

지수 사상을 이용한 비선형 열-탄소성 고체의 유한요소해석 : 모델과 시간적분법

Finite Element Formulation for the Finite Strain Thermo-Elasto-Plastic Solid using Exponential Mapping Algorithm : Model and Time Integration Scheme

박재균*
Park, Jaegyun

국문요약

일반적으로 운동방정식을 풀기위해 많이 이용되는 선형근사모델은 계산이 용이한 반면에 큰 변형상태에서는 그 오차가 커지는 단점이 있다. 따라서 엄밀한 구조물의 응답해석을 위해서는 물성과 기하에 대한 비선형성을 고려해야 한다. 또한, 강과 같이 연성이 큰 재료는 소성 변형을 일으키면서 소산되는 에너지의 대부분이 열로 변하게 되며, 이 열은 열역학 제1 법칙과 제2 법칙에 따라 다른 부분으로 전달된다. 이렇게 전달된 열은 온도를 상승시켜 재료의 강도를 약화시키는 역할을 하며, 이것이 다시 구조물의 응답에 영향을 미친다. 본 논문에서는 지진 등의 큰 하중을 받거나 화재로 인한 열 하중을 받는 강구조물의 비선형 대 변형 현상을 적절히 해석할 수 있는 열-탄소성 물성모델을 제안하고 3차원 유한요소해석을 수행하였다.

주요어 : 비선형 대변형, 열-탄소성 모델, 3차원 유한요소 해석

ABSTRACT

The linear analysis for the balance of linear momentum of a structure is relatively easy to perform, but the error becomes large when the structure experiences large deformation. Therefore, the material and geometric nonlinearity need to be considered for the precise calculations in that case. The plastic flow of a ductile steel-like metal mainly transforms its dissipated mechanical energy into heat, which transfers under the first and second law of thermodynamics. This heat increases the temperature of the material and the strength of the material decreases accordingly, which affects mechanical behavior of the given structure. This paper presents a finite-strain thermo-elasto-plastic steel model. This model can handle large deformation and thermal load simultaneously, which is common during earthquake periods. Two 3-dimensional finite element analyses verify this formulation.

Key words : nonlinear large deformation, thermo-elasto-plastic model, 3-dimensional finite element analysis

1. 서론

일반적으로 강구조물이 지진 등의 큰 하중을 받아 대 변형을 일으키는 경우에 소성변형에 의한 기계적 에너지의 소산은 대부분 열에너지로 전환된다. 이 열에너지는 구조물의 온도를 상승시키며, 동시에 구조물 재료의 물성을 약화시킨다. 이러한 소성 변형과 열과의 상호작용은 동시에 일어나며, 변형이 클수록 그 영향 및 결과가 순수한 기계적 해석과 달라진다. 따라서 엄밀한 해석을 위해서는 열에 의한 영향을 고려해야 한다.⁽¹⁾ 열을 고려한 기하와 물성 비선형 모델은 기계적 변형에 의해 발생하는 열을 계산하는 문제에 사용될 수 있으며, 화재 등으로 인한 열 때문에 재료의 항복응력이 내려가서 소성변형이 생기기 시작하는 문제도 다룰 수가 있다. 한 예로 9.11 테러 당시의 쌍둥이 빌딩이 붕괴된 메커니즘에 적용될 수 있다.

정밀한 해석을 위해서는 먼저 적절한 비선형 이론을 사용

하는 것이 필요하며, 둘째로 열역학 법칙을 만족하는 물성모델을 사용해야 한다. 본 연구에서는 일반적으로 많이 받아들여지는 Lee & Liu⁽²⁾의 변형모델을 사용하며, Simo⁽³⁾가 제안한 지수 사상(exponential mapping)을 이용한 시간적분 모델과 일반적인 비선형 자유에너지 함수(free energy function)를 가정하고, Von Mises 탄성한계와 associative flow 소성이론을 적용하여 연속체 열-탄소성 재료의 거동해석을 수행하였다. 예제는 준-정적(quasi-static), 3차원 문제를 중심으로 제시하였다.

2. 지배방정식과 물성 모델

이 장에서는 힘의 평형과 열역학(thermodynamics) 법칙을 따르는 기하 및 물성 비선형 열-탄소성 모델을 제시한다.

2.1 변형 모델

일반적인 대변형(large deformation, finite strain) 문제에서는 각 시각에서 연속체가 존재하는 공간이 다르기 때문에 이를 명확히 나타내야 한다. 대상이 되는 연속체의 존재

* 정회원 · 단국대학교 토목환경공학과 전임강사(대표저자 : jpark@dankook.ac.kr)
본 논문에 대한 토의를 2004년 6월 30일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.
(논문접수일 : 2003. 12. 2 / 심사종료일 : 2004. 2. 2)

공간을 x 라 하면, 시각 $t_0 < t_1 < t_2$ 에 대하여 공간 x_0, x_1, x_2 가 존재하며 이는 그림 1에 나타나 있다. x_0 에서의 연속체의 각 점을 위치벡터 \mathbf{X} 로 나타내고, 현재 시각의 공간인 x_2 에서의 \mathbf{X} 에 대한 사상(mapping)을 \mathbf{x} 라 하자. 이것을 변형함수 $\varphi(\mathbf{X})$ 를 사용하여 나타내면 다음과 같다:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) \quad (1)$$

초기위치인 x_0 에서의 미소요소(infinitesimal element) 벡터 $d\mathbf{X}$ 에 대한 x_2 에서의 사상을 $d\mathbf{x}$ 라 하고 각 기준벡터(base vector)를 $\mathbf{E}_A, \mathbf{e}_i$ 라 하면 다음 관계가 성립한다:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \varphi(d\mathbf{X}), \\ d\mathbf{x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X}, \\ \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = x_{i,A} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_A \end{aligned} \quad (2)$$

위에서 변형 그레디언트(deformation gradient) \mathbf{F} 는 x_0 의 벡터를 x_2 로 옮겨주는 두 점(two point) 텐서이다.

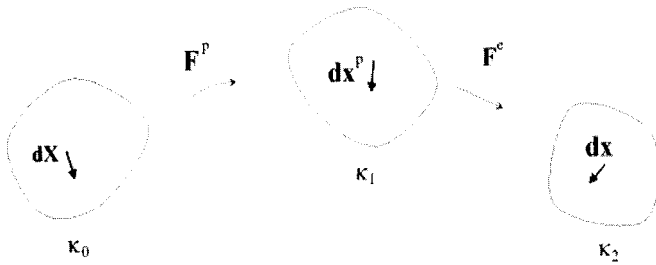


그림 1 각 시각에서의 연속체와 변환된 벡터

Lee & Liu⁽²⁾가 제안한 비선형 탄소성변형은 응력이 없는 순수 소성변형의 중간단계 (x_1)를 가정하고, 그 이후에 순수 탄성변형이 일어나는 것이다. 이를 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (3)$$

소성변형 과정에서의 경화현상을 나타내는 내부 변수 α 를 가정하고, 양의 실수로 표현되는 단위 부피당 무질서도(entropy) η 를 가정한다. 무질서도는 일반적으로 비가역적인 현상을 나타내는 척도이며 언제나 증가하지만 이를 가역적인(reversible) 부분 η^e 와 비가역적인(irreversible) 부분 η^p 로 나누면 그 총량은 두 부분의 합으로 나타낼 수 있으며, η^e 는 증가와 감소가 가능한 부분을 나타낸다. 이 가정을 식으로 나타내면 다음과 같다:

$$\eta = \eta^e + \eta^p \quad (4)$$

위 모델이 편리한 이유는 연속체의 내부에너지를 정의할 때 엔트로피에 의한 위치에너지를 η^e 의 함수로 나타낼 수 있기 때문이다.

2.2 지배방정식

우리가 풀려고 하는 문제는 두개의 지배방정식과 경계, 초기조건들로 이루어져 있다. 현재의 양들을 x_0 좌표계로 표현하는 라그랑지안(Lagrangian) 방법으로 지배방정식을 표현하면,

$$\begin{aligned} \rho_0 \dot{\mathbf{V}} &= \nabla_R \cdot [\mathbf{P}] \\ \dot{\mathbf{E}}_R &= \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \nabla_R \cdot [\mathbf{Q}] \end{aligned} \quad (5)$$

첫 번째 식은 힘의 평형방정식이고, 두 번째 식은 에너지 평형 방정식이다. 밀도 ρ_0 은 초기위치에서의 함수이다. 변형 전 좌표에 대한 라그랑지안 속도벡터인 \mathbf{V} 는 변형벡터 φ 의 물질 시간변화율(material time derivative)로서 $\mathbf{V} = \dot{\varphi}$ 로 나타냈으며, 같은 방법으로 가속도 $\dot{\mathbf{V}}$ 을 나타내었다. 변형 전 부피에 대한 팽창정도를 나타내는 자코비안(Jacobian) J 는 \mathbf{F} 의 행렬식이다($J = \det[\mathbf{F}]$). 제1종 피올라 응력(first Piola-Kirchhoff stress) \mathbf{P} 는 코시 응력(Cauchy stress) $\boldsymbol{\sigma}$ 를 사용하여 $\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$ 로 정의한다. 변형 전 좌표에 대한 divergence와 gradient는 라그랑지안 텐서 \mathbf{A} 에 대하여 $\nabla_R \cdot [\mathbf{A}]$, $\nabla_R[\mathbf{A}]$ 로 각각 나타내며, 그 정의는 다음과 같다:

$$\begin{aligned} \nabla_R \cdot [\mathbf{A}] &= \frac{\partial A_{AB}}{\partial X_B} \mathbf{E}_A \\ \nabla_R[\mathbf{A}] &= \frac{\partial A_{AB}}{\partial X_C} \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}_B \otimes \mathbf{E}_C \end{aligned} \quad (6)$$

끝으로 현재 위치에서의 단위면적당 열 통과율(heat flux) \mathbf{q} 를 이용하여 초기 위치에서의 열 통과율 벡터 $\mathbf{Q} = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{q}$ 를 정의한다.

2.3 구성방정식 (constitutive equation)

모든 연속체의 구성방정식은 열역학 제2법칙을 따른다. Marsden & Hughes⁽⁴⁾로부터 열역학 제2법칙을 다음과 같이 기술한다:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} + \frac{1}{\theta} \nabla_R \cdot [\mathbf{Q}] &\geq 0 \\ -\frac{1}{\theta^2} \mathbf{Q} \cdot \nabla_R[\theta] &\geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

위 식에서 θ 는 절대온도를 나타낸다. 이 연구에서 열은 전도(heat conduction) 현상을 통해서만 이동한다고 가정하며, 이를 나타내기 위하여 Fourier's Law를 적용하였다:

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{J} \nabla \theta \quad k > 0 \quad (8)$$

여기서 ∇ 는 현재의 좌표계를 기준으로 하는 오일러리안 그레디언트를 나타내는 기호이고, k 는 열전도 상수이다. 위 식을 이용하여 \mathbf{Q} 를 구하고, 이것을 다시 식 (7)₂에 적용하면

$$\mathbf{Q} \cdot \nabla_R [\Theta] = -k |\nabla \Theta|^2 \leq 0. \quad (9)$$

따라서 Fourier's law는 열역학 제2법칙의 두 번째 조건을 언제나 만족한다. 또한, 에너지 평형방정식 (5)₂를 식 (7)₁에 대입하여 정리하면, 내부 에너지 소산 D_{int} 에 대한 부등식이 유도된다:

$$D_{int} := \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \Theta \dot{\eta} - \dot{E}_g \geq 0 \quad (10)$$

연속체가 등방성(isotropic) 물질인 경우만을 고려하면, 내부에너지는 다음과 같은 함수로 가정할 수 있다:

$$E_g := \hat{E}_g(\mathbf{b}^e, \eta^e, \alpha) \quad (11)$$

위의 식에서 탄성 left Cauchy-Green stretch tensor $\mathbf{b}^e := \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT}$ 는 탄성 변형 그래디언트 \mathbf{F}^e 로 만든 오일러리안 symmetric tensor로 연속체의 탄성변형으로 인한 내부에너지 증가를 설명하는 부분이고, 두 번째 항은 연속체가 가지는 열에너지를 나타내는 부분, 그리고 세 번째 항은 소성변형에 의한 내부에너지 감소를 나타내는 항이다. 위 식을 식 (10)에 대입하고 연쇄법칙을 사용하면 다음 결과가 나온다:

$$D_{int} = \left[\boldsymbol{\tau} - 2 \mathbf{b}^e \frac{\partial E_g}{\partial \mathbf{b}^e} \right] : \mathbf{d}^e + \left[\Theta - \frac{\partial E_g}{\partial \eta^e} \right] \dot{\eta}^e + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}^p + \beta \dot{\alpha} + \Theta \dot{\eta}^p \geq 0 \quad (12)$$

Kirchhoff stress tensor $\boldsymbol{\tau} := J \boldsymbol{\sigma}$ 는 Cauchy stress $\boldsymbol{\sigma}$ 와 함께 오일러리안 텐서이고, $\beta := -\frac{\partial E_g}{\partial \alpha}$ 는 응력의 단위를 가지는 내부변수이다. 속도 그래디언트(velocity gradient) $\mathbf{l} := \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$ 은 대칭부와 비대칭부인 $\mathbf{d} = \text{sym}[\mathbf{l}] := \frac{1}{2}[\mathbf{l} + \mathbf{l}^T]$ 와 $\mathbf{w} = \text{skew}[\mathbf{l}] := \frac{1}{2}[\mathbf{l} - \mathbf{l}^T]$ 로 나눌 수 있으며, 탄성 부분 \mathbf{l}^e 와 소성 부분 \mathbf{l}^p 로 나눌 수 있다:

$$\mathbf{l}^e := \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e-1}, \quad \mathbf{l}^p := \mathbf{l} - \mathbf{l}^e \quad (13)$$

따라서 속도그래디언트의 탄성 대칭부인 \mathbf{d}^e 와 소성 대칭부인 $\mathbf{d}^p := \mathbf{d} - \mathbf{d}^e$ 를 각각 계산할 수 있다. 위의 부등식 (12)는 \mathbf{d}^e 나 $\dot{\eta}^e$ 의 값에 관계없이 언제나 성립하여야 하며, 그 결과 두개의 구성방정식과 다른 형태의 내부에너지 소산식이 유도된다:

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \mathbf{b}^e \frac{\partial E_g}{\partial \mathbf{b}^e}, \quad \Theta = \frac{\partial E_g}{\partial \eta^e} \quad (14)$$

$$D_{int} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}^p + \beta \dot{\alpha} + \Theta \dot{\eta}^p \quad (15)$$

2.4 항복함수와 소성변형식

일반적으로 하중이 증가하여 응력이 일정한계에 이르르면 소성변형이 발생한다. 이 한계를 규정하는 함수를 항복함수 ϕ 라 하면, 본 모델에서 ϕ 는 언제나 다음의 조건을 만족한다:

$$\gamma \phi = 0, \quad \gamma \dot{\phi} = 0 \quad (16)$$

여기서 γ 는 소성변형의 시간 변화율을 나타내는 실수 변수로, 소성변형이 일어날 경우에만 양수의 값을 가지고, 탄성변형일 경우에는 0이 된다.

본 연구에서는 오일러리안 값들을 사용하여 ϕ 를 다음과 같이 가정한다:

$$\phi = \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}, \beta, \Theta) \quad (17)$$

위 식에서 등방경화(isotropic hardening)를 나타내는 $\beta(\alpha)$ 는 α 와 선형계수 H 를 이용하여 선형함수로 표현하였다:

$$\beta = -H\alpha \quad (18)$$

항복함수로는 등방경화현상과 Von Mises 항복응력 이론을 적용한 함수를 사용하였다.

$$\phi(\boldsymbol{\tau}, \beta, \Theta) = \|\mathbf{s}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_e [1 - w_o \vartheta] - \beta) \quad (19)$$

여기서, $\mathbf{s} = \text{dev}[\boldsymbol{\tau}]$ 는 $\boldsymbol{\tau}$ 에서 압력 부분을 뺀(deviatoric) 텐서이다:

$$\text{dev}[\boldsymbol{\tau}] = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\tau}] \mathbf{I}, \quad \sigma = \frac{1}{J} \boldsymbol{\tau} \quad (20)$$

위 식에서 2차 identity tensor \mathbf{I} , 상대온도 $\vartheta := \Theta - \Theta_o$, 초기온도에서의 탄성한계응력 σ_e , 그리고 열에 의한 항복응력 연화상수 w_o 를 이용하였다. 강재에서의 열에 의한 항복응력 약화는 많은 실험을 통하여 그 거동이 밝혀졌으며, 일반적으로 선형 모델이 많이 쓰인다.

우리가 적용하는 추가적 가정은 최대 에너지 소산의 원리(principle of maximum dissipation)이다. 즉, 식 (16)를 만족하면서 최대의 내부에너지 소산을 일으키는 소성변위가 생긴다는 원리이다. 이를 위해 소성 범함수 Λ^p 를 다음과 같이 정의하고,

$$\Lambda^p := \gamma \phi - D_{int} \quad (21)$$

이 범함수가 최소가 되는 조건

$$\frac{\partial \Lambda^p}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \Lambda^p}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \Lambda^p}{\partial \Theta} = 0 \quad (22)$$

을 적용하면, 각각의 소성 변형식을 얻는다:

$$\mathbf{d}^p = \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \quad \dot{\alpha} = \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \beta}, \quad \dot{\eta}^p = \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \Theta} \quad (23)$$

위 식들로부터 소성 변형 모델이 associative flow 임을 알 수 있다.

2.5 객관적 변화율(Objective rate)

기하 비선형 문제에서 일반적인 시간 변화율은 객관적이지

못하다. 따라서 객관적인 결과를 얻기 위해서는 응력과 변형률에 객관적인 변화율을 적용해야 한다. 객관적 변화율 중 하나인 리 도함수(Lie Derivative)는 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$L_v(\cdot) := \mathbf{F} \frac{d}{dt} [\mathbf{F}^{-1}(\cdot) \mathbf{F}^{-T}] \mathbf{F}^T \quad (24)$$

여기에 left Cauchy-Green 탄성변형률 텐서 \mathbf{b}^e 를 적용한다.

$$L_v(\mathbf{b}^e) = \dot{\mathbf{b}}^e - \mathbf{l} \mathbf{b}^e - \mathbf{b}^e \mathbf{l}^T \quad (25)$$

한편, 다음 관계식은 언제나 성립한다.

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \mathbf{l}^e \mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \mathbf{l}^{e,T} \quad (26)$$

식 (2.26)을 (2.25)에 대입하면 중간관계식이 유도된다.

$$L_v(\mathbf{b}^e) = -2\text{sym}[\mathbf{b}^e \mathbf{l}^p] \quad (27)$$

일반적인 소성변형 문제에서 소성 속도 그레디언트 \mathbf{l}^p 의 비대칭 부분은 순간적인 강제 회전변형에 해당하며 등방성 물질의 경우 이런 변형은 생기지 않는다고 가정할 수 있다. 즉,

$$\mathbf{w}^p := \text{skew}[\mathbf{l}^p] = \mathbf{0}. \quad (28)$$

따라서 식 (27)에서의 \mathbf{l}^p 는 \mathbf{d}^p 로 대체할 수 있으며, 식 (23)을 식 (27)에 대입하여 최종 결과를 유도한다:

$$L_v(\mathbf{b}^e) = -2\gamma \left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \mathbf{b}^e. \quad (29)$$

식 (14)로부터 $\boldsymbol{\tau}$ 와 \mathbf{b}^e 의 고유벡터(eigen vector)가 같음을 알 수 있으며, 그 결과를 유도과정에 이용하였다. 또한 탄성변형일 때에는 소성변형률이 없기 때문에($\gamma=0$) 위 식으로부터 $L_v(\mathbf{b}^e) = \mathbf{0}$ 임을 알 수 있다.

2.6 자유에너지 함수(free energy function)와 그 적용

열에 대한 독립변수를 η^e 에서 Θ 로 바꾸기 위하여 내부에너지 함수 E_g 로부터 Legendre 변환을 통하여 자유에너지 함수 Ψ 를 유도한다:

$$\widehat{\Psi}(\mathbf{b}^e, \Theta, \alpha) = \text{Max}(\eta^e)[E_g(\mathbf{b}^e, \eta^e, \alpha) - \eta^e \Theta] \quad (30)$$

즉, 자유에너지 함수는 위 식의 오른쪽 항 $E_g - \eta^e \Theta$ 를 η^e 에 대하여 최대로 만든 것이며, 이는 식 (14)의 결과로 언제나 만족함을 알 수 있다. 이제 사용 재료의 물성을 규정하는 자유에너지 함수를 다음과 같은 형태로 정의 한다⁽⁵⁾:

$$\widehat{\Psi}(\mathbf{b}^e, \Theta, \alpha) = \overline{W}(\overline{\mathbf{b}}^e) + U(J) + M(J, \Theta) + T(\Theta) + K(\Theta, \alpha) \quad (31)$$

위에서 \overline{W} 는 부피팽창 부분을 제외한 탄성변형에 의한

에너지, U 는 순수하게 부피변화에 의한 에너지, M 은 열로 인한 부피팽창 현상을 설명하는 에너지, T 는 순수한 열에너지, 그리고 K 는 열에 의한 소성변형의 특성변화를 설명하는 에너지이다. 먼저, $\overline{\mathbf{b}}^e := J^{-2/3} \mathbf{b}^e$ 는 탄성변형에서 부피팽창부분을 제거한 것으로 $\det[\overline{\mathbf{b}}^e] = 1$ 이 언제나 성립한다. Left Cauchy-Green stretch tensor \mathbf{b}^e 의 고유값(eigen value)을 $\lambda_A^{e,2}$ 으로 놓으면 이에 따른 $\overline{\mathbf{b}}^e$ 의 주방향 변형률(principal stretch)은

$$\overline{\lambda}_A^e = J^{-1/3} \lambda_A^e \quad (32)$$

로 나타난다. 이때, $\overline{\varepsilon}_A^e := \log[\overline{\lambda}_A^e]$ 와 J 를 독립변수로 사용하여 다음과 같은 에너지 함수를 가정한다:

$$\begin{aligned} \overline{W}(\overline{\mathbf{b}}^e) &= \widehat{W}(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^e) := \mu \sum_{A=1}^3 (\overline{\varepsilon}_A^e)^2, \\ U(J) &= 0.5x \log^2 J \end{aligned} \quad (33)$$

위에서 μ 는 전단상수 x 는 체적탄성률이며, 두 함수가 순수 기계적 변형과 관계된 내부 에너지를 모두 정의한다. 다른 함수들은 다음과 같이 가정하였다:

$$\begin{aligned} M(J, \Theta) &= -3x \alpha_g \vartheta \log J \\ T(\Theta) &= c_V \vartheta - \Theta \log(\Theta/\Theta_0) \\ K(\Theta, \alpha) &= 0.5H_d [1 - w_h \vartheta] \alpha^2 \end{aligned} \quad (34)$$

첫 번째 식의 α_g 은 열팽창 계수이고, 두 번째 식의 c_V 는 열용량 상수, 세 번째 식의 H_d 는 초기 소성경화상수이고 w_h 는 소성경화상수의 열에 의한 연화현상을 나타내는 상수이다. 위 식들로부터 $\boldsymbol{\tau} := J \boldsymbol{\sigma}$ 를 얻는다:

$$\boldsymbol{\tau} = J p \mathbf{I} + \mathbf{s} \text{ with } \mathbf{s} := \text{dev}[\boldsymbol{\tau}] \quad (35)$$

$$p = \frac{\partial U}{\partial J} + \frac{\partial M}{\partial J}, \quad \mathbf{s} := \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = 2\mu \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad (36)$$

에너지 평형 방정식 (5)₂에 내부 에너지 소산 (15)와 엔트로피 관계식 (4)를 적용하면 엔트로피를 이용한 에너지 평형 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Theta \dot{\eta}^e = -\nabla_{R \cdot} [\mathbf{Q}] + D_{\text{mech}} + \rho_o R \quad (37)$$

위에서 가역성 엔트로피는 $\eta^e = -\frac{\partial \Psi}{\partial \Theta}$ 를 이용하여 식 (31)로부터 구하며, 기계적 에너지 소산은 내부 에너지 소산의 일부로 다음과 같이 정의한다:

$$D_{\text{mech}} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}^p + \beta \dot{\alpha} \quad (38)$$

실제 유한요소 정식화에는 에너지 평형식으로 식 (37)을 이용하였다.

3. 지수 사상을 이용한 시간적분

지수 사상(exponential mapping)을 이용한 탄소성 문제에서의 시간적분은 1992년 Simo⁽³⁾의 논문에서 처음 제시되었으며 순수한 기계적(mechanical) 문제에 적용되었다. 본 연구에서는 같은 메커니즘을 일반적인 열-탄소성 문제에 확장-적용하여 열과 변형이 완전히 연계된(fully-coupled) 비선형 문제를 해석하였다.

시각이 $t = \Delta t(n+1)$ 이고 현재 시각에서의 반복계산 횟수가 $k+1$ 일 때, 우리는 변형 $\varphi_{n+1}^{(k)}$ 과 절대온도 $\Theta_{n+1}^{(k)}$ 를 알고 있으며, 또한 그 전 시각의 변수인 \mathbf{F}_n^e 과 α_n 을 알고 있다. 여기서 상대적 변형 그레디언트 \mathbf{f}_{n+1} 을 다음과 같이 정의한다:

$$\mathbf{f}_{n+1} := \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1} \quad (39)$$

각 시간단계에서의 변형은 탄성적이거나 소성적이며, 그 판단은 항복함수 ϕ 에 의해서 이루어진다. 이때의 시간적분은 지수 사상을 이용하였으며 그 과정은 다음과 같다:

(1) 탄성변형 가정

먼저 $\mathbf{G}^b := \mathbf{F}^{-1} \mathbf{b}^e \mathbf{F}^{-T}$ 는 \mathbf{b}^e 를 \mathbf{F}^{-1} 를 이용하여 초기위치로 옮긴 텐서로 정의한다. 그러면 \mathbf{b}^e 의 리 도함수는

$$L_v(\mathbf{b}^e) := \mathbf{F} \dot{\mathbf{G}}^b \mathbf{F}^T = \dot{\mathbf{b}}^e - \mathbf{1} \mathbf{b}^e - \mathbf{b}^e \mathbf{1}^T \quad (40)$$

로 나타낼 수 있다. 탄성변형이 일어날 때는 식 (2.29)로부터 $L_v(\mathbf{b}^e) = \mathbf{0}$ 임을 보였으며 이 조건은 식 (2.40)에서 $\dot{\mathbf{G}}^b = \mathbf{0}$ 의 상태를 의미한다. 따라서 $n+1$ 단계에서의 \mathbf{b}_{n+1}^e 은 다음과 같다:

$$\mathbf{b}_{n+1}^{e, \text{trial}} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{G}_n^b \mathbf{F}_{n+1}^T = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{b}_n^e \mathbf{f}_{n+1}^T \quad (41)$$

이 해는 \mathbf{b}_n^e 을 초기조건으로 하여 $L_v(\mathbf{b}^e) = \mathbf{0}$ 를 풀어낸 것으로, 식 (40)으로부터 다음 식:

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \mathbf{1} \mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \mathbf{1}^T \quad (42)$$

의 정해임을 알 수 있다.

(2) Consistency Check

이렇게 구한 $\mathbf{b}_{n+1}^{e, \text{trial}}$ 을 이용하여 식 (35)와 (36)으로부터 Kirchhoff stress $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{trial}}$ 를 구한 후 이 값으로 항복함수 ϕ 를 계산한다:

$$\phi^{\text{trial}} = \phi(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{trial}}, \beta_n, \Theta_{n+1}) \quad (43)$$

이때 $\phi^{\text{trial}} \leq 0$ 이면 가정이 맞으므로 그대로 사용하고, 그렇지 않으면 소성보정을 한다.

(3) 소성보정

이 경우는 $L_v(\mathbf{b}^e) \neq \mathbf{0}$ 이므로 식 (40)을 다시 쓰면

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \mathbf{1} \mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \mathbf{1}^T + L_v(\mathbf{b}^e) \quad (44)$$

이 된다. 이때 $\mathbf{b}_{n+1}^{e, \text{trial}}$ 을 초기조건으로 하고

$$\dot{\mathbf{b}}^e = L_v(\mathbf{b}^e) \quad (45)$$

를 풀면 식 (44)의 근사해가 된다. 위 식과 텐서 $\boldsymbol{\nu} := \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}$ 를 식(29)와 연계하여 다음 식을 유도한다:

$$\dot{\mathbf{b}}^e = -2\gamma \boldsymbol{\nu} \mathbf{b}^e \quad (46)$$

위의 문제는 일차 상미분 방정식이며, 양쪽에 \mathbf{b}^e 를 가지는 것을 알 수 있다. 이 시간스텝 안에서 $\boldsymbol{\nu}$ 는 더 이상 변하지 않으므로, 지수 사상을 이용하여 다음의 해석 해를 계산한다:

$$\mathbf{b}_{n+1}^e = \exp[-2\Delta t \gamma_{n+1} \boldsymbol{\nu}_{n+1}] \mathbf{b}_{n+1}^{e, \text{trial}} \quad (47)$$

위 식이 근사해가 되는 이유는 식 (44)를 둘로 나누어 식 (42)를 먼저 풀고, 그 해를 이용하여 식 (46)을 푸는 방식을 사용하기 때문이다.

(4) 응력과 에너지 소산

이제 식 (14)를 이용하여 응력을 계산하고, 식 (38)로부터 기계적 에너지의 소산을 계산한 후 평형방정식 (5)의 수렴여부를 판단한다.

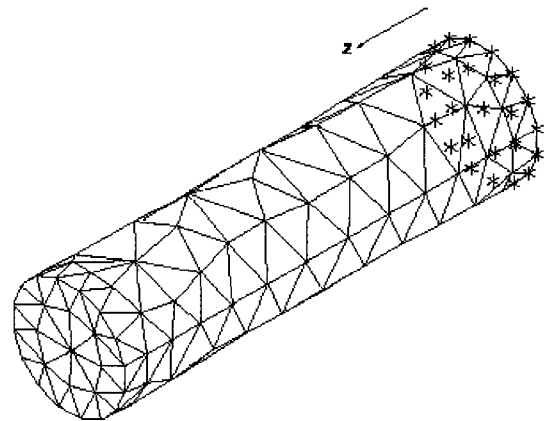


그림 2 z 축의 한쪽 끝단이 고정된 외팔보

4. 예제

UC, Berkeley에서 개발된 범용 유한요소 해석 프로그램인 FEAP 에 본 모델을 적용하여 두 가지 해석을 수행하였다.⁽⁶⁾ 먼저 이 해석에 이용한 구조물은 길이 9.016cm, 지름 2.48cm의 원형단면을 가지고 한쪽 단이 고정된 외팔보이다. 여기서

는 길이방향을 z 축으로 놓는다. 네 개의 절점을 가지는 3차원 사면체 요소를 사용하였다.

4.1 열전도 시험

하중이나 변위를 가하지 않고 순수하게 열전도문제를 해석하였다. 외부와의 대류에 의한 열 교환이 없다고 가정한다. 전체 기둥의 초기온도를 섭씨 0도로 놓고, 다른 끝단에 섭씨 100도의 온도하중을 적용하여 시간에 따른 열전도 현상을 관찰하였다. 그림 3과 그림 4는 각각 시간이 0.1초와 1.0초에서의 온도분포이며 끝단의 열이 다른 쪽으로 전도되는 현상을 잘 관찰할 수 있다. 물성은 열전도계수 $k=7000\text{N/sK}$, 열용량 계수 $c_V=450\text{m}^2/\text{s}^2\text{K}$, 밀도 $\rho=7800\text{kg}/\text{m}^3$ 을 사용하였다.

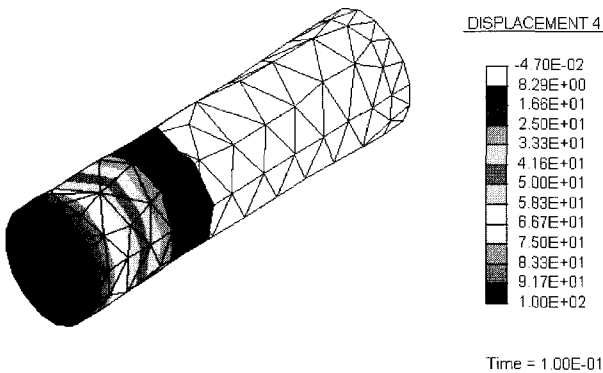


그림 3 t=0.1 sec 에서의 온도분포

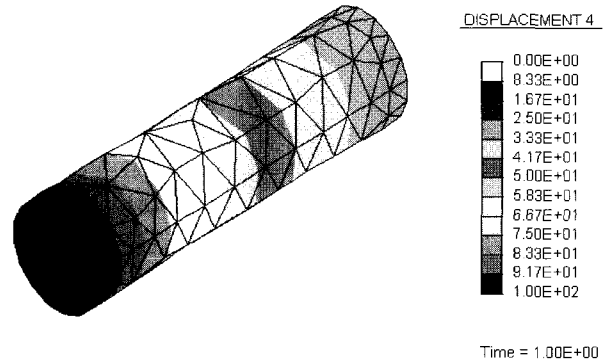


그림 4 t=1.0 sec 에서의 온도분포

이 결과의 검증을 위하여, 일차원 선형문제인

$$\rho c_V \dot{\Theta} = k \frac{d^2\Theta}{dx^2} \quad (2.48)$$

를 유한차분법으로 해석하여 비교하였다. 이때 시간적분 부분은 Forward Cauchy-Euler, 공간미분은 Central Difference 방법을 사용하였다. 그림 5는 온도하중이 걸리지 않은 끝단에서 온도의 시간이력도표이다. 시간이 1초가 되었을 때 약 3%의 상대오차가 있으나 유사한 결과임을 알 수 있다. 1차원과 3차원 해석의 차이, 선형과 비선형 해석의 차이, 각 수치해석 수행시의 오차, 모델의 차이 등의 원인을 생각할 수 있다.

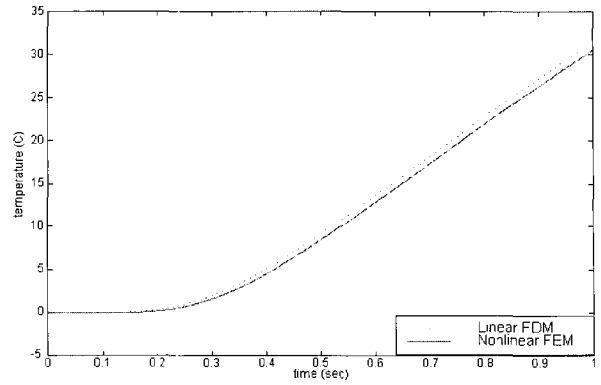


그림 5 끝단(z=0)의 온도 시간이력

4.2 장력시험

이번에는 고정단의 반대 끝단에서 순수한 변위조절에 의한 하중을 가하는 해석을 수행하였다. 이때의 물성은 구조용 강재의 것을 이용하였다. 그림 6은 시간에 비례하는 변위를 주었을 때의 변형모양과 소성변형의 정도를 나타낸 것으로, $t=4.02$ 초에서의 끝단 변형이 4.02cm가 되도록 하였다. 이 변형길이는 초기길이의 40%가 넘는 대 변형으로, 외팔보의 일부분에서 직경이 줄어드는 병목(necking) 현상이 일어나고 있음을 알 수 있으며, 또한 그 부분에서 소성변형이 가장 많이 생겼음을 보여준다. 여기서는 세 가지 다른 물성을 이용하여 시험하였다. 첫 번째는 기계적 소성경화와 열에 의한 강성연화현상을 모두 고려한 경우이고, 두 번째는 소성경화와 열연화가 없는 순수 기계적인 모형을 이용한 경우, 세 번째는 소성경화만 있는 순수 기계적 모형을 이용한 경우이다. 그림 7은 초기의 변위와 끝단반력을 도표로 나타낸 것이다. 선형의 탄성변형부분과 초기 소성변형부분에서는 세 가지 모두 큰 차이를 보이지 않는데, 그 이유는 탄성영역에서의 부피팽창에 따르는 온도변화가 미미하기 때문이며, 소성경화상수 $H_0=0.12924\text{GPa}$ 가 탄성계수 $E=208.9\text{GPa}$ 의 0.1% 이하이기 때문이다.

그러나 소성변형이 커지는 그림 8의 전체도표를 보면 병목현상에 의해서 관력의 크기가 줄어드는데, 그 속도가 각각 다를 수 있다. 특히 첫 번째와 두 번째 시험에서 거의 같은 결과가 나오는데, 이는 첫 번째 시험에서 기계적 소성경화의 크기와 소성 에너지소산으로 발생한 열에 의한 강성연화의 크기가 거의 같아서 서로 상쇄되어 나타난 결과이다.

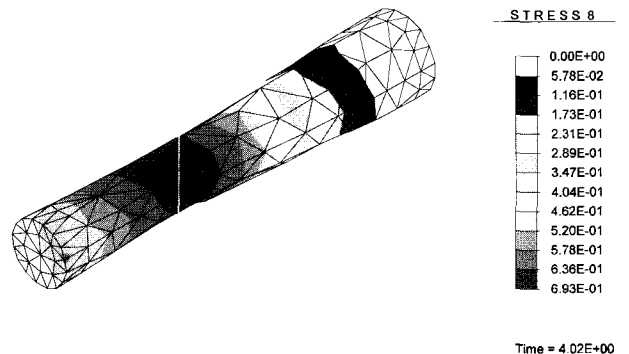


그림 6 t=4.02에서의 변형된 모습

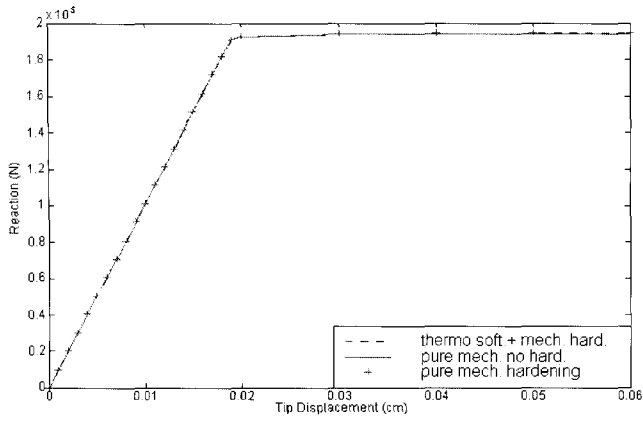


그림 7 초기 끝단변위-반력 도표

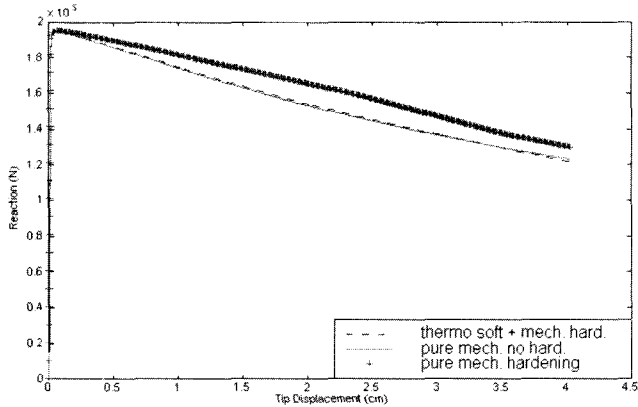


그림 8 전체 끝단변위-반력 도표

5. 결 론

본 연구에서는 지진이나 화재 등으로 인하여 비선형 탄소성변형과 열에 의한 강성연화현상을 겪는 강구조물의 물성모형을 정하고 에너지 평형 방정식과 힘의 평형방정식을 동시에 해석하는 유한요소기법을 사용하였으며, 그 결과로 열-

변형 상호작용을 관찰할 수 있었다. 유한요소 정식화 과정 및 다른 모델들과의 엄밀한 해석결과 비교는 추후 발표할 예정이다.

구조물이 실제로 보여주는 거동은 대부분 기하와 물성 비선형이며, 특히 파괴와 관련된 대 변형 문제에서는 엄밀한 비선형 해석의 중요성이 높아지고 있다. 이에 열과 연계된 비선형 구조해석의 적용범위와 유용성은 계속 커질 것으로 생각한다.

참 고 문 헌

1. Taylor, G. I. and Quinney, H., "The Latent Energy Remaining in a Metal after Cold Working," *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, Vol. 143, 1934, pp. 307-326.
2. Lee, E. H. and Liu, D.T., "Finite-Strain Elastic-Plastic Theory with Application to Plane-Wave Analysis," *Journal of Applied Physics*, Vol. 28, 1967, pp. 19-27.
3. Simo, J. C., "Algorithms for Static and Dynamic Multiplicative Plasticity that Preserve the Classical Return Mapping Schemes of the Infinitesimal Theory," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 99, 1992, pp. 61-112.
4. Marsden J. E. and Hughes, T. J. R., *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover Publications, New York, 1983, p. 556.
5. Park, J., "An Analysis of Strong Discontinuities in Thermo-Elasto-Plastic Solids," Ph.D. Thesis, UC Berkeley, 2002.
6. Taylor, R. L., *FEAP - A Finite Element Analysis Program : version 7.4 theory manual*, UC Berkeley, Berkeley, 2002.