 위치는 $(\mathcal{L}_{i,2j-1}, \mathcal{L}_{i,2j})$ 에 해당된다. 따라서 i 번째 요소는 s 개의 개별적 2차원 공간인 B_j 공간마다 하나의 점들과 대응된다. 이 공간내에서 점들의 위치를 통해 요소들 사이의 관계와 하위 비교기준의 객관성을 시각적으로 검토할 수 있다. 시각적 검토가 가능하다는 점이 본 연구에서 제안하는 추정방법의 한 특징으로 여겨질 수 있다. 참고로, 각 B_j 공간들은 기하적으로는 서로 독립인 2차원 공간들이기 때문에 시각적 해석에서는 이들의 독립성을 고려하여 요소들과 하위비교기준 사이의 관계를 해석할 수도 있다.

4. 수치 예

표 4.1의 예는 Saaty(2001)에서 인용한 것으로, 주택구입에서 고려해야 할 여덟 가지 요소들에 대한 중요도를 측정하기 위한 현실적 쌍대비교역수행렬이다. 부록 C에는 이 자료에 대해 본 연구에서 제안하는 방법을 적용하여 처리하는 SAS 프로그램이 제시되어 있는데 이를 실행시켜 얻어진 수치결과의 일부를 요약하여 정리한 것이 표 4.2이고, 부산물로 얻어진 R 행렬의 산점도들이 그림 4.1에 주어져 있다. 이들을 차례로 해석하면 다음과 같다.

표 4.1: 주택구입시 고려해야 할 요소들에 대한 쌍대비교 역수행렬

	Size	Trans.	Nbrhd.	Age	Yard	Modern	Cond.	Finance
Size	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4
Trans.	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7
Nbrhd.	1/3	3	1	6	3	4	1/2	1/5
Age	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8
Yard	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6
Modern	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6
Cond.	3	5	2	7	5	5	1	1/2
Finance	4	7	5	8	6	6	2	1

* 출처: Saaty(2001)

표 4.2: 예제자료 표 4.1에 대해 분석한 결과의 요약

MAX. EIGENVALUE OF A = 8.81173① CI OF A = 0.11596② CR OF A = 0.08224③									
PRIORITIES FROM A									
④ BY EV-METHOD 0.17474 0.06202 0.10317 0.01930 0.03384 0.04124 0.22066 0.34502									
⑤ BY LLS-METHOD 0.17119 0.06135 0.10675 0.01894 0.03483 0.04143 0.22314 0.34237									
K	EVA_B'B	PCT.EVA_B'B	LAMBDA	PCT.LAMBDA	MAX. EV OF A0(K)	CI OF A0(K)	CI DIFF. OF A0(K)	MAX. EV. CI OF E0(K)	CI OF E0(K)
⑦									
1	61.19703	97.24162	7.82285	80.48787	8.61730	0.08819	0.02778	8.21084	0.03012
2	1.22866	99.19394	1.10845	91.89247	8.75391	0.10770	0.00826	8.06284	0.00898
3	0.50083	99.98975	0.70769	99.17378	8.81110	0.11587	0.00009	8.00080	0.00011
4	0.00645	100.00000	0.08030	100.00000	8.81173	0.11596	-0.00000	8.00000	0.00000
K PRIORITIES BY EV-METHOD									
1	⑧ 0.17687	0.06228	0.10343	0.02221	0.03320	0.03831	0.21743	0.34628	
2	0.17515	0.06276	0.10220	0.01981	0.03295	0.04145	0.21736	0.34832	
3	0.17478	0.06192	0.10326	0.01933	0.03375	0.04136	0.22068	0.34493	
4	0.17474	0.06202	0.10317	0.01930	0.03384	0.04124	0.22066	0.34502	
K PRIORITIES BY LLS-METHOD									
1	⑨ 0.18066	0.06098	0.10804	0.01988	0.03411	0.03936	0.22409	0.33289	
2	0.17105	0.06199	0.10577	0.01911	0.03431	0.04139	0.22714	0.33924	
3	0.17123	0.06127	0.10682	0.01895	0.03480	0.04148	0.22319	0.34226	
4	0.17119	0.06135	0.10675	0.01894	0.03483	0.04143	0.22314	0.34237	
R-MATRIX (EIGENVECTOR MATRIX OF B'B)									
	0.43071	0.29066	-0.24716	0.53355	-0.53719	-0.28630	-0.07970	0.08572	
	0.06946	0.48646	-0.30671	-0.41082	-0.23973	0.30774	0.40283	-0.42573	
	0.24670	0.35126	-0.50645	-0.05052	0.67418	-0.06759	-0.24172	0.19800	
	-0.42394	0.39082	0.11416	0.55524	0.16056	0.37837	0.33304	0.25758	
	-0.19585	0.41332	0.37334	0.13319	0.19762	-0.43582	-0.22400	-0.59542	
	-0.11652	0.46566	0.32380	-0.46382	-0.23472	-0.19069	-0.15063	0.57919	
	0.45008	0.12278	0.40095	0.05245	0.00671	0.63781	-0.45056	-0.09480	
	0.56087	0.00000	0.41271	-0.00888	0.28190	-0.20615	0.62142	0.08298	

본 쌍대비교역수행렬의 최대고유값①은 8.81173으로 일치성지수②는 $CI = 11.60\%$, 일치성비율③은 $CR = 8.22\%$ 이었다. 일치성의 정도에 관해 가장 흔하게 사용되는 기준인 10%를 적용한다면 일치성지수의 입장에서는 일치성이 미약한 자료이기 때문에 이에 근거한 중요도 추정은 신뢰할 수 없다. 그러나 일치성비율의 입장에서는 일치성이 어느 정도 만족되는 것으로 볼 수 있기 때문에 이 자료에 근거하여 중요도를 충분히 추정할 수 있겠다. 만일 본 쌍대비교역수행렬을 수용하고, 이 자료에 대해 전통적인 추정방법인 고유벡터법과 대수최소제곱법을 적용하여 추정된 중요도벡터들④⑤에 의하면 여섯 번째 요소 Finance가 가장 중요하고 네 번째 요소 Age가 가장 덜 중요한 것으로 나타났다.

이 자료에 대해 본 연구에서 제안된 방법으로 첫 번째 항까지 조정하였다면 $CI(A_0^{(1)}) = 8.82\%$ ⑥, $R^2(A_0^{(1)}) = 97.24\%$ ⑦이었다. 이로부터 일치성기준, 설명력기준 어느 기준으로도 첫 번째 항까지로 조정된 쌍대비교역수행렬이 적절함을 알 수 있다. 이에 고유벡터법을 적용하여 추정된 중요도벡터⑧와 대수최소제곱법을 적용하여 추정된 중요도벡터⑨를 살펴보면 조정하지 않은 경우와 큰 차이를 보이지 않는다. 이는 제거된 오차의 미미함과 관계가 있겠다. 가장 큰 변화가 있는 것은 대수최소제곱법을 적용했을 때 첫 번째 요소인 Size의 중요도에 0.00947 만큼 차이가 생겼다는 것이다.

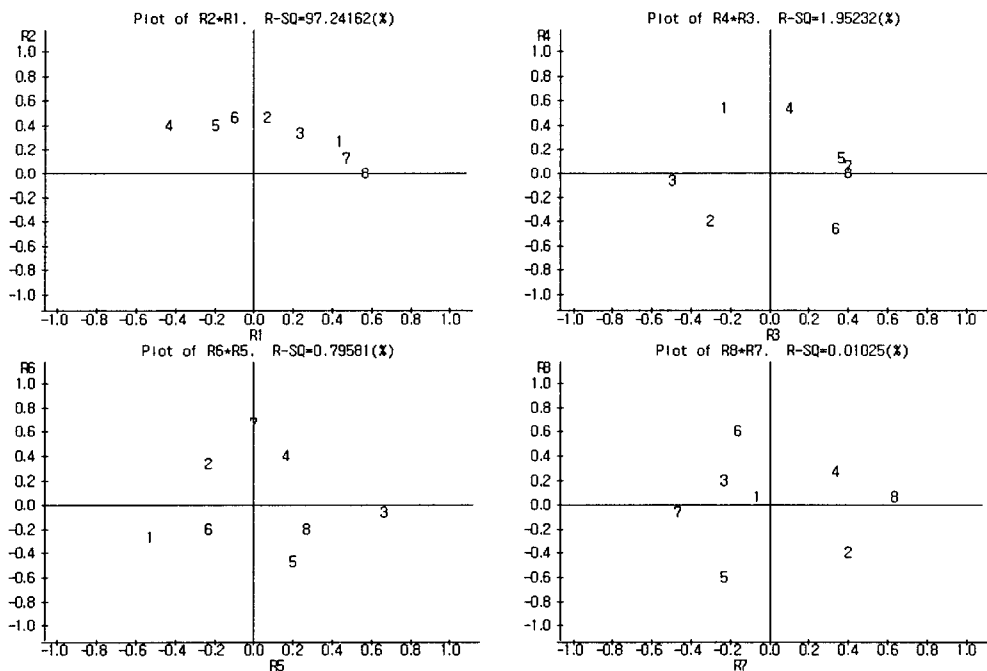


그림 4.1: 예제자료 표 4.1에 대해 분석결과 그림

그림 4.1에 제시된 네 개의 산점도 플롯들 중 첫 번째 B_1 공간의 설명력이 97.24%로 다른 공간들에 비해 압도적으로 높았다. 이 공간에서는 여덟 개의 요소점들이 거의 일직선 근

처에 있는 것으로 보아 요소들의 쌍대비교시 주관적으로 적용된 비교기준은 거의 1차원적 개념의 것으로 보이며, 이에 거의 충실한 쌍대비교가 이루어진 것을 알 수 있다. B_3, B_4 공간의 설명력은 0.80%와 0.01%로 아주 미약하였으며, 이 공간들에서 요소점들의 흩어진 양상이 무규칙적인 것으로 보아 오차로 처리해도 무방할 정도의 하위 비교기준인 것으로 보인다. 그리고 B_2 공간에서 요소점들의 흩어진 양상이 원형을 띠는 것으로 보아 요소들 사이에 물고 물리는 현상을 보이는 하위 비교기준이 존재하고 미약하게나마 작용하였음을 알 수 있다. 그러나 설명력이 1.95%밖에 안 되는 것으로 보아 이 하위 비교기준도 쌍대비교값에 큰 효과를 미치지 못하였음을 알 수 있다.

다음 표 4.3은 竹内 啓와 藤野和建(1988)에 있는 왜대칭행렬자료(1986년 일본 프로야구팀간 약자/강자 관계의 세기)를 저자가 지수변환을 통해 의도적으로 만들어낸 쌍대비교역수행렬이다. 이 자료는 최대고유값이 8.89705, 일치성지수 $CI = 0.57941$, 일치성비율 $CR = 0.46727$ 로서 불일치성이 극도로 심한 경우라고 할 수 있다.

표 4.3: 불일치성이 극도로 심한 가상의 쌍대비교역수행렬

1.00000	1.89648	0.94365	2.63267	1.07681	0.16696
0.52729	1.00000	0.50763	2.71285	2.26144	0.55101
1.05971	1.96993	1.00000	0.12771	2.26144	1.72633
0.37984	0.36862	7.83029	1.00000	0.61631	1.32313
0.92867	0.44220	0.44220	1.62255	1.00000	3.87289
5.98945	1.81484	0.57926	0.75578	0.25821	1.00000

제안된 추정방법에 따라 제1항까지로 조정한 결과 일치성지수는 $CI = 0.36571$ 로 조정 전에 비해 0.21369만큼 줄어들었다. 조정 전/후의 중요도 추정값은 다음과 같다.

[조정 전]		[제안된 방법에 따라 조정한 후]	
고유벡터법	대수최소제곱법	고유벡터법	대수최소제곱법
0.14843	0.16208	0.17763	0.16384
0.15000	0.16387	0.15110	0.16381
0.14814	0.16774	0.17019	0.17080
0.20462	0.16354	0.18709	0.16350
0.16590	0.17033	0.13081	0.16710
0.18292	0.17244	0.18317	0.17096

조정 후에는 고유벡터법에 의한 추정값과 대수최소제곱법에 의한 추정값의 차이가 현저히 줄어들었음을 볼 수 있다.

5. 결론 및 향후 연구방향

AHP에서 의사결정 요소들의 중요도를 추정할 때 지금까지는 쌍대비교행렬 그 자체에 대해 고유벡터법 또는 대수최소제곱법을 적용해 왔다. 본 연구에서는 이러한 통상적인 방법보다는 왜대칭행렬의 고유분해를 통해 쌍대비교행렬을 조정한 후 조정된 쌍대비교행렬에 대해 고유벡터법 또는 대수최소제곱법을 적용하는 추정법을 제안하였다. 그리고 이 추정법이 가지는 여러가지 이점과 의미를 이론적 근거와 실제 사용 예를 통해 보이고자 하였다. 본 연구의 결과는 불일치성 높은 쌍대비교행렬이 주어진 경우 불일치성을 줄이는데 특히 유용하게 활용될 수 있을 것이다.

본 연구에서 제안하는 방법이 지니는 특징 몇 가지를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 쌍대비교시 무의식적으로 포함되었던 크게 중요하지는 않은 비교기준들의 효과를 쌍대비교행렬의 조정을 통해 제거할 수 있다는 점이다.

둘째, 고유분해 기법을 사용한 고유벡터법의 매력과 왜대칭행렬에 오차의 개념을 도입한 대수최소제곱법의 매력이 모두 가미된 중요도 추정법이라는 점이다. 그리고 이는 측정 이론적 측면에서도 부합될 수 있다는 점이다.

셋째, 다변량 통계이론에서의 주성분분석, 인자분석 등과 관련성을 가진다는 점이다. 이에 따라 차원축약을 위한 기준으로 $R^2(A_0^{(k)})$ 라는 설명력 기준이 제시될 수 있다는 점이다.

넷째, B_j 공간들 내에서의 점들의 위치를 통해 요소들 사이의 관계와 하위 비교기준의 객관성을 시각적으로 검토할 수 있다는 점이다.

그리고, 본 연구에 따른 후속적 연구가 당장 필요한 부분 몇 가지를 제시하면 다음과 같다.

첫째, 쌍대비교행렬의 조정은 비교기준의 조작적 정의와 관련된 것으로 인자분석 모형과 밀접한 연관성을 지닌다. 이에 관한 좀 더 심도 있는 논의가 차후 연구과제로 남는다.

둘째, $A_0^{(k)} = \exp(B_0^{(k)})$ 가 $A = \exp(B)$ 보다 '덜 불일치'하다는 점을 본 연구에서는 컴퓨터 모의실험을 통해 보였다. 이의 수리적 증명도 필요하다.

셋째, B_j 공간들 내에서의 점들의 위치와 관련하여 요소들 사이의 물고물리는 관계 패턴을 좀 더 연구할 필요가 있겠다.

넷째, 물론 본 연구에서 제시된 방법을 활용할 수 있는 컴퓨터 프로그램을 좀 더 다듬는 작업도 필요하다.

참고문헌

- [1] 김성희, 정병호, 김재경 (1999). 개정판 의사결정분석 및 응용, 영지문화사.
- [2] 남덕현, 이광진 (1999). 스포츠 수리과학, 번역본. 신광문화사.
- [3] 박용성, 박태근 (2001). AHP를 위한 의사결정론, 자유아카데미.
- [4] 竹内 啓, 藤野和建 (1988). 스포츠의數理科學, 共立出版株式會社.

- [5] Thomas L. Saaty (1980). The Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill.
- [6] Thomas L. Saaty (2001). "Decision-Making with the AHP: Why is The Principal Eigenvector Necessary," ISAHF 2001, Berne, Switzerland, August 2-4, 2001.

[2003년 3월 접수, 2003년 10월 채택]

부록 A: $A(k)$ 가 A 보다 불일치가 덜 함을 보이기 위한 SAS 시뮬레이션 프로그램

```

proc iml;
/* n is the number of attributes */ /* MM is the number of iterations */
n=8; MM=10000; s=INT(n/2);result=J(MM,s+2,0);
/* Start iterations */
m=1;
DO WHILE (m <= MM);
  A=I(n); /* Initial Setting of a matrix A */
  DO i=1 TO n; DO j=(i+1) TO n; /* Get a random reciprocal matrix A */
    u=UNIFORM(12345); v=UNIFORM(54321); X=INT(9*u+1);
    IF v<0.5 THEN DO; A[i,j]=X; A[j,i]=1/X; END; ELSE DO; A[j,i]=X; A[i,j]=1/X; END;
  END; END;
  /* Calculate the maximum eigenvalue and Consistent Index of A */
  VALUE_A=MAX(EIGVAL(A)); CI_A=(VALUE_A-n)/(n-1);
  IF(CI_A>0.5) THEN GOTO ESC;
  B=LOG(A); /* Obtain a matrix B from A and Check the eigenvalues of BtB */
  EVA_BT B = EIGVAL(B'*B);
  DO i=1 to n; IF EVA_BT B[i]<0 then goto ESC; end;
  EVE_BT B = EIGVEC(B'*B);
  LAMBDA = SQRT(EVA_BT B); *PRINT m A B EVA_BT B EVE_BT B LAMBDA;
  m=m+1;
  RBR=(EVE_BT B)'*B*(EVE_BT B);
  DO J=1 TO (n-1) BY 2;
    IF RBR[J,J+1]<0 THEN DO; T=EVE_BT B[J+1]; EVE_BT B[J+1]=EVE_BT B[J]; EVE_BT B[J]=T; END;
  END;
  RBR=(EVE_BT B)'*B*(EVE_BT B); * PRINT RBR[FORMAT=10.5];
  BB=J(n,n,0);
  %macro AAA;
    %do k=1 %to 10;
      if &k<=s then do;
        B&k=LAMBDA [2*&k-1]*(EVE_BT B [2*&k-1]*EVE_BT B [2*&k]' - EVE_BT B [2*&k]*EVE_BT B [2*&k-1]');
        A&k=EXP(B&k); BB=BB+B&k; BB&k=BB;
        AA&k=EXP(BB&k); * PRINT B&k A&k BB&k AA&k;
        value_AA&k=max(eigval(AA&k)); CI_AA&k=(value_AA&k-n)/(n-1);
        diff=CI_A-CI_AA&k; * print CI_A CI_AA&k diff;
        result[m-1,&k+2]=CI_AA&k;
      end;
      result[m-1,1]=n; result[m-1,2]=CI_A;
    %end;
  %mend;
  %AAA;
ESC:
END;
%MACRO BBB; * print result;

```

```

VNAME={N CI_A}; %DO K=1 %TO 10; if &k<=s then do; TEMP={CI_AA&k}; VNAME=VNAME||TEMP; END; %END;
%MEND;
%BBB;
CREATE SIM_RESULT FROM RESULT [COLNAME=VNAME]; APPEND FROM RESULT; CLOSE SIM_RESULT; QUIT;
PROC FORMAT;
VALUE CLAS 1="          DIFF<-0.01 " 2="  -0.01<=DIFF<-0.001 " 3="  -0.001<=DIFF<-0.0001 "
4="  -0.0001<=DIFF<-0.00001" 5=" -0.00001<=DIFF< 0 " 6="          0<=DIFF< 0.00001"
7="  0.00001<=DIFF< 0.0001 " 8="  0.0001<=DIFF< 0.001 " 9="  0.001<=DIFF< 0.01 "
10="          0.01<=DIFF          ";
%MACRO DDD(S);
DATA TEMP; SET SIM_RESULT;
%DO K=1 %TO &S;
TMP_&K=CI_A-CI_AA&K;
IF TMP_&K<-0.01 THEN CLAS&K=1; ELSE IF TMP_&K<-0.001 THEN CLAS&K=2;
ELSE IF TMP_&K<-0.0001 THEN CLAS&K=3; ELSE IF TMP_&K<-0.00001 THEN CLAS&K=4;
ELSE IF TMP_&K< 0 THEN CLAS&K=5; ELSE IF TMP_&K< 0.00001 THEN CLAS&K=6;
ELSE IF TMP_&K< 0.0001 THEN CLAS&K=7; ELSE IF TMP_&K< 0.001 THEN CLAS&K=8;
ELSE IF TMP_&K< 0.01 THEN CLAS&K=9; ELSE CLAS&K=10;
%END;
PROC FREQ DATA=TEMP; TABLES CLAS1-CLAS&S; FORMAT CLAS1-CLAS&S CLAS.; RUN;
%MEND;
%DDD(4); RUN;

```

부록 B: ‘ $B^* = B_0^{(k)}$ 로부터 추정된 중요도벡터 w^* 는 $A_0^{(k)}$ 에
대수최소제곱법을 적용하여 추정된 중요도벡터와 동일함’의 증명

$B^* = B_0^{(k)}$ 의 양변을 벡터로 표현하면 $l^t \mathbf{1} - \mathbf{1}^t l = \sum \lambda_i (r_{2i-1}^t r_{2i}^t - r_{2i}^t r_{2i-1}^t)$ 가 되는데 이
의 양변에 벡터 $\mathbf{1}$ 을 오른쪽에서 곱한 후 n 으로 나누면 $l = (l^t \mathbf{1}/n) \mathbf{1} + \sum \lambda_i \{(r_{2i}^t \mathbf{1}/n) r_{2i-1} - (r_{2i-1}^t \mathbf{1}/n) r_{2i}\}$ 라는 관계가 얻어진다. 이의 양변에 대수(exp)변환을 취하면 다음과 같다.

$$w^* = \exp\left[\left(\frac{l^t \mathbf{1}}{n}\right) \mathbf{1} + \sum_{i=1}^k \lambda_i (r_{2i}^t \mathbf{1}/n) r_{2i-1} - (r_{2i-1}^t \mathbf{1}/n) r_{2i}\right] = c w_1 \circ w_2 \circ \cdots \circ w_k$$

여기서, w_i 와 c 는 $w_i = \exp[\lambda_i \{(r_{2i}^t \mathbf{1}/n) r_{2i-1} - (r_{2i-1}^t \mathbf{1}/n) r_{2i}\}]$, $c = 1/\{(w_1 \circ w_2 \circ \cdots \circ w_k)^t \mathbf{1}\}$
이다.

참고로, 위의 수식에서 나타나는 $l^t \mathbf{1}/n$, $r_{2i-1}^t \mathbf{1}/n$, $r_{2i}^t \mathbf{1}/n$ 은 각각 l , r_{2i-1} , r_{2i} 벡터의 원
소들의 산술평균들이기 때문에 결국은 w_i 는 $A_i = \exp(B_i)$ 에 대수최소제곱법을 적용하여
추정된 중요도벡터와 같게 된다. 따라서 $B_0^{(k)} = B_1 + B_2 + \cdots + B_k$ 로 추정된 중요도벡터
 w^* 는 B_i 로 추정된 중요도벡터들의 하다마드곱을 규준화한 것과 같음을 알 수 있다.

부록 C: 제안된 방법에 따라 SAATY의 예(4장의 표 4.1)를 분석하는 SAS
프로그램

```

PROC IML;
X1=1;X2=2;X3=3;X4=4;X5=5;X6=6;X7=7;X8=8;X9=9;Y2=1/2;Y3=1/3;Y4=1/4;Y5=1/5;Y6=1/6;Y7=1/7;Y8=1/8;Y9=1/9;
A= (X1||X5||X3||X7||X6||X6||Y3||Y4) //(Y5||X1||Y3||X5||X3||X3||Y5||Y7)
  //(Y3||X3||X1||X6||X3||X4||Y2||Y5) //(Y7||Y5||Y6||X1||Y3||Y4||Y7||Y8)
  //(Y6||Y3||Y3||X3||X1||Y2||Y5||Y6) //(Y6||Y3||Y4||X4||X2||X1||Y5||Y6)

```

```

// (X3||X5||X2||X7||X5||X5||X1||Y2) // (X4||X7||X5||X8||X6||X6||X2||X1);
B=LOG(A); PRINT A[FORMAT=10.5],, B[FORMAT=10.5]; N=NROW(A); S=INT(N/2);
RI = {0 0 0.58 0.90 1.12 1.24 1.32 1.41 1.45 1.49 1.51 1.48 1.56 1.57 1.59};
EVA_A=EIGVAL(A); CI_A=(MAX(EVA_A)-N)/(N-1); CR_A=CI_A/RI[N];
PRINT EVA_A[FORMAT=10.5] CI_A[FORMAT=10.5] CR_A[FORMAT=10.5];
%MACRO WGT(A);
  EVE_&A = EIGVEC(&A); LOC = LOC(EVA_&A[,1]>=EVA_&A[<,1]);
  EV_WT_&A = EVE_&A[,LOC]/EVE_&A[+,LOC];
  GEO = J(N,1,1); DO J=1 TO N; GEO=GEO#&A[,J]; END; GEOMEAN = GEO##(1/N);
  LLS_WT_&A = GEOMEAN/GEOMEAN[+];
  PRINT EVE_&A[FORMAT=10.5],, EV_WT_&A[FORMAT=10.5] LLS_WT_&A[FORMAT=10.5];
%MEND;
%WGT(A);
EVA_BT B = EIGVAL(B'*B); EVA_BT B = EVA_BT B-EVA_BT B*(EVA_BT B<0); LAMBDA = SQRT(EVA_BT B);
PCT_EVA_BT B=J(N,1,0); PCT_LAMBDA=J(N,1,0);
DO I=1 TO S;
  TEMP1=0; TEMP2=0; DO J=1 TO I; TEMP1=TEMP1+EVA_BT B[2*J-1]; TEMP2=TEMP2+LAMBDA[2*J-1]; END;
  PCT_EVA_BT B[2*I-1]= TEMP1/EVA_BT B[+]*2*100 PCT_EVA_BT B[2*I]= PCT_EVA_BT B[2*I-1];
  PCT_LAMBDA[2*I-1] = TEMP2/LAMBDA[+]*2*100 PCT_LAMBDA[2*I] = PCT_LAMBDA[2*I-1];
END;
PRINT EVA_BT B[FORMAT=10.5] PCT_EVA_BT B[FORMAT=10.5] LAMBDA[FORMAT=10.5] PCT_LAMBDA[FORMAT=10.5];
EVE_BT B = EIGVEC(B'*B); RBR=(EVE_BT B)'*B*(EVE_BT B);
DO J=1 TO (N-1) BY 2;
  IF RBR[J,J+1]<0 THEN DO; T=EVE_BT B[J,J+1]; EVE_BT B[J,J+1]=EVE_BT B[J,J]; EVE_BT B[J,J]=T; END;
END;
RBR=(EVE_BT B)'*B*(EVE_BT B);
PRINT RBR[FORMAT=10.5],, EVE_BT B[FORMAT=10.5];
BB=J(N,N,0);
%MACRO AAA;
  %DO K=1 %TO 15; IF &K<=S THEN DO;
    B&K=LAMBDA[2*&K-1]*(EVE_BT B[,2*&K-1]*EVE_BT B[,2*&K]'-EVE_BT B[,2*&K]*EVE_BT B[,2*&K-1]');
    A&K=EXP(B&K); BB=BB+B&K; BB&K=BB; AA&K=EXP(BB&K); EE&K=A#(1/AA&K);
    PRINT B&K[FORMAT=10.5],, A&K[FORMAT=10.5],,
      BB&K[FORMAT=10.5],, AA&K[FORMAT=10.5],, EE&K[FORMAT=10.5];
    EVA_AA&K = EIGVAL(AA&K); CI_AA&K=(EVA_AA&K[<,1]-N)/(N-1); DIFF = CI_A-CI_AA&K;
    PRINT EVA_AA&K[FORMAT=10.5] CI_AA&K[FORMAT=10.5] CI_AA&K[FORMAT=10.5] DIFF[FORMAT=10.5];
    %WGT(AA&K);
    EVA_EE&K = EIGVAL(EE&K); CI_EE&K=(EVA_EE&K[<,1]-N)/(N-1);
    PRINT EVA_EE&K[FORMAT=10.5] CI_EE&K[FORMAT=10.5]; END;
  %END;
%MEND;
%AAA;
NUM=1:N; R=NUM'|EVE_BT B;
%MACRO VAR; NAME={NUMBER}; %DO K=1 %TO 15; IF &K<=N THEN NAME=NAME|{|R&K}; %END; %MEND; %VAR;
CREATE RMATRIX FROM R[COLNAME=NAME]; APPEND FROM R; CLOSE RMATRIX; QUIT;

```

An Estimating Method for Priority Vector in AHP, Using the Eigen-Decomposition of a Skew-Symmetric Matrix

Kwangjin Lee ¹⁾

ABSTRACT

Generally to estimate the priority vector in AHP, an eigen-vector method or a logarithmic least square method is applied to pairwise comparison matrix itself. In this paper an estimating method is suggested, which is applied to pairwise comparison matrix adjusted by using the eigen-decomposition of skew-symmetric matrix. We also show theoretical background, meanings, and several advantages of this method by example. This method may be useful in case that pairwise comparison matrix is quite inconsistent.

Keywords: AHP, pairwise comparison matrix, priority estimation, eigen-vector method, logarithmic least square method, eigen-decomposition of a skew-symmetric matrix

1) (302-729) Associate Professor, Department of Information Statistics, Mokwon University
E-mail : leekj@mokwon.ac.kr