

증명학습에서 생성-수렴 수업 모형의 개발과 적용

이종희* · 김부미**

본 연구에서는 중학생들이 증명학습을 할 때 범하는 수학적 오류를 교수학적으로 처방할 뿐만 아니라 올바른 증명의 역할과 본질을 이해하여 증명과정을 스스로 구성할 수 있도록, ‘생성-수렴 모형에 의한 증명학습’이라는 증명 학습-지도 방법을 제시하였다. 이 수업모형을 8학년 학생 160명을 대상으로 10주 동안 40시간에 걸쳐 여러 가지 사각형의 성질과 관계를 학습할 때 적용하여 학생들의 증명능력 향상과 오류 교정에 미치는 효과 및 학생들의 정당화 유형 양상으로 세분화하여 그 결과를 살펴보았다. 첫째, 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 실시한 실험집단의 학생들은 통제집단의 학생들보다 증명능력 검사에서 평균점수는 높았다. 그러나 유의수준 .01에서 통계적 검정을 실시한 결과, 두 집단 간의 증명능력은 유의적인 차이가 없었다. 둘째, 학생들은 논증기하 영역에서 증명을 할 때 범하는 오류 교정율에 있어서 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 한 학생들의 오류 교정율이 통제집단보다 더 큰 폭으로 감소하였다. 셋째, 학생들의 정당화 유형은 실험집단과 통제집단 모두 경험적 정당화에서 분석적 정당화로의 이행을 보였으나, 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 한 학생들이 통제집단의 학생들보다 분석적 정당화를 구성하는 학생들이 현저하게 증가하였다.

I. 서 론

수학은 실제적인 문제에서 개념이나 아이디어를 얻어내어 이상화하고, 관련 있는 여러 개념들을 체계화하여 그 문제에 대한 가능한 해를 직관적으로 이끌어내는 동시에 그 예상을 연역적으로 증명하는 학문이다. 수학을 한다는 것은 수학적 힘을 발휘하는 것으로 해석될 수 있으며, NCTM(2000)과 제7차 수학과 교육과정에서는 학교 수학이 지향해야 할 바로 수학적 힘의 신장을 강조하고 있다. 학생들이 문제

를 해결하기 위해 목적에 따라 수학적 지식을 창의적이고 논리적으로 사용할 수 있는 수학적 힘을 갖도록 하기 위해서는 수학적 추론 능력의 배양은 필수적이다. 이 때, 추론 능력은 발견의 논리인 귀납과 유추 등과 함께 강력한 정당화의 논리인 연역적 추론 능력을 개발해야 함을 의미한다.

특히, 학교 수학에서 증명은 학생들이 수학적 명제를 추측하고 이를 확인하는 과정에서 수학적 증거와 논리를 기초로 하여 추측한 명제의 타당성을 설명 또는 정당화하는 방법이라 할 수 있다. 이러한 포괄적인 의미의 증명은

* 이화여자대학교(jonghee@mm.ewha.ac.kr)

** 이화여자대학교대학원(bumi71@ewha.ac.kr)

발견, 입증, 정당화, 체계화, 의사소통 등의 맥락에서 수학 활동의 핵심이며, 추론 능력의 배양 과정과도 밀접한 관련이 있다고 할 수 있다. 이에, 수학교육에서 증명의 본질, 역할, 그리고 학습-지도 방안 등에 대한 다양한 연구들이 계속해서 수행되고 있다. 그 예로, Galbraith (1981), Borasi(1996) 등은 증명학습에서의 수학적 오류를, de Villiers(1991), Hanna와 Janke (1996) 등은 수학에서 증명의 역할을, Harel과 Sowder(1998), Lulu와 Celia(2000), Housman과 Porter(2003) 등은 정당화로서의 증명 유형을, Knuth(2002), Weber(2002) 등은 증명 학습-지도 방안을 제시하고 있다.

우리나라의 수학과 교육과정에서 증명은 7학년 과정에서 배운 삼각형의 합동조건을 기초지식으로 하여 8학년 과정에 도입되며, 이후에 수학에서 중요한 분야가 된다. 증명 학습-지도의 출발점인 중학교 논증기하 단원의 교육 목표는 증명을 활용하여 추론의 참·거짓을 판단함으로써 완전성을 추구하는 능력 배양과 정신적 도아의 측면에서 학생들의 논리적 추론 능력 배양에 있다. 구체적으로 살펴보면, 8학년의 논증기하 영역의 지도 목표는 평면도형의 성질을 추론하는 방법의 이해 및 논리적으로 고찰하는 사고 능력의 신장, 9학년은 직각삼각형, 원의 성질 규명 및 논리적으로 고찰하는 사고 능력의 신장으로 규정되어 있다. 이를 위하여, 8학년 학생들은 삼각형 및 사각형의 여러 가지 성질, 삼각형의 닮음조건을 표현하는 명제를 증명함으로써 연역적 논증을 익히고, 평면 도형의 여러 가지 명제에 대한 증명 문제를 이미 배운 정의, 정리나 명제들을 활용하여 해결할 수 있어야 한다. 그리고 9학년 학생들은 직각 삼각형과 원의 여러 가지 성질을 학습할 때 증명을 활용하여 문제를 해결함으로써 직각삼각형, 원의 성질을 논리적으로 규명하게 된다.

그러나, 류성립(1993, 1998), 전현미(1996), 나귀수(1998), 서동엽(1999), 조완영(2000), 노은정(2002) 등의 연구들에 의하면, 학생들은 논증기하 영역의 증명문제를 해결할 때 증명의 의미를 이해하지 못하고 증명하기를 어려워한다고 한다. 특히, 학생들은 증명이 도입되는 중학교 기하단원을 학습할 때, 도형에 대한 기본적인 명제와 이의 적용을 자유롭게 하지 못하며, 가정과 결론을 부적절하게 구분하거나 증명 문제 해결 전략을 적절하게 사용하지 못하고, 증명 과정에서 기호화나 문장화 능력이 부족하기 때문에 다양한 수학적 오류를 범한다고 한다. 이에, 증명 학습-지도 방안이 지속적으로 연구됨에도 불구하고 여전히 많은 학생들이 스스로 증명을 구성하며 이를 이해하는 것을 어려워한다. 이러한 현상이 나타나는 원인을 다음과 같이 해석할 수 있다.

첫째, 중학교 수학 교육과정 중 ‘8·나’ 단계의 도형 영역의 학습목표가 “삼각형의 합동 조건, 닮음 조건을 이용하여 간단한 도형의 성질을 증명”하는 것으로 되어 있는 점에서 알 수 있듯이, 학교 수학에서의 증명은 정리를 확립하는 수단이라는 기존의 수리철학의 영향을 여전히 받고 있기 때문이다(우정호 외, 2003). 이는 Lakatos(1976)의 준경험주의나 사회적 구성주의에 입각한 다양한 증명 학습-지도 방법 등이 논의되고 있지만, 이를 학교 수학 수업에 반영할 수 있는 일반적이나 구체적인 방법에 대한 연구가 부족한 현실에 기인한 것으로 볼 수 있다. 이러한 맥락에서, 수학적 진리의 발견과 입증의 차원을 넘어서 학생 주도적으로 사고실험을 하여 수학적 지식을 구성할 수 있으며 수업 현장에 적용 가능한 보다 실제적인 증명 학습-지도 방법과 사회적인 합의과정에서 의사소통하고 정당화하는 이해의 도구로서의 증명학습-지도를 위한 보다 구체적인 방법이

필요하다. 덧붙여, 추측하고 검사하고 증명하는 수학의 탐구 과정을 경험할 수 있는 새로운 증명 학습-지도 방법에 대한 연구가 보다 활성화 될 필요가 있다.

둘째, 많은 국내의 연구들이 분석적 사고과정을 통한 증명방법의 발견, 단계적인 상세화를 통한 증명의 구조 파악, 증명학습을 안내하기 위한 팔호 넣기 증명, 사고실험을 통한 증명 학습 등 다양한 증명 학습-지도 방안을 제안은 하고 있으나, 수업 모형의 개발과 같은 실제 현장에 구체적으로 적용하는 방법과 그 효과를 검증하는 연구가 부족하기 때문이다. 따라서, 학생들의 증명능력을 증진시킴과 동시에 기존의 수업 효과를 극대화시킬 수 있는 구체적인 증명 학습-지도 방법을 연구하고 이를 일반화 할 수 있도록 그 효과를 검증할 필요가 있다.

셋째, 앞서 제시한 국내의 선행 연구들은 학생들의 다양한 증명능력의 부족에 대해서는 많은 보고를 하고 있지만, 그 어려움의 배경이 될 수 있는 학생들의 증명에서의 정당화 유형이나 그 역할에 대한 인식 상황을 분석한 구체적인 연구가 부족한 것으로 보인다. 예를 들어, 수학 교사들은 증명이 필요하다고 생각하지만 학생들은 다양한 예에 의한 측정을 통해 증명이 성립하는 것을 보이면 연역적 증명이 필요하다고 생각하지 않을 때가 있다. 학생들의 현재 수준에서 출발하여 연역적 정당화로서의 증명을 학습-지도해야 한다는 관점에서 볼 때, 학생들의 증명에 대한 의미를 어떻게 이해하고 있는지를 살펴보는 것과 학생들이 증명의 필요성을 인식할 수 있도록 그들의 경험을 바탕으로 한 정당화 유형에 대한 연구는 필요하다.

본 연구는 이러한 문제의식에서 출발하여 증명능력의 신장과 보다 탐구적이며 학생주도적인 증명 학습-지도 방법을 개발하여 이를 교육 현장에 적용·검증하는 것을 목적으로 한다. 따라서 본 연구는 중학생들이 증명학습을 할 때 범하는 수학적 오류를 교수학적으로 처방할 뿐만 아니라 올바른 증명의 역할과 본질을 이해하여 증명과정을 스스로 구성할 수 있도록, ‘생성-수렴 모형에 의한 증명학습’¹⁾이라는 증명 학습-지도 방법을 제시하려고 한다. 또한, 이를 학교현장에 적용한 결과를 학생들의 증명능력 향상과 오류에 미치는 효과 및 학생들의 정당화 유형과 증명의 역할에 대한 인식의 양상으로 세분화하여 살펴보고자 한다. 이상에서 논의한 연구의 필요성과 목적에 근거하여, 본 연구에서 밝히고자 하는 연구문제는 다음과 같다.

첫째, 생성-수렴 모형에 의한 증명학습은 증명 능력 향상에 효과가 있는가?

둘째, 생성-수렴 모형에 의한 증명학습은 중학생들의 증명 오류에 어떠한 영향을 미치는가?

셋째, 생성-수렴 모형에 의한 증명학습은 학생들의 정당화 유형과 증명의 역할에 대한 인식의 양상에 어떤 영향을 주는가?

II. 이론적 배경

본 장은 크게 수학적 증명과 수학적 탐구과정으로서의 증명학습을 위한 수업 모형 개발로 이루어져 있다. 수학적 증명 영역은 정당화와 증명의 역할, 증명학습에서 학생들의 오류와 증명 학습-지도 방법으로 세분화하여 고찰하고, 탐구지향적 증명학습에서의 수업모형 개발 영

1) 본 연구에 의해 개발된 수업 모형으로, II장 이론적 배경에서 논의될 것이다.

역에서는 ‘생성-수렴에 의한 증명학습’이라는 본 연구가 개발한 학습-지도 방법에 대해 살펴 볼 것이다.

1. 수학적 증명

가. 정당화와 증명의 역할

일반적으로, 증명은 종종 정리가 참임을 보이는 특별한 형식을 갖추고 있으며, 연역적인 추론에 의한 올바른 논증을 의미한다. 본 연구에서 정당화는 증명에 필요한 여러 개념들, 그 개념의 연결과 구성 등을 포함하여 증명 과정에서 추측이나 정리가 참임을 보이는 방법을 의미한다.

증명에서의 정당화 유형에 대한 연구로, Harel과 Sowder(1998)는 증명에서의 정당화를 수학적 설명의 참 거짓에 대하여 자신과 다른 사람들을 확신시키기 위해 사용하는 논증이라고 정의한다. 그들은 정당화 유형으로 외적확신의 정당화, 경험적 정당화, 분석적 정당화로 범주화하였다. 외적인 어떤 것을 사용하여 자신 또는 다른 사람들을 확신시키는 외적확신의 정당화 범주에는 의례적 정당화, 권위적 정당화, 기호적 정당화가 있다. 그리고 경험적인 정당화는 자신의 경험에 근거하여 귀납적이거나 지각적으로 논증에 대한 확신을 갖는 것을 의미하며, 분석적 정당화는 정의, 정리, 명제 등 의 참과 거짓을 공리적이나 수학의 내용과 형식의 측면에서 논증하는 것을 의미하는 것으로 변형적 정당화와 공리적 정당화가 이에 속한다. 또한, Weber(2002)는 학생들의 증명 개념을 연구한 결과, 학생들은 증명을 어떤 명제에 대한 논증을 하기 위한 알고리듬으로 이해하고 있으며, 점차 전반적이고 질적인 단계들의 짧은 알고리듬이나 과정으로 압축한다고 한다.

또한, 이 과정이 올바른 학생들만이 증명을 수학적 명제가 진리라는 것을 성립시키는 논증으로서 인식할 수 있다.

수학적 증명의 역할에 대하여 Bell(1976)은 수학적 증명의 의미를 입증, 설명, 체계화에서 찾을 수 있으며, 증명은 단순히 논증의 형식적인 전술이 아니라, 확신에 이르도록 정당화하는 역할을 하며 다른 사람에게 확신한 결과를 의사소통 하게 한다고 말한다(Hanna & Janke, 1996, 재인용). 이에 덧붙여, de Villiers(1991), Hanna와 Janke(1996) 등은 스스로에게 명제의 진리가 참임을 입증하는 역할, 다른 사람에게는 참인 결과를 설명하는 역할, 수학을 창조하는 발견의 역할, 공리적 체계로 조직화하는 체계화의 역할을 증명이 담당한다고 말한다.

학생들의 증명학습에서의 정당화 유형과 관련하여, Lulu와 Celia(2000)에 의하면, 학생들은 대수적 증명을 할 때 두 가지 종류의 정당화 유형을 보인다고 한다. 학생들이 가장 좋은 점수를 받을 것이라고 여기는 주장과 학생들 스스로 행한 주장의 두 유형이다. 학생들이 좋은 증명으로 여기는 주장으로는 대수적인 주장이 가장 선호되지만, 대부분의 학생들은 경험적인 주장의 한계를 인식하고 있음에도 불구하고 자신이 직접 행하는 주장은 스스로 평가할 수 있고 설명적이며 경험적인 증명이라고 한다. Housman과 Porter(2003)는 증명학습에서 학생들의 정당화 유형과 예를 생성하거나 개념을 재형식화 하는 문제해결전략과의 관계를 연구한 결과, 학생들은 교사의 조언 없이 예를 생성하거나 반례를 사용한 증명을 할 때, 경험적인 정당화 유형에 속한 학생들은 보다 많은 예를 만들어 증명을 하였고, 분석적인 정당화 유형을 보인 학생들은 연역적 논증을 하였으며 개념을 재구성하고 반례를 사용하는데 성공적이

었다.

이상의 연구들에 의하면, 수학적 증명을 더 이상 연역적이고 엄밀하며 형식적인 논증으로만 보고 있지 않으므로, 학생들은 증명학습에서 다양한 범주의 정당화 유형과 증명의 역할을 갖고 있다고 설명한다. 이는, 학생들이 입증과 확신의 과정을 거쳐 자기주도적 증명학습을 하고 설명과 수학적 의사소통을 통한 공감적 이해를 바탕으로 수학적인 지식을 구성해 나갈 수 있을 것임을 의미한다.

나. 학생들의 증명 오류와 증명 학습-지도 방법

학생들의 증명능력의 증진과 보다 탐구적인 증명 학습-지도 방법을 개발하기 위한 기반으로써, 본 절에서는 논증기하 영역에서 학생들의 증명 오류와 다양한 증명 학습-지도 방안에 대한 선행 연구들을 고찰해 보려고 한다.

증명과정에서 학생들의 어려움에 대한 연구로, Galbraith(1981)에 의하면, 학생들은 증명과 정에서 경험적인 증명방법을 주로 사용하고, 증명을 할 때 수학적 원리나 개념을 적용하고 추론하는 것을 어려워하며, 증명활동에서 반례의 중요성도 문맥상으로만 이해할 뿐 반례에 의한 증명을 거의 할 수 없다고 한다. 또한 명제의 동치 관계를 살펴볼 때 필요한 개념들의 정의를 분석하지 않으며, 명제의 함의 관계를 조사할 때는 진술의 어느 한 부분에만 집중하는 오류와 조건문을 판단할 때 학생 자신의 주관적인 관찰자 관점에서 판단하는 오류를 범한다고 한다. Moore(1990)는 증명 문제해결 과정에서 증명의 어려움은 선형 필수 학습 요소의 부족, 정신적 개념의 시각화 능력의 결여와 인지적 과부화 또는 엄밀함과 증명 목적 및 기술의 부족에 기인한다고 주장한다. 또한, Recio와 Godino(2001), Weber(2001)에 의하면, 대다수의

학생들은 구문론적 지식 기반이 불충분하거나 이를 연상하는데 실패함으로써 증명을 특정한 예와 경험적인 예들의 귀납적 구성으로 행하는 경향이 강하고 극소수의 학생들을 제외하고는 연역적 증명을 할 수 없다고 보고하고 있다.

증명 오류의 유형과 관련된 연구로, Becker(1982)는 7학년 학생들의 기하 정리의 증명 쓰기에서의 8가지의 오류 유형을 분류하였다(류성립, 1998, 재인용). 첫째는 기본 지식의 부족 오류로 필요한 지식을 이용할 수 없거나 증명 방법을 발견하지 못하는 오류이다. 둘째는 시행착오 전략 오류로서, 학생들은 자신의 전략이 맞건 틀리건 무조건적으로 답을 하는 것을 선호하는데 이를 시행착오 전략이라고 한다. 셋째는 용어나 기호, 그림의 일부를 잘못 나타내는 것, 즉 한 가지 요소를 부적절하게 이해하는 오류이다. 넷째는 증명과정 중 보다 수준 높은 단계에 대한 부적절한 이해의 오류로서, 대체로 정리나 문장의 문법적인 구조, 정리의 일부분이나 일련의 여러 정리들 사이의 복잡한 관계 등을 알지 못하는 경우였다. 다섯 번째는 부호화 해독과 재부호화의 오류로, 학생들이 생각, 답, 이유를 언어로 표현할 때 나타나는 오류이다. 여섯 번째는 문장이나 도형의 한 가지 부분이나 요소의 일부가 우세할 때 발생하는 오류이다. 일곱 번째는 삼각형의 합동조건이나 닮음조건과 같은 기본정리들의 부적절한 적용에 기인한 오류이며, 여덟 번째는 증명문제를 해결할 때 그 문제에 알맞은 적용 정보를 잃고 의미 없는 공식이나 정리를 적용하는 오류이다. 류성립(1993)과 전현미(1996)는 중학생들을 대상으로 기하 증명과정에서 발생하는 오류 유형을 도형에 대한 직관에 기인한 오류, 논리적 추론의 결여, 증명과정의 일부 생략, 연산자의 잘못된 실행, 가정을 잘 이용하지 못하는 오류 등으로 분류하였다.

정리하면, 학생들은 정의나 정리를 확실히 이해하지 못하거나 정리의 내용이나 성질을 알고 있으면서도 증명에 활용할 수 있는 능력이 부족하여 다양한 증명 오류를 범하고 연역적인 증명을 더 어려워하는 경향이 있음을 알 수 있다. 이러한 연구들에서 공통적으로 지적하고 있는 학생들의 증명 오류로는 선수 지식의 부족, 형식화의 오류, 증명과정 구성의 오류, 경험적 오류 등이 있다. 본 연구는 이러한 분석을 바탕으로 학생들의 증명 오류를 보다 확장하여 살펴볼 것이다.

또한, 수학 교육에서는 위에서 살펴본 바와 같이 학생들의 증명학습에서의 어려움을 해결하고 실제 학교 현장에서 학생들의 증명능력을 길러주기 위한 여러 교수-학습 방법을 연구해 왔다. 먼저, 논리적인 증명 과정을 강조하여 학생들의 증명능력을 신장시키기 위한 학습-지도 방법에 대한 연구를 살펴보면, 나귀수(1998)는 분석적 방식과 종합적 방식이 통합된 방법으로 증명을 지도해야 하며, 서동엽(1999)은 중학생들에게 도형의 정의와 성질을 명확히 구분하고 추론 규칙 중 조건 삼단 논법의 구조를 강조하여 지도해야 한다고 한다. Rubenstein, Craine & Butts(1995)에 의하면, 학생들이 다양한 변환 조건이나 정확한 논쟁 특히 긍정 논법, 연쇄 법칙, 변환 법칙에 몰두하도록 교수하는 것이 증명학습에 도움이 된다고 한다.

문제해결과정에 따라 증명을 학습-지도하기 위한 방안으로, Polya(1986)는 증명 문제를 문제 이해, 계획 수립, 계획 실행, 반성의 단계로 구분하여 학습할 수 있도록 그에 따른 발문과 권고를 제안한다. Weber(2002)는 귀납법에 의한 증명학습을 할 때 과정으로서의 증명 관점을 가진 학생들이 논증으로서의 증명 관점으로 변환하지 못하므로, 학생의 증명과정에 대하여 교사가 피드백 하는 개별지도가 증명구성 능력

향상에 효과적이라고 한다.

테크놀로지를 활용한 증명학습에 대한 연구를 살펴보면, Kathleen, Heid, Hollebrands, & Iseri(2002), Laborde(2000) 등은 Computer Algebra System(CAS), Dynamic Geometry Systems (DGS)를 활용하여 학생들이 수학적 추론을 할 수 있으며 반성적 증명과정은 물론 관찰부터 귀납적 증명, 엄밀한 형식의 연역적 증명은 아니지만 어느 정도의 연역적 증명까지를 모두 가능하게 하고, 사회적인 측면에서 긍정적인 기능을 있다고 주장한다.

보다 탐구적인 증명-학습 지도 방법에 대한 연구로, Knuth(2002)는 수업에서 증명을 수학적인 이해를 증진시키는 도구로써 사용하기 위해 증명의 역할 중 설명의 역할을 강조하면서, 추측과 정리, 반례를 활용한 설명적인 증명을 구성하거나 다이어그램을 이용하는 시각적인 증명방법을 제안한다. 우정호 외(2003)는 중학교 1학년 학생들을 대상으로 삼각형의 내각의 합에 대한 명제의 증명지도를 기하의 역사발생적 단계에 따라 실시한 결과, 학생들에게 증명의 의미를 이해시키는데 도움이 되었다고 한다.

이상의 선행 연구를 고려해 볼 때, 교육 현장 및 수학 교육 학계에서 기하 영역에서의 증명에 대한 수학 학습의 어려움을 인식하고는 있으나, 연구자마다 증명학습에서의 어려움에 대한 관점의 차이가 있고 그에 대한 처치방안도 다양하게 논의되고 있음을 알 수 있다. 이러한 연구들의 공통점은 약간의 차이는 있으나, 학교 수학에서 너무 형식적이고 논리적인 추론을 강조할 것이 아니라 학생들의 수준에 적합하면서도 엄밀성을 지닌 증명이 지도되어야 함을 시사한다.

그러나, 능동적인 지식의 구성자로서의 학생 스스로 자신의 수준에 알맞고 엄밀성도 갖춘 정당화 과정을 구성하도록 증명을 지도하려는

관점에서 볼 때, 증명 문제를 해결할 때 논리적인 과정을 강조하는 학습-지도 방법이나 기존의 증명을 학습-지도하기 위한 방안은 교사의 도움이 없이 학생들 스스로 논리적인 증명을 구성하고 상호작용을 통해 합의에 도달하기를 기대할 수 있는지에 대해 재고해 볼 필요가 있다. 특히, 지적 성숙도가 낮은 학생들에게 논리적인 증명을 스스로 구성하도록 한다는 것은 실제로 가능하지 않을 수 있으며 역생산적인 교육적 혼란을 일으킬 수도 있다. 또한 교사의 발문과 적절한 안내가 기존의 증명 수업에서 중요한 역할을 하는 것은 사실이지만, 그 역할은 지식의 구성자로서의 학습자가 적절한 엄밀성을 갖춘 증명과정을 구성하도록 할 때 한계가 있을 수 있다. 이는 Herbst(2002)의 증명학습에서 교사의 이중속박에 대한 연구에서도 입증된다. 이는 교사에게 학생들이 논리적인 증명을 할 수 있도록 과제를 고안하고 가르쳐야 한다는 교수학적 계약을 수행하는 동시에 학생 스스로 증명을 할 수 있도록 안내하고 도와주어야 한다는 요구가 부과되는 것을 말한다. Herbst에 의하면, 이중속박을 받는 대부분의 교사들은 학생들 스스로 증명을 옳게 하지 못할 때 교수학적 계약으로 인하여 먼저 증명 시범을 보이게 되며, 학생들은 이를 모방, 암기하여 증명을 수행하는 수업패턴을 가질 수 있다고 그 문제점을 지적하였다. 그리고 교사의 개별 지도를 통한 학생 수준에 맞는 증명 학습-지도는 이상적이지만, 우리나라의 교실 수업을 생각해 볼 때, 그 실천 가능성은 낮다고 할 수 있다.

그리고 테크놀로지를 활용한 증명학습의 경우, 귀납적인 증명과 연역적인 증명을 연결시킬 때, 어떤 수준의 연역적 증명을 학교 수학에서 지도야 하는지를 결정할 때 문제가 있을 수 있다. Miyazaki(2000)에 의하면, 중학생들의

증명 수준은, 일상 언어, 그림, 연산, 조작물 등을 활용한 귀납적 추론 수준으로부터 시작하여, 비형식적인 연역적 추론의 수준, 논증기하의 용어를 불완전하게 사용하는 형식적인 연역적 추론의 수준, 논증의 기능적 언어를 사용하는 연역적 증명의 수준으로 발달한다고 한다. 이처럼, 연역적 증명의 수준이 무척 다양하며 학교 수학에서 요구되는 증명의 최종단계가 논증의 기능적 언어를 사용하는 연역적 증명 수준이라는 점을 고려한다면, 학교 수학에서 테크놀로지 환경 하에서 어느 수준의 연역적 증명까지 학습-지도가 가능할지를 결정하는 것은 어렵고, 논증기하에서의 연역적 증명능력을 신장시키는데 테크놀로지가 기본적으로 구체물이라는 점에서 연역적 증명능력의 향상에는 한계점이 있을 수 있다.

이상의 논의에서 학교 수업에 적용할 수 있는 구체적인 지도 방안에 대한 논의와 연구는 아직도 충분하지 못함을 알 수 있다. 본 연구에서는 이상에서 살펴본 기존 증명 학습-지도 방안의 문제점을 보완하고 학생 스스로 확신, 발견, 설명, 의사소통, 체계화의 맥락에서 사회적으로 합의를 거치는 정당화로서의 증명을 지도하기 위한 보다 구체적인 증명-학습지도 방법을 개발하려고 한다. 이 때, 사회적 구성주의를 토대로 학생들 스스로 수업 시간을 최대한 활용하고 수업 외의 시간에서도 능동적으로 증명학습을 수행할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

또한, 새로운 증명 학습-지도 방법이 학교 현장에 뿌리내릴 수 있도록, 교사가 교수학적 계약을 충실히 수행하고 이중 속박에서 벗어날 수 있도록 도울 수 있는 탐구적인 수학 활동으로서의 증명 학습-지도 방법을 개발하려고 한다. 이상을 고려한 증명 학습-지도 방법은 다음 절에서 구체적으로 살펴볼 것이다.

2. 탐구적인 증명학습을 위한 수업모형 개발

본 연구에서는 앞서 살펴본 증명학습에서의 학생들의 정당화 유형과 증명의 역할, 학생들의 증명 오류와 이에 대한 다양한 증명 학습-지도에 대한 논의를 바탕으로 현장에 직접적인 적용이 가능한 ‘생성-수렴 모형’이라는 탐구적인 수학 활동으로서의 증명 학습-지도 모형을 개발하였다.

본 연구가 의미하는 탐구적인 수학 활동으로서의 생성-수렴 모형은 Polya(1962)의 문제해결자의 심리 활동을 증명문제해결과정에 연관시켜 토론활동으로 구성한 것이다. Polya는 문제를 해결할 때 문제의 진술 속에서 친숙한 특징을 인식하고 관련 요소들을 회상해내는 동원과 동원한 요소들을 유목적적인 전체로 조직화하는 심리적 활동을 행한다고 한다. 이 때 동원이나 조직화만으로 문제를 해결할 수 없으므로 유용한 동원된 요소들을 더 풍부하게 보충하고 이를 재분류하는 지적 조작과 문제해결을 위해 이러한 요소들을 결합하고 분리하는 지적 조작을 통하여 체계적으로 문제해결에 이르는 통로를 예견해 간다고 하였다. 이러한 문제해결에서의 심리적 활동을 증명학습과 연결시켜보면, 동원은 증명문제를 해결하기 위한 다양한 증명 구성을 시도하는 활동과 관련되고, 조직화는 최선의 해결대안으로서의 연역적 증명을 완성하는 것으로 해석할 수 있다. 또한, 학생들은 증명 문제해결의 과정을 보다 충실히 수행하여 연역적 증명구성을 완수하기 위해서 다양한 관련 개념을 보충·분리·결합·예측하는 활동을 행하는 것으로 볼 수 있다. Polya는 동원과 조직화 및 이러한 모든 활동은 문제해결 과정

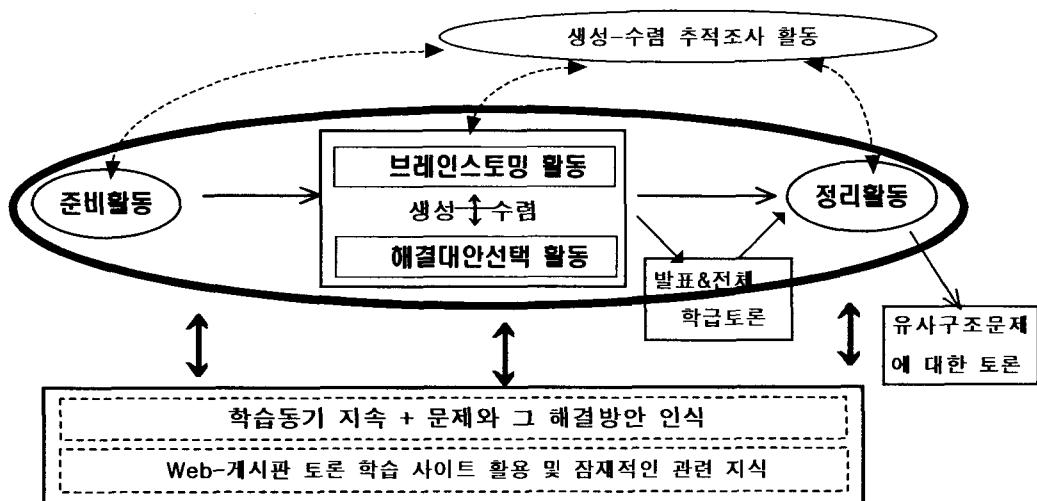
의 상보적인 측면이므로 분리될 수 없다고 한다. 그러나 문제해결과정이 능동적 지식 구성자인 학생들 각자의 활동임에 분명하지만, 앞서 살펴본 바와 같이 지적 성숙도가 높은 학생만이 연역적 증명을 구성하고 대부분의 학생들이 증명을 어려워하는 상황과 학생들 수준에 적합한 정당화로서의 증명지도라는 교육 목표를 모두 고려해야 한다. 이에, 생성-수렴 모형에서의 활동은 다양한 수준의 학생들에게 수학적 지식의 사회적 합의과정을 경험할 수 있도록 토론활동으로 구성하였다. 특히 생성-수렴 모형이라는 명칭은 문제해결을 위한 각종 아이디어를 브레인스토밍 토론활동을 하여 다양한 해결대안을 생성하고, 그 중 최선의 해결대안을 학습자들의 의견수렴을 통하여 선택하는 학습활동을 강조하고자 명명되었다.

본 모형은 이러한 기본 입장 하에, 증명 학습-지도 과정에서 학생들 스스로 증명방법의 탐색을 위한 분석, 분석 결과의 의사소통을 통한 연역적 조직, 증명에 대한 비판적 검토와 반례의 탐색 등을 거치면서 증명방법과 결과를 탐구하는 과정을 강조하였으며, 학생 자신들의 증명구성과정을 발표하고 논의하며 검토하는 과정을 거칠 수 있도록 고안하였다. 이러한 활동의 전반적인 과정은 수학자들의 탐구활동과 유사하다는 점에서 탐구지향적인 증명학습-지도 방안으로 볼 수 있을 것이다. 실제로 수학적 증명은 수학적 의견을 가진 전문가들의 사회적인 합의를 거친 구성물이라는 점에서, 본 연구의 생성-수렴 토론활동은 모형은 수학 교실에서 학생들에게 수학자들의 창조적인 활동을 경험할 수 있는 기회를 제공할 수 있을 것으로 기대된다. ‘생성-수렴 모형’의 형식은 [그림 II-1]과 같이 표현될 수 있다.

증명학습의 생성-수렴 모형의 단계는 실선으로 된 화살표방향으로 진행되며 굵은 실선과 타원선 안의 활동이 학생의 주요 학습활동이며, 굵은 직사각형으로 표시된 부분은 학생 개인의 출발점 행동 및 학습동기, 잠재적인 수학문제해결과정과 관련된 활동을 의미한다. 또한, 점선으로 연결된 활동은 증명문제를 해결하는 조별 학습활동의 각 단계에서 필요에 따라 자신들의 해결과정을 상호 피드백을 통하여 반성하는 보조학습활동이다.

각 단계를 자세히 살펴보면, 준비활동은 학생들이 생성-수렴의 토론활동을 시작하기 전에 이전 수업의 핵심 개념을 복습하거나 본시 학습과 관련된 다양한 자료를 소개받고 그에 대한 간단한 탐구 활동을 하는 단계이다. 이 때, 본시 학습의 학습목표와 핵심 문제가 주어지며 학생들은 나름대로 주어진 문제를 인식하게 된다. 또한, 교사는 학생들이 생성-수렴의 토론 활동으로 학습을 할 수 있도록 최소한의 필요 조건들을 주로 질문한다.

생성-수렴 활동은 토론학습으로 진행되며, 생성 활동이나 수렴 활동을 각각 단독으로 수행하는 것이 아니라 두 활동이 상호작용하면서 문제를 해결할 때 상승효과를 가져오도록 설계되었다. 각 활동을 구체적으로 설명하면, 생성 활동에서는 학생들이 조별로 자유로운 분위기에서 주어진 증명 문제에 집중하여 상호간의 질문과 대답, 유추, 변형, 시각화 등을 이용하여 다양한 아이디어를 많이, 생성해 내는 활동과 기존의 지식들을 새롭게 조정·결합하여 새로운 아이디어를 생성하는 활동을 한다. 수렴 활동은 주어진 증명 문제를 해결하기 위해 생성된 많은 아이디어들을 비판적으로 평가하고 다듬어서 그 중 최선의 해결대안을 선택하도록 하는 학습 활동이다. 즉, 학생들은 증명문제를 해결하는 과정의 각 단계에서 브레인스토밍 토론 활동을 행하여 가능한 많고 다양하며 독창적인 해결대안을 생성해 내는 학습을 수행한 다음, 각각의 해결 대안들을 나름대로의 논리적이고 타당한 판단준거에 의해 평가하는 토론 활동을



[그림 II-1] 생성-수렴 모형에 의한 증명학습

수행하여 최선의 아이디어와 해결대안을 결정하는 학습을 연속적으로 또는 자유로운 분위기에서 상보적으로 학습한다.

생성 활동의 구체적인 활동인 브레인스토밍 토론 활동은 집단의 성원들이 하나의 구체적인 문제에 초점을 두고 가능한 많은 수의 아이디어들을 생성해 내기 위한 기법으로, 주로 집단이 문제를 해결하는데 사용하기 위하여 개발한 것이지만 개인적으로 사용될 수도 있으며 아이디어를 구두로 말하는 것이 보통이다. 이 기법을 사용하기 위해서는 사회자와 기록자가 있어야 하며 집단의 크기는 5~12명이 이상적이다. Osborn은 그의 저서 'Your Creative Power(1948)'에서 브레인스토밍 기법의 두 가지 원리와 네 가지 규칙들을 나열하고 있다(김영채, 2001, 재인용). 두 개의 원리 중 첫째는 판단을 유보한다는 것이고, 둘째는 양이 질을 놓는다는 것이다. 브레인스토밍 기법을 진행하기 위해서는 4 가지의 규칙을 지켜야 한다. 첫째, 제시한 아이디어에 대한 평가는 나중까지 유보한다는 것으로, 평가하면 발상이 저해되며 다른 그럴듯한 대안을 떠오르게 할지 모르는 아이디어조차도 성급하게 내던져 버릴 수 있기 때문이다. 둘째, 아이디어는 거칠고 자유분방한 것일수록 더 좋다. 엉뚱해 보이는 아이디어일수록 보다 참신한 것일 수도 있기 때문이다. 셋째, 많은 아이디어들을 생성해 낼 때 유용한 아이디어가 들어 있을 가능성이 더 커지므로, 아이디어의 수가 많을수록 더 좋다. 넷째, 남들이 제안한 아이디어들을 조합시켜 또 다른 것을 만들 수 있다.

수렴활동의 구체적 활동인 해결대안선택 활동은 아이디어를 충분한 수만큼 생성해 낸 다음 이들을 평가하고 선택할 때 행하는 활동이기 때문에, 하이라이팅 기법과 역브레인스토밍 기법을 응용할 것이며 이 때 '긍정적 판단의

원리'가 중요하다. 김영채(2001)에 의하면, 대안들 가운데서 괜찮다고 생각되는 대안을 히트(hits)라고 하는데, 히트한 아이디어들을 선택하고 이들을 관련된 것끼리 묶어 적중 영역을 찾아내며 그 중 하나의 가장 그럴듯한 적중 영역을 선택하는 것이 하이라이팅 기법이다. 역브레인스토밍 기법은 어떤 아이디어가 가지고 있는 가능한 약점이나 그 아이디어를 실천할 때 잘못될 수 있는 것을 찾아내는데 사용할 수 있다.

따라서, 생성-수렴 활동에서는 충분한 수의 대안이 생성될 때까지 계속 판단을 유보하는 '판단 지역의 원리'와 수렴 활동에서는 대안을 선택할 때 대안들을 긍정적으로 음미하고 목적에 맞는 것인지를 항상 염두에 두는 '긍정적 판단의 원리'가 지켜지도록 주의해야 한다. 브레인스토밍 활동은 비슷한 문제를 찾기보다는 서로 다른 관점에서 같은 문제를 상호 교류에 의한 문제 풀이 방식으로 생각하도록 도와주므로, 문제를 어떻게 생각할 것인가에 초점을 두게 하는 강력한 전략이 될 수 있을 것이다. 또한 학생들은 이러한 과정 속에서 주어진 문제를 해결하기 위해 개념의 분석 및 종합과 합리적인 의사결정 과정을 경험할 수 있을 것이다. 위에서 제시한 방법들은 모두 학생들이 흥미를 가지고 적극적인 질문을 제기하여 주어진 것 이상으로 적용하고 탐색하는 과정에서 최선의 해결 대안을 선택할 수 있도록 하는 탐구지향적 성격을 지닌 것이 핵심이라고 할 수 있다.

정리 활동은 각 조별로 최종적인 문제해결방안을 반성하고 그 날의 수업에서 핵심내용을 정리하며 이에 대한 형성평가를 수행하는 단계이다. 증명 주제와 한정된 수업 시간을 고려하여 각 조별로 브레인스토밍 활동과 해결대안선택 활동을 하여 최종적으로 선택한 해결대안을 발표하게 한다. 이때, 전체학급 토론 활동을 하

면서 주어진 증명 문제를 해결하기 위한 더 나은 해결대안을 찾기 위해 서로의 아이디어를 교환하고 수정·보완하여 개선된 아이디어를 최종적으로 선택하는 활동을 할 수도 있다.

정리 활동을 마친 뒤 해결한 증명 문제와 구조적 유사성을 지닌 증명문제를 제시하고 교사 중심의 안내된 활동을 수행할 수 있다. 이는 그 문제를 단시간에 해결하기 위한 핵심 아이디어 및 필요한 개념을 구성해보고 해결방안을 탐구하는 것을 가능하게 한다. 이 단계는 실제 교육 현장의 제한된 수업 시간을 고려할 때 생략할 수도 있으나 이럴 경우에는 정리 활동에서 개략적으로 수행하여 학생들에게 새로운 문제에 대한 호기심을 유발하고 자발적인 탐구의 기회를 제공하도록 해야 할 것이다.

또한, 준비 활동, 생성·수렴 활동, 정리 활동의 과정에서 필요하다면 ‘생성·수렴 추적조사 활동’을 할 수 있다. 이는 본시의 증명학습에서 해결해야 하는 목표문제를 해결하기 위해 이전의 생성·수렴 활동을 연상하고, 이를 추적하여 본시 학습에 적용할 수 있는 아이디어인지를 조사해 보는 활동이다. 덧붙여, 수업에서 나타나는 앞서의 활동을 수행하는 동안 학생들의 정의적 측면도 고려되어야 할 것이다. 학생들은 개별적으로 학습 동기와 목표 문제에 대한 확실한 인식을 지속하여 인식하고 있어야 보다 효과적인 수업을 행할 수 있다. 그리고 수업 외 시간에 Web에서의 게시판 토론과 ICT 자료, 교과서, 학습지 등의 참고자료를 활용한 자주적 개별학습을 병행하여 습득한 지식과

관련된 지식을 필요할 때 생각해 낼 수 있는 내면적인 준비상태를 유지하도록 한다면 효과적인 증명능력의 신장을 꾀할 수 있을 것이다.

이 모형을 증명학습을 실제로 행하는 현장에 구체적으로 적용하는 방법과 결과는 다음 장인 연구방법과 연구결과에서 자세히 살펴볼 것이다.

III. 연구 방법

1. 연구설계 및 절차

본 연구는 학생들의 증명능력 신장과 증명 오류와 정당화 유형에 미치는 효과를 확인하기 위해, 인천의 G여자 중학교 2학년 학생 160명을 두 그룹으로 나누어 도형 영역을 학습할 때 생성·수렴 모형에 의한 증명학습과 교과서 내용전개에 따른 증명학습을 각각 실시하였다. 실험기간은 9월 넷째 주부터 12월 첫째 주까지 10주 동안 총 40시간이었고, 증명 문제해결 능력에 대한 사전·사후검사 결과는 본 연구의 표집 대상 학교의 수학 교과 2학기 수행평가 점수로 반영되었다. 이 때, 학생들은 명제와 명제의 역, 이등변삼각형의 성질을 학습한 상태였다. 실험집단과 통제집단의 동질성을 증명능력의 사전검사 결과를 바탕으로 두 독립표본 t-검정을 유의수준 .05에서 실시한 결과는 <표III-1>과 같다. 이 때 등분산성 F값은 0.085이며 t-검정값이 -0.015, 유의확률이 0.771로 통제집단과

<표III-1> 실험집단과 통제집단의 동질성 결과

집단	N	M	SD	t
실험집단	80	13.8875	4.044	-0.015 **
통제집단	80	13.9875	4.123	

**p< .05

실험집단의 동질성이 확인되었다.

생성-수렴 모형이 증명 학습에서의 정당화 유형에 어떤 영향을 주는지를 살펴보기 위해, 두 집단 모두 Web을 활용하여 에듀넷에 개설한 ‘사각형의 탐구’²⁾라는 사이트에서 토론게시판을 이용하여 수준별로 학습자 스스로 쓰기와 읽기 중심의 토론학습을 사이버 상에서 수행하도록 하였다. 이 때, 자신의 증명 쓰기에 대한 반성을 할 수 있도록 두 집단의 학생들 모두에게 자기질문리스트를 주었으며, 사이트의 자료실을 이용하여 수업시간 외에 자유롭게 학습할 수 있도록 하였다. 이러한 Web 활동은 개별 학습의 형태로 제시되었지만, 통제집단도 실험집단과 마찬가지로 사이버 상에서의 증명에 대한 토론학습을 수행한 것으로 볼 수 있다. 이는 두 집단의 실험처치의 차이가 생성-수렴 모형이라는 변인의 차이만을 보는 것을 가능하게 한다.

본 연구의 실험 설계는 다음의 <표III-2>와 같고, 검사의 종류는 <표III-3>과 같다. 먼저, 80명씩

의 실험집단과 통제집단을 대상으로 증명능력에 있어 생성-수렴 모형에 의한 증명학습이 미치는 효과를 사전·사후검사 결과를 기반으로 통계적으로 분석하였다. 실험집단은 생성-수렴 모형에 의한 증명학습과 Web 상의 게시판토론학습을 수행하였고 통제집단은 교과서 내용전개에 따른 증명학습과 Web 상의 게시판토론학습을 수행하였다. 또한, 두 집단 모두에게 사후검사 후에 각각의 증명 학습-지도 활동에 대한 자기평정지를 활용한 설문검사를 실시하였다. 그리고 증명의 역할을 어떻게 인식하고 있는지에 대한 설문검사를 토론게시판 활동에 대한 자기평가와 함께 Web상의 ‘성찰노트’에 자유로운 반성일지의 형식으로 쓰도록 하였다. 특히, 증명능력의 신장에 대한 분석은 통계적 방법 외에 생성-수렴 모형에 의한 증명학습 활동 중 학생들 스스로 기록한 활동일지와 토론게시판의 글을 중심으로 분석하는 질적 연구방법을 병행하였다.

생성-수렴 모형에 의한 증명학습은 한 학급

<표III-2> 실험설계

실험집단	$O_1 \rightarrow T_1 \cdot T_3 \rightarrow O_2 \cdot O_3$
통제집단	$O_1 \rightarrow T_2 \cdot T_3 \rightarrow O_2 \cdot O_3$

O_1 :사전검사, O_2 :사후검사, O_3 :설문 검사(증명학습활동에 대한 자기평정 및 증명역할 설문검사)

T_1 :생성-수렴 모형에 의한 증명학습, T_2 :교과서 내용전개에 따른 증명학습, T_3 :Web 게시판 토론학습

<표III-3> 검사의 종류

검사의 종류	사전검사	사후검사	설문검사	비고
증명능력	O	O		학생들의 생성-수렴활동에 대한 통계적 분석방법과 질적 연구방법 병행
증명학습활동에 대한 자기평정지		O		통계적 분석
증명의 역할 인식		O		Web-반성일기

2) <http://community.edunet4u.net/~kwgmath>

의 학생들을 5명씩 한 조로 편성하여 모두 8개의 조로 조직하여 진행하였다. 각 조는 조장 1명과 기록자 1명을 자유롭게 선출하였고, 상, 중, 하의 학생이 골고루 섞여 있지만, 친한 학생들끼리 한 조로 묶어 토론 분위기가 자유롭도록 하였다. 또한, 교과서 내용전개에 따른 증명학습을 하는 통제집단과 같은 교재인 교과서를 사용하여 수업을 하였다. 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 실시한 수업에서는 학생들의 아이디어를 질보다는 양적인 사고에 의해서 진행하는 것이 특징으로, 45분 수업에서 25~30분 정도 진행되었다. 생성-수렴 모형을 직접 적용한 수업의 전개과정을 살펴보면 대략 다음과 같다.

수업의 초반 5분 정도는 생성-수렴 모형의 준비 활동에 해당하는 단계로, 교사가 학습목표와 증명 문제를 제시하고 그 해결에 이용할 수 있는 자료 등을 소개하며, 이전 시간의 교과서 예제에 대한 증명 시범을 실시한다. 교사의 증명 시범은 이전 수업에서 학습했던 필수 학습요소의 증명이 주가 되었으며 발문과 함께 진행했다. 필요한 경우, 본시 학습의 중요한 예제에 대한 교사의 모범적인 증명 시범도 행할 수 있었다.

그런 다음, 학생들은 제시되는 2개 내지 3개의 증명문제를 해결하기 위하여 조별로 생성-수렴 토론 활동을 25-30분 정도로 수행하였다. 이 때 학생들은 브레인스토밍 활동과 해결대안 선택 활동을 상보적으로 자유롭게 실시하였고 이 과정에서 증명문제의 대부분이 해결되었다. 단, 시간이 부족하여 모든 문제를 해결하지 못한 조가 생겼을 때는 사이버 상에서 채팅을 이용하여 정리한 후 ‘사각형의 탐구’ 사이트에 토론 내용을 정리하여 올리도록 하였다. 생성-수렴 토론 활동은 조별로 1권의 노트에 기록자가 전 과정을 빠짐없이 매시간 기록하도록 하였으

며, 증명학습의 결과인 최선의 문제해결방안은 조별로 제공된 학습지에 연역적 증명의 형식으로 적어 제출하도록 하였다. 생성-수렴 모형에 의한 증명학습 상황에서는, 증명을 위한 보조선 작도를 할 경우 작도를 하는 것뿐만 아니라 그렇게 작도를 해야 하는 이유도 학생들이 토론하여 결정하고, 이를 기록하도록 하였다. 그리고 증명을 하기 위해 삼각형의 합동조건 등과 같은 기본 성질을 이용하고 그 중 필요한 것을 선택하는 토론학습 과정도 그 이유 및 증명과정 모두를 기록하도록 하였다. 또한, 반례를 이용하는 경우와 연역적 증명을 바로 하지 못하고 주어진 문제에 해당하는 예를 나열하여 규칙을 발견하는 경우에도 모든 활동을 기록하도록 하였다. 이 때, 교사는 학생들의 활동을 관찰하고 학생들의 요청이 있을 때는 문제를 해결하기 위한 조언을 하거나 질문에 응답하기도 하며, 필요한 자료 등을 제시하였다.

생성-수렴 활동을 마치고 정리 활동을 하기 전에, 교사가 학생들의 활동을 수업 내내 관찰하고 조별 활동에서 다양한 문제해결방안들이 생성되어 전체학급 토론이 필요하다고 판단되는 경우에는 각 조별로 주어진 증명 문제에 대한 해결대안을 발표하도록 하였다. 이 과정에서 각 조별로 서로의 해결대안에 대한 질문과 장·단점 등에 대한 토론을 거쳐 수정 보완하여 보다 나은 해결대안으로 개선하도록 하였다.

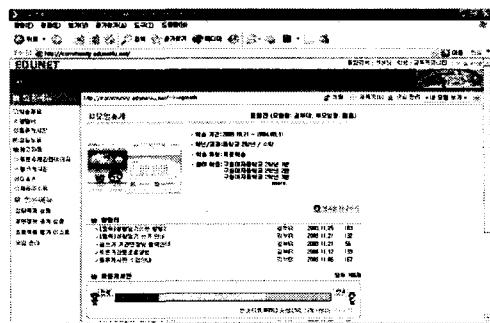
수업 후반부의 6-10분 정도는 생성-수렴 모형에서 정리 활동의 단계로, 발표 및 전체학급 토론 활동을 실시하지 않은 경우에는 매 시간 한 조씩 주어진 증명 문제에 대한 핵심 아이디어와 증명방법을 발표하도록 하였다. 이 증명 문제에 대한 표준적인 해결대안은 교사가 미리 준비한 파워포인트 학습 자료를 이용하여 정리하였다.

교과서 내용 전개에 따른 증명학습은 주로 설명식 수업으로서, 증명에 대한 핵심 아이디어와 증명방법, 예와 반례 등은 교사가 발문하고 학생들이 대답하는 문답식으로 수업을 전개하였다. 학생들에게 제시되는 증명 문제는 생성-수렴 모형에 의한 증명학습 집단과 동일한 문제였고, 학생들에게 개별적으로 학습지에 증명을 할 수 있는 시간을 주었다. 그런 다음 교사가 설명중심으로 증명 문제를 해결하고 모범답안을 제시하였고 수업을 정리할 때는 생성-수렴 모형에 의한 증명학습에서 사용한 파워포인트 자료를 똑같이 사용하였다.

두 집단 모두 매 수업이 끝나기 전에 기본적인 필수학습요소로 이루어진 1개의 문항에 대한 형성평가를 실시하였으며, 이 문제도 두 집단에 동일한 문제로 제시되었다.

에듀넷의 ‘사각형의 탐구’라는 Web사이트는 학습개요, 알립터, 토론게시판, 성찰노트, 참고자료, 토론주제관련이미지, 링크게시판, Q&A의 메뉴로 이루어져 있다. ‘학습개요’는 사각형의 여러 가지 성질과 그에 대한 증명을 게시판 토론으로 공부한다는 학습목표 하에 학습 전반에 걸친 소개와 안내를 하는 곳이다. ‘알립터’는 토론게시판 이용 방법이나 운영에서의 공지사항 등을 소개하는 곳이다. ‘토론게시판’은 토론주제에 대한 수준별 토론 장소로 에듀넷의 프로젝트 학습의 형태 중 토론학습 형식을 따랐다. 각 수준은 증명능력 사전검사 결과 10점 이하는 하 수준, 11점 이상 17점 이하는 중 수준, 18점 이상 21점 이하는 상 수준으로 구분되었다. 토론주제는 여러 가지 사각형의 정의와 성질을 판단 기준으로 제시된 다양한 사각형들의 관계를 증명하는 것으로 각 수준별로

제시하였다. ‘성찰노트’는 사이버 게시판 토론 활동으로 학생 각자의 증명학습에 도움이 되었던 점, 어려웠던 점, 개선점, 열심히 참여한 친구를 추천하거나 건의사항 등을 자유롭게 쓰는 반성 일지이다. 그리고, 증명의 역할에 대한 자신의 생각을 설명하는 곳이다. ‘참고자료’는 교사와 학생이 학습에 도움되는 자료를 첨부하는 곳으로, 증명학습을 위한 토론게시판 활동에서의 자기질문리스트와 관찰체크리스트³⁾를 제시하였다. ‘토론주제관련이미지’는 토론에 관련된 그림 파일을 탐색하는 곳이고, ‘링크게시판’은 도형 영역을 공부할 수 있는 다른 학습사이트에 링크를 걸어서 혼자서 공부할 수 있도록 하는 곳이다. 마지막의 ‘Q & A’는 토론학습을 할 때 질문과 답을 교사와 학생이 일원화하여 주고받는 장소이며, 이 Web 메뉴 외에도 수업시간이나 학교에서도 질문과 답변이 자유롭게 오고 갔다. 그 외에도 쪽지기능을 이용하여 상호간의 피드백이 매우 원활하게 진행되었으며, 교사와 학생의 친밀감도 밀도 있게 유지되었다.



[그림 III-1] Web상의 토론학습 사이트

3) 부록에 자기질문리스트와 관찰체크리스트를 첨부하였다.

2. 측정도구와 자료처리

증명능력을 검사하기 위한 도구는 류성립(1998)과 서동엽(1999)의 연구에서 사용된 증명 능력 검사 문항을 참고로 사전·사후검사지를 직접 제작하여 사용하였다.

각 검사지는 총 7문항으로 40분 동안 실시하였으며, 문항 구성은 <표III-4>와 같고 문항의 배점은 G학교의 수행평가 기준에 따른 <표III-5>와 같다. 단, 문항 6은 증명 성립에 대한 타당한 이유를 선다형으로 물었기 때문에, 정답이면 3점, 그렇지 않으면 점수를 주지 않았다.

생성·수렴 증명학습 활동에 대한 학생들의 평가를 조사하기 위하여 Renzulli-Hartman 평정 척(김영채, 2001, 재인용), Caroselli, M. (1992), van den Brink-Budgen(1999)를 참고하여 본 연구에서 설문지를 직접 제작하여 사용하였다⁴⁾.

구성된 검사의 내용타당도와 구인타당도를 전문가 집단에 의해 평가받았으며, 이렇게 구성된 검사는 내적일치도에 의한 신뢰도 계수(Cronbach α)가 .80이었다. 설문 검사의 소요시간은 30분이었으며, 5단계 리커트 척도에 의해 평정하였다. 이 때 각 문항에 대해 긍정적인 답을 할수록 척도상의 수치가 높기 때문에 합계점수가 높을수록 학생들이 긍정적인 평가를 하는 것으로 해석할 수 있다. 학생들의 증명의 역할 인식이 어떠한지를 조사하는 설문과 Web 상의 토론게시판 학습 활동에 대한 자기평가용 반성일지 쓰기는 사이버 상에서 개별적으로 수행하였다. 이 때, 증명의 역할 인식 설문을 <표III-6>과 같이 실시하였다. 반성일지는 생성·수렴 모형에 의한 증명학습의 전반적인 활동에 대한 평가를 규정된 형식 없이 나름대로 쓰도록 하였다.

<표III-4> 문항의 구성

문항	검사 내용
1, 2	기호화: 이등변삼각형의 성질을 기호로 표현한다.
3, 4	증명: 이등변삼각형의 성질을 증명한다.
5	문장화: 텍스트로 제시된 증명을 읽고 문장으로 표현한다.
6, 7	증명의 의미: 제시된 증명의 타당한 이유와 명제와 명제의 역의 참, 거짓을 말할 수 있다.

<표III-5> 배점 기준

배점기준	점수
(증명) 가정과 결론을 잘 구분하여 서술하였으며 증명과정을 옳게 서술함.	3
(증명 외의 문항) 정답과 이유를 옳게 서술한 경우	
(증명) 가정과 결론을 구분하였으며 증명과정의 서술이 약간 부족함.	2
(증명 외의 문항) 정답을 적었으나 이유 서술이 부족한 경우.	
(증명) 가정과 결론만 서술하였거나 증명과정만을 부분적으로 서술함.	1
(증명 외의 문항) 정답은 적지 못하였으나 이유서술이 부분적으로 옳은 경우.	

4) 본 연구에서 사용한 검사지는 부록에 있음.

본 연구의 자료처리는 SPSS 11.0 for windows 프로그램을 활용하여 각각의 연구문제에서 생성-수렴 모형에 의한 증명학습의 효과를 검증하였다. 먼저, 증명능력의 신장에 대한 수업모형의 효과를 검증하기 위해서는 실험집단과 통제집단의 사전검사와 사후검사의 차이에 대한 두 종속표본 t-검정과 두 독립표본 t-검정을 실시하였다. 설문 검사의 경우, 실험집단과 통제집단 각각의 증명학습 활동에 대한 자기평정 양상의 특징과 차이를 두 독립표본 t-검정에 의해 조사하였다.

실험집단과 통제집단 모두가 게시판 토론학습을 하기 위해 에듀넷에 개설하여 실시한 ‘사각형의 탐구’라는 사이트를 Brandon Hall이 Web-Based Training Cookbook(1997)에 제시한 Web 사이트 평가의 준거(Ellis, Wagner, Longmire, 1999)에 의해 분석하였다. 평가의 준거는 다음과 같다. 첫째, 내용(content) 준거는 학습자의 요구에 부합하는 내용인지를 평가한다. 둘째, 교수학적 설계(instructional design) 준거는 학습을 지원하기에 적합하게 설계되었는지를 평가한다. 셋째, 상호작용성(interactivity) 준거는 상호작용적인 요소가 있는지, 그리고 이들이 학습을 지원하고, 학습자들이 효과적으로 참여하도록 돕는지를 평가한다. 넷째, 탐색(navigation) 준거는 사이트가 탐색하기 적합하도록 단순하고 용이하게 설계되었는지를 평가한다.

다섯째, 동기적 요소(motivational components)는 사이트를 이용한 학습자의 능력이 향상되고, 적절한 인센티브가 있는지를 평가한다. 여섯째, 미디어의 사용(use of media) 준거는 학습을 지원하기 위해 다양한 미디어가 사용되었는지를 평가한다. 일곱째, 평가(evaluation)는 학습자의 반응과 학습 결과를 정확하게 평가할 수 있는 평가 요소들이 있는지, 그리고 이를 학습자들이 알고 있는지를 평가한다. 여덟 번째 준거는 심미성(aesthetics)으로, 학습을 지원하기에 시각적으로 적절하게 설계가 되었는지를 평가한다.

아홉 번째 준거는 기록의 보존(record keeping)으로 학습자들의 학습 과정을 평가하도록 학습 결과가 적절하게 저장되는 시스템이 존재하는지를 평가한다. 마지막은 어조(tone)로서 학습하기에 적합한 어조인지를 평가한다. 이상의 10가지 준거 중 마지막 준거인 어조는 본 연구에서 동영상 강의를 수행하지 않았기 때문에 제외하였다. 나머지 9개의 분석준거를 1등급, 2등급, 3등급의 급간으로 나누어 ICT 활용 교과 연수를 담당하는 전문가 3명과 함께 분석한 결과, 본 사이트의 평균 등급은 1.65 등급으로 보통이상이었으며, 평정의 일치도는 Kendall의 일치도 계수 W를 이용한 통계적 방법으로 검정한 결과 .828로 유의수준 .05에서 유의적이었다.

<표III-6> 증명의 역할 인식 설문

내가 생각하는 증명은 다음 중 무엇인지 하나만 골라서 쓰고 그렇게 생각한 이유를 써주세요.	
(1)	증명은 어떤 사실(진리)이 참임을 보이는 검증이다.
(2)	증명은 어떤 사실(진리)이 참인 이유를 설명하는 것이다.
(3)	증명은 수학적 의사소통을 하는 것이다. 즉, 나 자신에게 어떤 사실을 확신시키는 것이고 남에게 그 사실을 설득하여 납득시키는 것이다.
(4)	증명을 통하여 자연에 숨은 진리나 사실을 발견해내는 과정이다.
(5)	증명은 수학적 사실과 명제를 체계화하고 조직화하는 것이다.

IV. 연구 결과

탐구적인 수학 활동으로서 생성-수렴 모형에 의한 증명학습이 중학생들의 논증기하 영역에서의 증명능력에 미치는 효과, 증명 오류에 미치는 효과, 정당화 유형과 증명의 역할에 대한 인식의 양상에 대한 연구 결과를 각 절에서 살펴보고자 한다.

1. 생성-수렴 모형에 의한 증명학습이 증명능력 향상에 미치는 효과

이 절은 연구문제 1에 해당하는 것으로, 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 실시한 집단과 교과서 내용 전개에 따른 증명학습을 받은 집단 간에는 증명능력의 측면에서 유의적인 차이가 있는지를 검증하였다. 증명능력에 대한 사전검사 점수와 사후검사 점수의 차이로 유의수준 .01에서 종속표본 t-검정을 한 결과는 <표IV-1>과 같다.

위의 유의수준 .01에서 검정한 결과에 의하면, 증명 능력은 사전검사와 사후검사 점수를 기준으로 볼 때 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 수행한 집단과 수행하지 않은 집단 간에 유의적인 차이가 없는 것으로 해석할 수 있다. 이러한 결과는 교과서 형식의 표준적인 문제가 주로 제시되는 전형적인 지필 평가에서 이를 중점적으로 학습한 통제집단 학생들과 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 행한 학생들이 대등한 실력을 갖고 있는 것으로 해석될 수 있다. 보다 정확한 해석을 위하여 실험집단과 통제집단의 사후검사 점수로 두 독립표본 t-검정을 실시한 결과는 <표IV-2>와 같다.

위의 검정 결과, 두 집단 간 증명능력의 유의적인 차이가 있다고는 말할 수 없지만, 오히려 실험집단이 통제집단보다 증명능력에서의 평균점수는 높았다. 이상의 결과로 볼 때, 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 보다 다양한 방법을 활용하여 실시한다면, 증명능력의 증진에도 효과가 있을 수 있다는 기대를 할 수 있을 것이다.

<표IV-1> 생성-수렴 증명학습에서 증명 능력 향상에 대한 t-검정 결과

	N	M	SD	t
두 집단의 사전-사후의 차이검정	160	-.3313	2.247	-1.864

p< .01

<표IV-2> 실험집단과 통제집단의 증명능력에 대한 t-검정 결과

집단	N	M	SD	t
실험집단	80	14.550	3.864	
통제집단	80	13.988	4.312	0.869

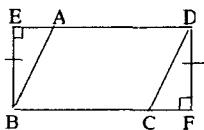
p< .01

생성수렴 모형에 의한 증명학습의 효과를 탐구적 수학 활동의 관점에서 살펴보면 다음과 같다. 모형에서 해결 대안 생성 활동인 브레인 스토밍 토론 활동에서 학생들은 증명과정에서 다양한 사고를 하고 있었는데, 그 예로 ‘평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이가 같다’는 명제를 증명하는 학생들의 학습활동을 살펴보면 다음과 같다.

1 학생1: 평행사변형 ABCD의 두 쌍의 마주보는 변이 길이가 같은 것은 당연한 것 아닌가?

2 학생2: 왜?

3 학생1: 평행이면 높이가 같잖아. 그러면 길이도 같으니까. 봐봐. [아래의 그림처럼 종이에 평행사변형을 그리고 삼각형을 보조선을 그어 만들면서] 두 삼각형이 합동이니까 마주보는 변이 같지.



4 학생2: SAS 합동이야? 그러면 높이는 같고 각도 직각인 것은 맞는데, 빗변이 같은지를 어떻게 증명해? 다른 한 변의 길이가 같은지를 모르잖아.

5 학생1: 그렇구나. 좀 더 생각 해 볼께. [자신이 그린 그림의 각의 크기를 살펴본다.]

6 학생3: 나는 다르게 그림을 그려서 증명할 수 있을 것 같은데. 평행사변형을 반으로 대각선을 그려서 나누면 될 것 같아. [평행사변형 ABCD의 꼭지점 B와 D를 연결하는 그림을 그린다.]

7 학생2: 잠깐, 아까 그 그림 증명되는데...

8 학생4: 어떻게 하는데?

9 학생2: 동위각을 이용하면 돼. [위] 그림에 ABCDEF 이름을 붙이고, 봐봐. 이 각[$\angle ABC$]하고 이 각[$\angle DCF$]이 동위각인데요 각[$\angle DCF$]은 저 각[$\angle CDA$]하고 엇각이야. 맞지?

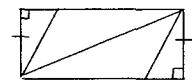
10 학생3: 그러면 이 세 각이 모두 같네.

11 학생2: 응, 맞아.. 그러면 이제 각 B가 직각

인데 거기에서 이 각[$\angle ABC$]을 뺀 것하고 각 D가 직각인데 거기에서 같은 각인 이 각[$\angle DCF$]을 빼면 두 각이 같잖아. 이 뾰족한 각, 그러니까 각 ABE하고 각 CDF가 같고. 두 삼각형이 ASA합동이니까 빗변이 서로 같잖아.

12 학생3: 그럼 한 쌍의 대변은 같은데, 다른 한 변은 어떻게 증명하는데?

13 학생2: 그건 이 그림에서 대각선을 그리면 돼. [점B와 점D를 잊고서] 이 두 개의 직각삼각형이 합동이잖아, [$\triangle EBD$ 와 $\triangle FBD$ 를 지적하면서] 빗변은 공통이고, 높이는 서로 같고, 그 끼인각은 45도로 같으니까. 그러면 마주보는 두 변 ED와 BD가 같고 여기서 아까 작은 삼각형의 짧은 변이 서로 같은데. 합동이니까. 그걸 빼면 남은 변의 길이가 같잖아.

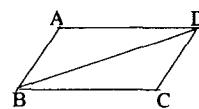


14 학생3: 너무 복잡해.

15 학생4: 그리고 그 각이 45도인 걸 증명 안 해도 되나?

16 학생5: [학생3에게] 아까 하려던 것 계속해 봐. 내 생각에는 그냥 대각선을 그려서 평행사변형을 둘로 나누고 그 두 삼각형이 합동이면 한 번에 두 변의 길이가 같다는 걸 보일 수 있어서 좋을 것 같거든.

17 학생3: 이렇게[B와 D를 이어서] 대각선을 이으면, 평행사변형이라고 했으니까 각각 엇각이 모두 같게 되잖아.

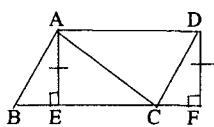


18 학생1: 왜?

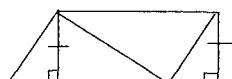
19 학생5: 평행사변형은 두 변씩 평행인데. 여기선 [그림 위에 각의 크기가 같은 것끼리 그리면서] AB와 DC가 평행이니까 각 ABD하고 각 CDB가 같지, 엇각이니까. 또 다른 쪽 각 ADB하고 각 CBD가 같고.

20 학생3: 그리고 대각선BD는 두 삼각형 모두에 공통으로 속하니까 합동이잖아.

- 21 학생2: 내 것보다 간단하다! 그냥 ASA네.
- 22 학생1: 더 쉬운 방법은 없나? 그럼 A하고 C를 이어서 증명해도 똑같은 결과가 나오나?
- 23 학생5: 응 방향만 바꿔지, 똑같은 것 맞아.
- 24 학생4: 아까 학생2가 했던 것을 좀 더 쉽게 할 수도 있을 것 같아.
- 25 학생2: 어떻게?
- 26 학생4: 삼각형을 한 쪽은 이렇게 안 쪽에 다 보조선을 그리면 될 것 같아. 그럼, 각B하고 각C는 동위각이라 같고 합동이잖아.



- 27 학생2: 어떤 합동조건인데? SAS는 아니잖아!
- 28 학생4: 어~정말 그렇구나. 그럼 틀렸나?
- 29 학생1: [시간이 조금 지난 뒤] 아니야, ASA 합동 맞아. 봐봐. 삼각형의 내각의 합이 180° 잖아, 그런데 두각이 같으니까 다른 한 각도 같지. 그러면 높이가 같고 그 양끝각이 모두 같으니까 합동이잖아. 그러면 대변에 해당하는 빗변의 길이가 같고.
- 30 학생2: 그러면 AD하고 BC가 같은 것은 어떻게 증명해야 되는데?
- 31 학생4: 그건 대각선을 그리면 SAS가 되잖아. [두 꼭지점 A와 C를 잇고] 대각선의 길이는 서로 공통이고, 좀 전에 AB와 DC가 길이가 같다고 했지, 맞지?
- 32 학생모두: 응.
- 33 학생1: 알았다! 그러면 삼각형 ABC하고 CDA가 합동이다! 이 각[$\angle CAB$]하고 이 각[$\angle ACD$]가 엇각이니까. ASA 합동이야. 맞지? 얘들아?



- 34 학생5: 다른 방법은 없을까?

위의 학생들의 활동을 보면, 교과서에 표준적으로 제시되는 일반적으로 가장 잘 쓰이며 통제집단과 공통적으로 사용한 방법이 line16부터 line20까지에 나타났다. 그러나 line3에서 line13까지의 활동과 line26에서 line 33까지의 활동처럼 학생들이 다양한 방법으로 증명을 시도하고 있는 것을 볼 때, 생성-수렴 모형에 의한 증명학습은 자연스러운 분위기에서 학생들이 증명문제를 보다 다양하고 창의적인 방법으로 수행하도록 하는 것으로 해석할 수 있다. 또한 녹취록에 나타난 세 가지 증명방법은 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 한 학급의 8개조 중에서 5개의 조에서 모두 나타났다. 이처럼 대부분의 학생들이 상호교류를 통하여 증명조건을 찾으면서 스스로 논리적으로 증명을 다듬어 가고 있다는 것을 볼 때, 교사의 설명식으로 진행된 수업을 받은 통제집단보다 실험집단의 학생들이 증명 문제를 더 자기주도적으로 해결하는 능력이 신장되고 있으며 학생들 스스로 교사의 도움 없이 연역적 증명을 구성할 수 있다는 점에서 시사하는 바가 크다고 볼 수 있다.

그리고 서로의 생각을 함께 수정하고, 합쳐서 더 좋은 생각으로 다듬어 나가거나, 많은 수의 아이디어를 내려고 노력하며, 어떤 생각이 더 좋은 지에 대한 평가는 하지 않는 위의 활동은 앞서 살펴보았던 브레인스토밍 기법의 4가지 규칙을 모두 자연스럽고 성실하게 수행하고 있는 것도 알 수 있다.

또한 위 활동에서 처음에는 ‘이 각’, ‘저 각’하고 지시하던 것을 점차 자연스럽게 기호로 바꾸어 말하는 학생들이 나타나는 것으로 보아 증명방법이 점점 정교해지고 있는 것을 알 수 있다.

2. 생성-수렴 증명학습이 증명 오류에 미치는 영향 분석

본 절에서는 생성-수렴 모형에 의한 증명학습이 중학생의 증명 오류 교정에 미치는 효과를 동형 문제로 구성된 사전·사후검사의 문항에서 오류를 범한 학생수의 감소율을 바탕으로 분석한다.

앞서 고찰한 Galbrith(1981) 등의 오류 유형을 토대로, 연구대상인 160명의 학생 전원의 증명 능력에 대한 사전검사 결과를 실시한 후 학생들의 오류를 범주화한 결과, 선수 지식의 부족 오류, 주어진 정보 해석의 오류, 형식화의 오류, 증명과정구성의 오류, 외적 확신의 오류, 경험적 오류의 6가지 유형으로 분류되었다. 생성-수렴 모형에 의한 증명학습이 학생들의 증명 오류에 미치는 효과를 교정율을 중심으로 분석하기 위해, 사전·사후검사에서 오류를 범한 학생들의 수를 백분율로 나타내었으며, 오류율의 차를 조사하여 오류교정효과를 <표IV-3>과 같이 살펴보았다. 학생들은 한 가지 오류만을 저지르는 것이 아니라, 두 개 이상의 오류를 함께 가지고 있는 경우도 있었기 때문에, 이를 계산하기 위해 한번이라도 오류를 범한 학생은 오류의 범주에 포함시켰다.

위 표에 나타나듯이 각 오류의 범주에서 실험집단과 통제집단의 사전검사 결과를 바탕으로 했을 때의 오류 범주별 백분율의 양상은 비슷하였으며, 두 집단 모두 오류 교정율은 전반적으로 감소하였다. 그러나, 생성-수렴 모형에 의한 증명학습 후 학생들의 오류 교정율이 통제집단의 학생들보다 형식화의 오류와 증명과정구성의 오류를 제외한 4가지 오류에서 더 큰 폭으로 감소하였다. 오류의 범주별 교정 양상에 대한 구체적 내용은 다음과 같다.

먼저 각 오류의 범주의 내용을 살펴보면, 첫째, 선수 지식의 부족 오류는 주어진 문제의 가정과 결론이 무엇인지를 구분하지 못하고, 사용한 용어의 정의나 증명과정에 필요한 지식이 부족하며, 부적절한 그림이나 예를 사용하는 경우로서 증명을 거의 하지 못하거나 비논리적으로 증명을 하는 경우이다.

둘째, 형식화의 오류는 증명을 할 때 주어진 문제를 읽은 후, 잘못된 기호화를 범하는 오류로 학생들은 의미를 이해하고도 이를 기호화할 때 어려워하는 경향이 있었다. 문제를 가정과 결론으로 정확하게 나누지 못하거나, 증명 내용을 문장으로는 서술하나 기호로는 명확히 서술하지 못하는 오류이다. 연구 결과, 학생들이 증명을 할 때, 가장 어려워하는 부분으로

<표IV-3> 생성-수렴모형에 의한 증명학습을 한 학생들의 오류 교정 효과

오류의 범주	사전검사에서의 오류율(%)		사후검사에서의 오류율(%)		감소율(%)	
	실험집단	통제집단	실험집단	통제집단	실험집단	통제집단
선수 지식의 부족	39%	35%	27%	30%	12%	5%
주어진 정보 해석의 오류	60%	63%	39%	51%	21%	12%
형식화의 오류	78%	75%	69%	64%	9%	11%
증명과정구성의 오류	45%	43%	36%	31%	9%	12%
외적 확신의 오류	35%	34%	15%	29%	20%	5%
경험적 오류	48%	46%	38%	39%	10%	7%

오류율도 가장 높았다.

셋째, 증명과정 구성의 오류는 용어나 부호와 같은 부분적인 요소나 전체 구조와 논리 관계 등과 같은 고차적인 부분을 잘못 이해하거나, 해답이나 이유를 말로 설명할 때 기호화한 내용을 해석하지 못하는 오류, 논증의 어떤 부분에서는 유사하나 부적절한 논리로 전개하는 오류이다. 증명과정의 구성은 상위권 학생들만이 제대로 구성할 수 있었는데, 이는 형식화 오류를 범한 대부분의 학생들이 증명과정구성의 오류도 범하기 때문인 것으로 보인다.

넷째, 주어진 정보 해석의 오류는 연산을 적용하거나 증명을 구성해 갈 때 문제의 정보나 자신이 하던 논증의 정보를 잊고 잘못 해석하는 오류이다. 정의의 임의적 속성을 이해하지 못하는 경우, 이미 주어진 전제도 증명하려는 경우, 증명의 세부적인 추론 과정을 연결할 때 이전의 지식이나 정보를 잊고 잘못 해석하는 경우, 잘못된 반례로 반박하는 경우를 말한다. 성취 수준이 중간인 학생들이 완벽한 증명을 하지 못하는 경우는 주로 정보 해석의 오류를 범할 때로 나타났다. 이는 학생 개개인이 나름 대로 증명과정을 구성하고 필요한 이전 지식을 표상하는 과정에서 메타인지적인 반성을 행하지 않기 때문으로 유추될 수 있다.

다섯째, 외적 확신의 오류는 증명과정에서 어떤 결론을 도출하는 이유를 쓸 때, 교과서에서 보았거나, 선생님이나 성적이 우수한 학생 등이 행하는 방법이기 때문이라고 설명하는 경우를 말한다. 즉, 증명의 일반적인 타당성을 질문하였을 때 외적 권위에 의존하여 그 의미를 깨닫지 못하고 의례적으로 증명을 하는 경우이다. 성취수준이 하위인 학생들은 제대로 증명 문제를 해결할 수 없었으나, 증명 문제를 해결하였을 때도 외적 확신에 주로 의존하였다.

여섯째, 경험적 확신의 오류는 그림이나 예만을 귀납적으로 사용하여 증명을 하고 논리적인 근거를 제시하지 못하여 일반화시키지 못하는 오류로, 학생들은 주어진 문제를 증명하기 위해 다양한 예를 제시하기도 하지만, 모든 예를 제시하지 못하는 증명을 행하는 경우가 이에 속한다.

오류 교정율을 생성-수렴 모형의 증명학습을 한 학생들을 중심으로 구체적으로 살펴보면, 주어진 정보 해석의 오류 교정율과 외적 확신의 오류에 대한 교정율이 높은 편이었다. 이는 생성-수렴 활동에서 브레인스토밍 토론 활동과 해결대안선택 활동을 하였기 때문에, 오류가 교정된 것으로 해석할 수 있다. 증명 문제를 해결할 때 가능한 많은 증명 아이디어를 서로 설명하고 문제해결에 적합한 최선의 해결대안을 선택하기 위해 비판적인 판단과정을 수행하였기 때문에 많은 정보를 해석하고 스스로 오류를 교정하여 증명 지식을 구성하는 것이 가능하였기 때문이다. 또한, 브레인스토밍의 4가지 규칙과 판단 지연의 원리로 인하여 생성-수렴 활동에 적극적으로 참여함으로써 외적 확신의 오류가 많이 교정되었기 때문에 해석될 수 있다. 그리고 선수 지식의 부족 오류의 교정도 생성-수렴 토론에 참여하여 스스로 증명 문제를 해결하기 위해서 학생들이 서로의 증명 지식을 상호 교환·습득하고, 습득된 지식을 기억하기 위해 부단히 노력한 결과라 할 수 있다.

그러나, 형식화의 오류와 증명과정 구성의 오류에 있어 교정율이 9%인 것은 학생들이 증명문제해결 과정에서 가장 어려워하는 오류이며, 생성-수렴 활동으로 증명 문제를 해결할 때 토론으로 문제를 해결하고 조별로 한 명의 기록자 역할을 번갈아 하도록 함으로써 형식화를

해 볼 개인적인 학습의 기회가 적었기 때문인 것으로 해석할 수 있다. 또한, 경험적 오류의 교정에서는 하나의 증명 문제를 해결할 때 브레인스토밍 토론 활동을 하여 다양한 예를 들어 증명을 하였기 때문에 다른 오류의 교정을 위해 감소 폭이 적은 것으로 볼 수 있다.

이상의 논의에서, 생성-수렴 토론 활동은 오류 교정에 효과가 있음을 알 수 있다. 또한, Web의 성찰노트에 학생들이 기록한 내용 중 ‘교사만이 절대적인 수학적 지식을 가르치고 학생들은 이를 배우는 것으로 인식했었으나, 생성-수렴 증명학습 후 학생 스스로 토론 활동을 통해 수학적 오류를 교정하면서 올바른 지식을 습득할 수 있었던 것이 인상적이었다’는 글들을 볼 때, 엄밀하고 형식적인 증명들로 표현된 수학적인 결과들이 인간 활동의 다른 유산들처럼 사회적으로 구성되는 것이라는 것을 학생들이 경험할 수 있는 기회를 제공할 수 있었다. 이는 학문의 성장이라는 부분에서 수학적 오류의 역할이 가치가 있음을 간접적으로 보여준 것이며 수학적 오류의 자기주도적 교정은 학습자의 동기 유발에 긍정적인 영향을 줄 수 있음을 시사한다.

3. 생성-수렴 증명학습이 중학생의 정당화 유형과 증명의 역할 인식에 미치는 영향 분석

학생들의 증명학습에서의 정당화 유형을 사전·사후검사의 문항 6과 7 그리고 Web 상의 토론게시판의 내용을 중심으로 살펴본 결과는 <표IV-4>과 같다.

위의 결과에서, 사전검사 결과를 기준으로 분석한 학생들의 정당화 유형은 실험집단과 통제집단 모두 비슷한 분포를 보였으며 경험적 정당화 유형을 가장 많이 보여주고 있었다. 그 후, 생성-수렴 모형에 의한 증명학습과 교과서 내용전개에 따른 증명학습을 수행한 두 집단의 학생들 모두 사후검사와 Web 상의 게시판토론 결과, 분석적 정당화로의 이행을 보였으며, 경험적 정당화와 외적확신의 정당화는 감소하였다.

그러나, 정당화 유형의 변화율에서는 두 집단의 차이가 커는데, 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 실시한 실험집단의 학생들은 교과서 내용전개에 따른 증명학습을 실시한 통제집단의 학생들보다 분석적 정당화를 구성하는 학생

<표IV-4> 생성-수렴모형에 의한 증명학습 후 학생들의 정당화 유형의 변화 양상

정당화 유형의 범주	사전검사에서의 정당화 유형		사후검사와 Web 상의 토론게시판 활동에 나타난 정당화 유형		변화율(%)	
	실험집단	통제집단	실험집단	통제집단	실험집단	통제집단
외적확신의 정당화	35%	33%	18%	30%	-17%	-3%
경험적 정당화	40%	39%	34%	32%	-6%	-7%
분석적 정당화	25%	28%	48%	38%	+23%	+10%

들이 현저하게 증가하였고, 외적확신의 정당화 유형에 속한 학생들도 보다 많이 감소하였다. 다만, 경험적 정당화의 감소 비율은 생성-수렴 증명학습을 실시한 학급 학생들의 감소 폭이 1%정도 적었는데, 이는 브레인스토밍 토론 활동에서 많은 증명방법을 보였던 것으로 인하여 예를 사용하여 귀납적으로 증명하는 방법과 혼동을 한 것으로 볼 수 있다.

성찰노트에 기록한 증명의 역할에 대한 인식의 설문 검사 결과, 실험집단의 학생들은 도형의 증명 영역에서 증명의 역할을 주로 참임을 보이는 입증의 역할과 주어진 문제를 참임을 설명하는 역할, 의사소통으로서의 역할의 순으로 인식하고 있었다. 그리고 통제집단 학생들의 증명의 역할에 대한 인식은 실험집단과 같이 입증, 설명, 의사소통의 기능을 수행하는 것으로 생각하는 경향이 나타났으나, 증명은 참임을 보이는 것이라는 입증의 역할을 한다고 생각하는 경향이 강하였다. 따라서 설명의 역할이나 의사소통의 역할이라는 증명의 기능에 대한 인식 비율은 실험집단의 학생들보다 상대적으로 낮은 편이었다. 통제집단의 학생들보다 실험집단의 학생들이 설명의 기능과 의사소통

기능을 더 많이 선택하였는데, 이는 생성-수렴 모형에 의한 지도 과정에서 브레인스토밍 활동과 해결대안선택 경험에 의한 것으로 해석할 수 있다. 이러한 결과는 생성-수렴 모형에 의한 학습은 학생들에게 증명의 다양한 역할을 경험할 수 있는 기회를 제공한다고 볼 수 있다. 증명의 역할에 대한 인식의 분포는 <표IV-5>와 같다.

이밖에도, 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 전반적으로 반성한 성찰노트에서 실험집단의 학생들 대다수는 위의 모형에 의한 증명학습 방법이 무척 흥미로웠으며, 수학 문제를 해결 할 때 도움이 되고 보다 적극적인 태도를 가질 수 있었다는 긍정적인 평가를 하였다. 또한, 통제집단의 학생들은 실험집단의 학생들만큼 생성-수렴 토론회습을 하지 않고 단순히 Web 상에서의 게시판 토론회습만을 행하였음에도 불구하고, 게시판 토론회습을 통한 증명학습에 대해 긍정적인 평가를 하고 있었다.

이는 인터넷을 활용한 게시판 토론회습방법 하나만으로도 학생들에게는 새로운 학습 경험 이 될 수 있었기 때문인 것으로 해석할 수 있을 것이다.

<표IV-5> 학생들이 확신하는 증명의 역할

증명의 역할 범주	학생들의 비율(%)	
	실험집단	통제집단
입증의 기능	39%	49%
설명의 기능	32%	29%
의사소통의 기능	22%	11%
발견의 기능	5%	5%
체계화의 기능	2%	6%

사후검사를 마치고 실시한 학생들의 각각의 수업 모형에 대한 자기평정 설문조사 결과를 두 독립표본 t-검정을 실시한 결과는 <표IV-6>과 같다.

위의 연구결과, 유의수준 .05에서 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 한 경우와 그렇지 않은 경우에 학생들의 각 수업 활동에 대한 자기 평가는 유의적인 차이가 있음을 알 수 있다. 특히, 실험집단의 평균 점수가 90.03점, 통제집단의 평균 점수가 80.86점인 것을 볼 때, 실험집단이 보다 긍정적인 자기평가를 하고 있다고 해석할 수 있다.

V. 결론 및 제언

생성-수렴 모형에 의한 증명 학습-지도 방법은 학생들이 교과내용에 대한 심층적인 이해를 하면서 증명학습을 보다 의미충실한 것으로 만들 수 있다. 본 연구는 논증기하 영역에서 추측과 연역을 통하여 증명문제를 해결해 나갈 때 학생들이 시행착오를 겪으며 다양한 증명 문제 해결방법을 생성하고 그 가능성을 탐구하며 이러한 아이디어들 중 최선의 해결대안을 선택하여 연역적 증명으로 조직화하는 증명 학습-지도 방법을 고안하였다. 증명의 지도에는 문제의 타당성에 대한 의심을 제거하기 위한

자연스러운 목적이 있어야 하며, 그 목적에 도달하도록 지도하기 위해서 증명 활동과정에서 토론의 장이 있어야 할 것이다. 따라서, 본 연구는 제시된 문제를 깊이 이해하고, 적절하고 중요한 해결방법을 발견하며, 이러한 해결대안을 많이 생성해 내고, 이를 가운데서 최선의 것을 선택하여 연역적 증명을 완성한다면, 이는 증명능력의 신장에 효과적일 것이라는 탐구지향적인 기본 관점을 취한다.

본 연구가 사용한 학습-지도 방법은 학생 스스로 증명 문제해결과정에서 아이디어를 다양하게 생성해내고 분석하며 판단하는 과정을 통하여 최선의 대안을 선택함으로써 증명을 구성하고 연역적 증명으로 완성하도록 하는 방법이며, 이를 ‘생성-수렴 모형에 의한 증명학습’으로 명명하였다. 이 수업모형을 8학년 학생 160명을 대상으로 10주 동안 40시간에 걸쳐 도형 영역 중 여러 가지 사각형의 성질과 관계를 학습할 때 적용·실시한 결과는 다음과 같다.

첫째, 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 실시한 학급의 학생들이 그렇지 않은 학급의 학생들보다 증명 문제해결능력 검사에서 평균점수는 높았지만, 유의수준 .01에서 통계적 검정을 실시한 결과, 두 집단 간의 증명능력은 유의적인 차이가 있다고 할 수 없었다. 그러나, 교과서 내용전개에 따른 증명학습을 한 학생들 보다 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 수행

<표IV-6> 증명학습 활동에 대한 자기평정

집단	N	M	SD	t
실험집단	80	90.03	7.254	3.129 **
통제집단	80	80.86	6.421	

**p< .05

한 학생들이 토론활동으로 보다 창의적이고 다양하게 해결방법을 고안하고 상호 교류를 통하여 증명조건을 찾으면서 스스로 증명을 논리적으로 다듬어 가는 것을 볼 때, 지속적으로 시행한다면 증명능력이 신장될 가능성이 있다고 볼 수 있다.

둘째, 학생들은 논증기하 영역에서 증명을 할 때 선수 지식의 부족 오류, 형식화의 오류, 주어진 정보의 해석 오류, 증명과정구성의 오류, 외적 확신의 오류, 경험적 확신의 오류를 저질렀다. 오류 교정율에 있어서는 생성-수렴 모형에 의한 증명학습 후 학생들의 오류 교정율이 교과서 내용전개에 따른 증명학습을 한 학생들보다 형식화의 오류와 증명과정구성의 오류를 제외한 다른 범주의 오류에서 더 큰 폭으로 감소하였다. 특히, 주어진 정보 해석의 오류 교정율, 외적 확신의 오류, 선수 지식의 부족의 오류에 대한 교정율이 높은 편이었다. 이는 증명 문제를 해결할 때 가능한 많은 증명 아이디어를 서로 설명하고 문제해결에 적합한 최선의 해결대안을 선택하기 위해 비판적으로 판단하는 과정을 수행하면서 자연스럽게 스스로 지식을 구성한 결과로 해석할 수 있다.

셋째, 학생들의 증명학습에서의 정당화 유형은 실험집단과 통제집단 모두 경험적 정당화에서 분석적 정당화로의 이행을 보였으나, 정당화 유형의 변화율에서는 두 집단의 차이가 큰 것으로 나타났다. 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 실시한 실험집단의 학생들은 교과서 내용 전개에 따른 증명학습을 실시한 통제집단의 학생들보다 분석적 정당화를 구성하는 학생들이 현저하게 증가하였고, 외적확신의 정당화를 보이는 학생들도 보다 많이 감소하였다. 또한, 실험집단의 학생들은 증명의 역할을 주로 참임을 보이는 입증의 역할로 인식하고 있는 통제

집단의 학생들보다 다양하게 인식하고 있었다. 즉, 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 받은 학생들은 증명이 입증의 역할을 하는 것 외에도, 주어진 문제가 참임을 설명하는 역할과 증명은 수학적 의사소통의 역할도 수행하는 것 등으로 다양하게 인식하고 있음을 알 수 있다. 이는 생성-수렴 모형에 의한 증명학습이 보다 다양하고 바람직한 정당화 유형을 갖도록 하는데 효과적임을 시사한다.

이상의 결론을 토대로 생성-수렴 모형에 의한 증명학습은 개념들 간의 관계를 검토하고 이해하게 하며, 의사결정을 해야 할 경우에는 선택에 대한 타당한 근거를 검토해 볼 수 있게 함으로써 진정한 수학적 탐구를 할 수 있는 학습을 가능하게 한다. 또한, 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 하면서 교과서에 제시된 모범적인 증명을 익히면서 ‘만들어진 수학’을 배우는 것이 아니라, 학생들 스스로 다양한 유형의 아이디어와 가능한 많은 수의 아이디어들을 생각하고 이를 정교하게 다듬어가는 활동을 수행하면서 ‘만들어가는 수학’을 경험할 수 있을 것이다.

본 연구를 토대로 앞으로의 연구에 대한 제언은 다음과 같다. 첫째, 본 연구의 대상은 특정 지역의 8학년 여학생만을 대상으로 하였기 때문에 다른 학년을 대상으로 연구를 실시하여 생성-수렴 모형에 의한 증명학습 방법을 더욱 세련되게 다듬어야 할 것이다.

둘째, 증명은 대부분의 학생들이 어려워하는 분야로, 학생들마다 개인차가 많이 나타날 수 있으므로 수준별로 생성-수렴 모형에 의한 증명학습을 할 수 있는 방안을 개발하고 이를 검증하여 증명능력 향상에 보다 내실을 기할 필요가 있다.

참고문헌

- 김영채(2001). 창의적 문제해결: 창의력의 이론, 개발과 수업. 교육과학사.
- 나귀수(1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석: 중학교 기하단원을 중심으로. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
- 노은정(2002). 수학 학습에서 오류의 활용 효과-정의지도를 중심으로. 이화여자대학교 대학원 석사 학위 논문.
- 류성립(1993). 중학생의 기하 증명능력과 오류에 대한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사 학위논문.
- _____ (1998). 피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도방법 탐색. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.
- 서동엽(1999). 증명의 구성요소 분석 및 학습 지도 방안 탐색. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
- 우정호 외(2003). 역사발생적 수학교육 원리에 대한 연구(1) -증명의 의미 지도의 역사발생적 전개. 학교수학, 5(4). 401-420.
- 전현미(1996). 기하 증명과정의 오류 경향 연구 -중2수학을 중심으로-. 경북대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 조완영(2000). 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명 활동에 관한 사례 연구. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.
- Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors*. Ablex Publishing Corporation.
- Borgen, K. L., & Manu, S. S. (2002). What do students really understand?. *Journal of Mathematical Behavior*, 21. 151-165.
- de Villers, M. (1991). "Pupil's needs for conviction and explanation within the context of geometry, In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 3 (pp.256-262).
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.95-125). Kluwer Academic Publishers.
- Ellis, A. L., Wagner, E. D., & Longmire, W. R. (1999). *Managing web-based training*. American Society for Training & Development.
- Galbraith, S. (1981). Aspects of proving: a clinical investigation of process. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 1-28.
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop, K. Clements, J. Kilpatrick, & C. Keitel (Eds.), *International Handbook of mathematics education* 2. Kluwer Academic Publishers.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld and J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, III (pp.234-283) American Mathematics Society, Providence, RI.
- Herbst, P. G. (2002). Engaging students in proving : a double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(3), 176-203.
- Housman, D., & Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students. *Edu-*

- cational Studies in Mathematics, 53, 139-158.
- Kathleen, M., Heid, K., Hollebrands, F., & Iseri, L. W. (2002). Reasoning and justification, with example from technological environments, *Mathematics Teacher*, 95(3), 126-135.
- Knuth, E. J. (2002). Proof as a tool for learning mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.
- Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 151-161.
- Lakatos, I. (1991). 수학적 발견의 논리. (우정호, 역). 민음사.(영어 원작은 1976년 출판)
- Lulu, H., & Celia, H. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.
- Miyazaki, M (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics, *Educational Studies in Mathematics* 41, 47-68.
- Moore, R. C. (1990). Students' difficulties in learning to do mathematical proof. Doctoral Dissertation. University of Georgia.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.
- Caroselli, M. (1992). *Quality driven designs: 36 activities to reinforce TQM concepts*. San Diego, CA.: Pfeiffer.
- Polya, G. (1962). *Mathematical discovery*, 1. Princeton University Press.
- _____ (1986). 어떻게 문제를 풀 것인가. (우정호, 역). 천재교육.(영어 원작은 1962년 출판)
- Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001) Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics* 48, 83-99.
- Rubinstein, R., Craine, T., & Butts, T. (1995). *Integrated mathematics 2*. Evanston, IL: McDougal Littell.
- Timothy V. C., & Rubenstein, R. N. (2000). Sharing Ideas about Teaching Proving. *Mathematical Teacher*. 93(4), 289-291.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101-119.
- _____ (2002). Procedural route toward understanding the concept of proof. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 1, 132-142.
- van den Brink-Budgen, R. (1999). *Critical thinking for students: how to assess arguments and effectively present your own*. How To Books Ltd, United Kingdom.

Development and Applications of Mathematical Proof Learning-Teaching Methods: the Generative-Convergent Model

Lee, Chong Hee (Ewha Womans University)

Kim, Bu Mi (Graduate School of Ewha Womans University)

This study has been established with two purposes. The first one is to development the learning-teaching model for enhancing students' creative proof capacities in the domain of demonstrative geometry as subject content. The second one is to aim at experimentally testing its effectiveness.

First, we develop the learning-teaching model for enhancing students' proof capacities. This model is named the generative-convergent model based instruction. It consists of the following components: warming-up activities, generative activities, convergent activities, reflective discussion, other high quality resources etc.

Second, to investigate the effects of the generative-convergent model based instruction, 160 8th-grade students are selected

and are assigned to experimental and control groups. We focused that the generative-convergent model based instruction would be more effective than the traditional teaching method for improving middle school students' proof-writing capacities and error remediation.

In conclusion, the generative-convergent model based instruction would be useful for improving middle grade students' proof-writing capacities. We suggest the following: first, it is required to refine the generative-convergent model for enhancing proof-problem solving capacities; second, it is also required to develop teaching materials in the generative-convergent model based instruction.

* key words: proof(증명), proof-error(증명오류), the generative-convergent model based instruction(생성-수렴 수업 모형)

논문접수 : 2004. 1. 31

심사완료 : 2004. 3. 8

부록1. Web-게시판 토론 활동을 위한 자기질문리스트

증명문제 해결 단계		자기질문
1 단 계	가정/결론의 확인단계	<ul style="list-style-type: none"> · 주어진 명제의 가정은 무엇인가? · 주어진 명제의 결론은 무엇인가? · 앞에서 비슷한 명제를 증명한 적이 있는가? · 어떤 성질이나 정리를 이 증명에 이용할 수 있을까? 왜 그렇게 생각했는가? · 이 명제가 참인지 거짓인지 예측해볼 수 있는가? 왜 그렇게 생각했는가?
2 단 계	보조(그림, 컴퓨터 프로그램:GSP등) 표현 활용 단계	<ul style="list-style-type: none"> · 이 명제를 표현할 수 있는 그림을 그릴 수 있는가? · 그림에 기호를 붙일 수 있는가? · 보조선을 그릴 필요가 있는가? 있다면 어떻게 그려야 할까? 왜 그렇게 그려야 할까? <p>(단, 보조선은 주어진 도형을 증명하기 위해 필요한 부분을 만들기 위해서만 사용하세요. 예를 들어, 이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 같다는 것을 증명하려면 최소한 주어진 삼각형을 둘로 나누어 합동을 이용해야 하니까 보조선을 그려서 주어진 삼각형을 나눠야 하겠죠^^)</p> <ul style="list-style-type: none"> · 그림을 보고 가정과 결론을 수학적 기호를 사용하여 표현할 수 있는가? · 다른 그림을 사용하여 이 명제를 표현할 수 있는가? 있다면, 어떤 그림인가? 그것을 사용하여도 이 명제는 증명이 가능할까? 그리고 이렇게 증명한 결과도 똑같을까? · 작도를 이용하였는가?
	서술단계	<ul style="list-style-type: none"> · 도형의 기본 성질 중 어떤 성질을 사용하였는가? · 이 전에 학습했던 기본 성질이나 정리를 이용할 수 있는가? · 증명을 기호로 쓸 때 어떤 점이 어려운가? · 증명을 기호로 쓸 때 그림과 제대로 맞추어 보았는가? · 결론을 이끌어내는 과정이 조리 있고 논리적인가? · 친구에게 증명과정을 말로 설명할 수 있는가? · 친구에게 그림을 보면서 증명을 설명할 수 있는가?
	확인 단계	<ul style="list-style-type: none"> · 현재 수행한 증명은 정확한가? · 증명을 기호로 쓸 때 실수한 부분은 없는가? · 증명과정에서 부정확한 부분이나 자신이 없는 부분이 어디인가? 그 이유가 무엇인가? · 전체적인 증명의 과정이 논리적인가? · 증명을 할 때 오류가 발생한 부분을 수정하였는가? 수정을 할 때 생각해야 될 원리나 근거는 무엇인가? · 기호는 올바르게 사용하였는가?
3 단 계	반성 및 적용 단계	<ul style="list-style-type: none"> · 증명을 하면서 가장 어려웠던 점이 무엇인가? · 전체적인 증명의 과정이 논리적인가? · 증명을 할 때 가장 주의했던 것과 그 증명의 핵심원리는 무엇인가? · 증명한 명제를 어떤 문제를 풀 때 적용할 수 있을까? · 전화로 친구에게 이 증명을 이용하여 주어진 명제를 설명하고 그렇게 된 이유를 말로 설명할 수 있는가?

부록2. Web-개시판 토론 활동을 위한 관찰체크리스트

()학년 ()반 ()번 이름: _____				
<p>다음은 학생들이 증명과정에서 문제를 얼마나 이해하면서 증명을 해나가고 있는지를 관찰해 보기 위한 일반적인 체크리스트이다. 이 체크리스트의 결과는 학생들의 자기질문 리스트를 활용한 문제해결을 무의식적으로 할 수 있도록 어느 정도 연습이 되고 있는지를 알아보고 더 나은 수준으로 향상시키는데 참고가 될 수 있을 것이다.</p>				
나의 행동	행동의 실제			
	드물게	가끔	대개	거의항시
1. 증명의 목적을 분명하게 알고 있다.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. 문제의 문맥을 정확하게 파악하고 있다.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. 문제를 해결할 때 여러 가지 사각형의 정의를 사용한다.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. 각 단계별 자기질문 리스트의 질문을 반 이상 사용하여 스스로 모니터링 한다.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. 자기질문 리스트를 활용하면서 자신의 오류나 실수를 찾아내고 고치려고 노력한다.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. 이전에 학습했던 증명방법을 적용해 본다.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. 증명의 가정과 결론을 구분할 수 있다.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. 삼각형의 합동조건을 사용한다.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. 평행사변형의 성질을 사용한다.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. 직사각형의 성질을 사용한다.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
11. 마름모의 성질을 사용한다.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
12. 정사각형의 성질을 사용한다.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
13.. 문제를 해결할 때까지 끈기 있게 자기질문 리스트를 활용한다.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
14. 문제를 해결한 후 자기질문 리스트를 활용하여 검토한다.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

부록3. 증명학습 활동에 대한 자기평정지

()학년 ()반 ()번 이름:

다음은 증명 단원을 인터넷 사이트(사각형의 탐구)의 게시판 토론과 수업시간에 토론학습이나 설명식 학습 등으로 공부한 뒤 여러분이 어떤 도움을 받았는지를 알아보기 위한 체크리스트입니다. 결코 그렇지 않다는 1, 그렇지 않다는 2, 보통이다는 3, 그렇다는 4, 매우 그렇다는 5에 표시를 해 주세요. 자, 문제를 잘 읽고 성심껏 대답해 주세요.

1 2 3 4 5

1. 나는 예전에 비해서 수학 문제를 새롭고 다양한 방법, 그리고 더 좋은 방법으로 해결할 수 있는 방법을 찾는다.
2. 나는 문제를 고지식하게 해결하려는 사람을 보면 참기 어렵다.
3. 나는 수학 문제를 풀 때, 예전에 비해서 수학 외적인 다른 자료를 참고하는 편이다.
4. 나는 예전에 비해서 수학문제를 다양한 방법으로 풀어보려고 한다.
5. 나는 예전에 비해서 질문을 많이 한다.
6. 나는 예전에 비해서 평소에도 수학문제를 생각하게 되었다.
7. 나는 예전에 비해서 선생님의 의견을 아무 생각 없이 수용하지 않는다.
8. 나는 예전에 비해서 문제나 질문에 대하여 때때로 독특하고, 새롭고, 영리한 답을 할 수 있게 되었다.
9. 친구들은 수학문제를 풀 때, 나를 새로운 방법으로 문제를 푸는 것을 즐기는 편이라고 생각한다.
10. 나는 예전에 비해서 친구들과의 수학 문제의 토론과 의견의 불일치가 도움이 된다고 생각한다.
11. 친구들은 어려운 수학 문제를 풀 때 나의 의견을 물어보기를 좋아한다.
12. 나는 나와 분명하게 의견 차이가 있는 다른 사람들과도 잘 지낸다.
13. 나는 예전에 비해서 다른 사람과 생각이 다르다고 걱정하지 않게 되었다.

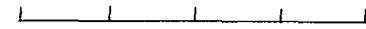
증명학습 활동에 대한 자기평정지(계속)

1 2 3 4 5

14. 나는 예전에 비해서 상상을 잘하며 여러 가지 일, 문제 등을 개조하는 것에 관심을 갖게 되었다.



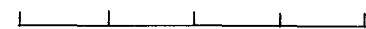
15. 나는 예전에 비해서 새로운 아이디어에 대해 의심하고 판단을 미루기보다는 오히려 호의적이고 긍정적이 되었다.



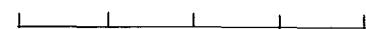
16. 나는 예전에 비해서 어떤 생각의 결론을 이끌어 내기 위해 근거(이유)를 대려고 노력하게 되었다.



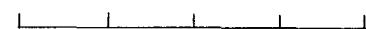
17. 예전에 비해서 나의 증명하는 방식과 자료가 결론을 도출하는데 적절한 방법인지를 생각하게 되었다.



18. 나는 이전에 증명에서 활용했던 증명 방식이나 증명결과를 적절하게 판단하여 사용할 수 있다.



19. 나와 분명하게 의견 차이가 있는 다른 친구들을 설득할 때 타당한 증거를 제시하는 편이다.



20. 나는 예전에 비해서 문제해결 방법과 그 해가 가장 효과적인지를 판단하는 시간을 갖게 되었다.



21. 나는 예전에 비해서 문제를 해결할 때 나의 방법이 문제의 뜻에 알맞은 것인지를 생각한다.



22. 나는 예전에 비해서 일을 해결하기 위해 다른 사람이 내놓은 아이디어가 옳은지 아닌지를 생각하게 되었다.



23. 나는 예전에 비해서 일을 처리할 때 다른 사람이 내놓은 아이디어의 근거가 타당한지 아닌지를 생각하게 되었다.



24. 나는 예전에 비해서 나의 주장이 논리적인 일관성이 있고 일의 처리순서에 맞는지 생각하게 되었다.



25. 나는 예전에 비해서 나의 아이디어가 주어진 일에 관련된 것인지를 최종적으로 판단하려고 노력한다.

