大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 14 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIV, No.2, 143-156. May 2004

Lakatos 방법론을 초등수학에 적용하기 위한 연구

강 문 봉*

Lakatos의 수리철학은 수학적 지식의 준경험성을 주장한 것으로서, 수학의 성장, 발전의 맥락을 제공해 주는, 교육적으로 매우 의미 있는 철학이다. 그러나 Lakatos의 수학적 발견의 논리는 증명과 반례에 기초하고 있어서, 증명을 다루지 않는 초등학교에서는 Lakatos의 방법론을 적용하기가 쉽지 않다. 이 연구는 Lakatos의 방법론을 초등학교 수준에서 적용할 수 있는 방안과 그 적용 사례를 개발하고자 하는 것이다.

이 연구에서는 초등학교 수준에서 Lakatos의 방법론을 교수 방법과 교육과정 구성 방법의 두 가지로 적용 방안을 구상하고, 교수 방법의 적용 사례를 개발하였다.

Ⅰ. 연구 목적

19세기 말에 집합론에서 여러 가지 모순이 발견되고, 아직 발견되지는 않았지만 또 다른 모순이 나타날지도 모른다는 문제 의식 하에 수학의 기초를 확립하려는 움직임이 나타났는데, 그 대표적인 것이 논리주의, 직관주의, 형식주의이다.

Lakatos는 많은 논리주의자와 형식주의자의 발언을 통해, 수학의 기초를 확립하려는 이러한 기존의 논리주의와 형식주의의 시도가 실패로 좌절되었음을 보여주고 있다.[1] 그리하여 그는 수학적 지식은 추측이고, 반박에 의해 지식이 성장한다는 준경험주의적 수학관을 주장하면서 정당화의 논리와 발견의 논리가 변증법적으로 통합된 보조정리 합체법을 새로운 수학적 발견의 논리로 제안하고 있다.

Lakatos의 수리철학은 최근 광범위하게 인정되고 있으며, 이에 대한 연구가 활발하게 이루어지고 있다(Greig, 1987; Sekiguchi, 1991; 강문봉, 1993 등). 그러나 Lakatos의 수리철학의 한 축에는 증명 및 증명 분석이, 다른 한 축에는 지식의 발달이라는 수학의 역사가 자리하고 있다. 그러므로 Lakatos의 수리철학은 중등 학교 이상의 수준에서 증명과 관련하여 논의되고 있으며(Sekiguchi, 1991; 나귀수, 1998; 서동엽, 1999), 초등학교 수준에서는 논의되지 않는 것으로 생각된다. 그러나 Lakatos의 수리철학은 학생들에게 수학의 성장과 발달이라는 새로운 면을 인식하게 할 수 있으며, 수학적 발견의 원천을 인식하게 할 수 있다. 또한, 인간은 수학을 창조하고 이를 세련시켜 나간다는 사실을 일깨워 줄 수 있는, 교육적으로 매우 의미 있는 수리

* 경인교육대학교, mbkang@ginue.ac.kr

1) Lakatos는 직관주의가 고전 수학의 재조직화를 목적하였다기 보다 직관주의적 논리에 맞지 않는 고전 수학을 제거하는 것을 목적으로 하였다고 보고 있기 때문에 여기서 직관주의를 거론하지 않고 있다.

철학임에 분명하다. 그런 점에서 초등수학에서도 Lakatos의 방법론의 적용을 시도할 필요가 있어 보인다.

그러므로 이 연구는 Lakatos의 방법론을 초등수학에 적용할 수 있는 방안을 탐색하고, 적절한 사례를 발굴하고자 하는 데 그 목적이 있다. 교과서로 구체화된 학교 수학은 오류의 여지가 없어 보이며, 특히 초등학교 수학에서는 증명이 다루어지지 않는다. 그렇다면, 증명과 반례가 중요한 역할을 하는 Lakatos의 철학과 방법론은 초등학교에서는 발을 붙일 수 없는 것일까? 이 연구의 출발점은 바로 여기에 있다.

II. Lakatos의 수리철학

1. 준경험적 이론과 그 방법론

Lakatos는 연역 체계를 유클리드(Euclid)적인 이론과 준경험적(quasi-empirical)인 이론으로 분류하고 그것을 다음과 같이 대비시키고 있다 (Lakatos 1978, 28-29).

> 유클리드적인 이론은 참이며 준경험적인 이론은--기껏해야--잘 확증된 그러나 항상 추측적인 것이다. 그리고 유클리드적인 이론에서는 연역 체계의 꼭대기에 있는 참인 基礎命題(흔히 公理라고 부르는)가 말하자면 체계의 나머지를 증명하는 반면, 준경험적인 이론에서는 (참인) 기초 명제가 체계의 나머지에 의해 설명된다.
> 연역 체계가 유클리드적인지 준경험적인지는 체계 내에서 참값의 흐름의 패턴에 의해 결정된다. 만약 특징적인 흐름이 공리의 집합에서 체계의 나머지로 '아래로' 진리를 전달하는 것이라면 그 체계는 유클리드적이며 여기서의 논리는 증명 원칙이다. 특징적인 흐름이 거짓인 기초 명제에서 '가설'로, '위로' 허위를 재전달하는 것이라면 그것은 준경험적이며 여기서의 논리는 비판의 원칙이다.[2)]

즉, 유클리드적 이론은 참인 공리에 의해 좌우되는 참인 지식 체계이며, 준경험적 이론은 잠정적으로 참인 가설로부터 연역되는 지식 체계인 것이다. 그러므로 준경험적 이론은 참임을 보장받지 못하는 잠정적인 추측이며, 거짓인 기초 명제가 나타나지 않는 한 참인 것으로 인정되게 된다. 거짓인 기초 명제가 나타나면 이때의 가설은 거짓이 되고 따라서 이론 체계는 수정을 피할 수 없다. 이와 같이 수정되며 이론이 발전하면서 준경험적 이론은 점차 유클리드적 이론을 지향하게 된다. 그러나 Lakatos는 수학의 자명한 기초를 확립함으로써 무한소급(infinite regress)을 중단하려고 시도하였던 논리주의와 형식주의가 실패하였음을 거론하면서, "수학을 전체로서 유클리드적으로 재조직화하는 것은 불가능하며, 적어도 가장 풍부한 수학 이론은 과학 이론처럼 준경험적"(Lakatos 1978, 30)이라는 결론을 도출하였다.

그런데, 준경험적인 이론에서의 방법론은 유클리드적 이론에서의 방법론과 다르다. Lakatos는 준경험적인 이론에서의 방법론에 대하여 다음과 같이 말하고 있다(Lakatos 1978, 28-29).

> 과학의 방법론은 그것이 유클리드적 이상과 준경험적 이상의 어느 것을 목표로 하는가에 따라 크게 좌우된다. 유클리드적 이상을 목적으로 하는 과학에서의 기본 규칙은 자명한 공리를 찾는 것이다. 유클리드적 방법론은 엄밀하고 확실하다. 준경험적 방법론의 기본 규칙은 설명력과 발견력이 높은 대담하고 상상력이 풍부한 가설을 찾는 것이다. 실제로 그 방법은 엄격한 비판에 의해 제거되는 대안적 가설들의 확산을

2) Lakatos가 말하는 '기초 명제'는 연역 체계에서 어떤 진리값이 처음에 도입되는 명제를 말한다.

지지한다. 준경험적 방법론은 무제한적으로 사색적이다. 유클리드적 이론의 발달은 세 단계로 이루어진다. 첫째는 해당 주제의 先史學을 구성하는 시행착오의 소박한 前科學的 단계이며, 이어서 내용을 재조직하고 모호한 변경을 정돈하고 안전한 핵심의 연역적 구조를 확립하는 기초론적인 시기가 뒤따른다. 마지막으로 체계 내의 문제 해결로서 주로 흥미 있는 추측을 증명하거나 반증한다. ...
준경험적 이론의 발달은 아주 다르다. 그것은 문제에서 시작하여 과감한 해, 그리고는 엄격한 검사, 반박이 뒤따른다. 진행 수단은 대담한 사색, 비판, 여러 가지 경쟁 이론과 문제 교체 사이의 논쟁이다. 모호한 변경에 항상 주의가 집중된다. 슬로건은 기초와 불변인 진리의 축적이 아니라 성장과 끝없는 변혁이다.

Popper는 과학의 방법론으로 귀납을 부정하고 추측과 반박의 방법을 제안하였다. 그런데, 수학과 과학의 결정적 차이점은 증명의 존재 유무라 할 수 있다.

Popper의 영향을 받은 Lakatos는 그의 유명한 학위 논문인 Proofs and Refutations에서 준경험적 수학 이론에서의 방법론으로 '증명과 반박'의 방법을 제안하고 있다.[3] 증명과 반박의 방법은 문제에 대한 해, 곧 추측을 검사하고 반박에 대처하는 방법을 잘 기술해 주고 있으며, 검사 과정에서 발견력이 높은 가설로 발전해 가는 과정을 잘 설명해 주고 있다.

추측에 대한 반례가 나타났을 때 여기에 대처하는 방법에는 여러 가지가 있다. 우리는 어떤 추측을 하게 되고 추측에 대한 반례가 나타나지 않으면 그것을 참으로 생각하고 추측이 옳음을 증명하려고 한다. Lakatos에 의하면 증명은 추측이 옳음을 보이는 과정이 아니라, 그 추측을 부분 추측(즉, 보조정리)으로 분해하는 思考實驗으로 보고 있다.[4] Lakatos는 보조 정리를 반박하는 반례를 局所的 反例, 본래의 추측 자체를 반박하는 반례를 全面的 反例라고 부르고 있다(Lakatos 1976, 10-11). 국소적 반례가 나타나면 이 반례가 반박하는 보조 정리를 반례가 반박하지 못하는 다소 수정된 보조 정리로 바꿈으로써 증명을 개선할 수 있다.

Lakatos는 추측을 반박하는 전면적 반례가 대두되었을 때 이에 대처하는 방법을 몇 가지 제시하고 있다. 첫째는, 반박된 추측을 틀린 것으로 보고 이를 棄却하는 방법이다. 반례를 찾아서 명제를 반증하는 방법이 여기에 해당된다. 이것은 완성된 이론 체계에서는 타당한 방법일 수 있으나, 성장하는 이론에서는 추측을 얻기까지의 오랜 노고를 모두 포기하는 것으로서 바람직하다고 볼 수 없다. 둘째는, 추측은 이미 증명되었기 때문에 증명된 추측은 옳으며 오히려 반례, 곧 비판이 잘못되었다고 보고, 반례를 괴물이라고 하여 이를 배제함으로써 원래의 추측을 존속시키는 怪物 排除法이다. 괴물 배제자들은 반례에 의한 반박은 문제가 되는 용어의 의미에 좌우된다고 보고 용어를 명확히 정의함으로써 반례를 배제한다. 세번째는, 원래의 추측은 예외를 제외한 영역에서는 참이 되므로 예외에 대하여 언급한 조건 절을 첨가하여 그것을 참인 명제로 바꾸는 例外 排除法이다. '...을 제외한'이나 골드바하의 추측같이 '... 이상의'와 같은 조건이 붙은 정리는 예외 배제법에 의한 것이다. 네번째는, 반례라고 본 관점은 왜곡된 관점에 의한 것이며 기괴한 해석이

3) '증명과 반박'의 방법은 증명 분석을 통해 감추어진 보조정리를 찾아 그것을 정리에 합체시켜 추측을 개선한다는 점에서 보조정리 합체법이라고도 한다.
4) Lakatos는 증명을 "본래의 추측을 부분 추측, 곧 보조 정리로 분해하여 그것을 가능한 한 매우 멀리 떨어진 지식체 가운데 끼워 넣는"(Lakatos 1976, 9) 思考實驗으로 보고 있다.

라 보고, 관점을 시정하여 반례가 실제로 반례가 아닌 예라고 설명하여 반례를 예로 전환시키는 怪物 調整法이다.

괴물 배제법, 예외 배제법, 괴물 조정법 등은 모두 나름대로의 장점을 갖고 있다. 즉, 용어를 명확히 하는 괴물 배제법에서의 용어의 명확화는 그 자체가 수학의 발달로서, 바람직한 측면이 있으며, 예외 배제법은 추측을 얻기까지의 노고의 일부를 구제하는 것이므로 역시 긍정적인 측면이 있다. 그러나, Lakatos는 괴물 배제법이나 예외 배제법은 반례를 중시하지 않는다는 점에서 적절한 방법으로 보지 않고 있다. 곧, 추측에 포함된 용어의 명확화, 재정의를 통해 반례를 괴물로 배제하고 추측을 구하는 괴물 배제법의 구사는 명확한 정의를 창조하여 추측을 명확화하는 자극이 되므로 유용한 잠재력을 갖기는 하지만, 괴물 배제는 개념을 형성하는 것이 아니라 단지 정의를 번역할 뿐이며, 괴물 배제 정리는 소박한 추측을 개선한 것이 아니므로, 괴물 배제 방법은 발견적으로 유용하지는 않은 방법이라는 것이다. 예외 배제법은 모든 예외를 다 열거할 수 있다는 보장이 없으며, 특히 증명을 고려하지 않는 문제점이 있다. 엄밀하게 증명된 정리에 대한 일련의 반례들에 의해 제기된 문제를 예외 배제법으로 해결할 때 증명은 정리를 증명하게 되나, 정리가 타당한 영역이 무엇인가 하는 의문은 여전히 남게 된다. 이러한 예외 배제법도 결국 발견적으로 불모인 접근법이다.

그리하여, Lakatos는 전면적인 반례가 원래의 추측의 반박이지만 증명의 반박이 아닌 것은 오히려 그 증명에 문제가 있기 때문이라고 보고, 증명을 주의 깊게 분석함으로써 전면적 반례가 또한 국소적 반례가 됨을 보일 수 있다고 주장하고 그러한 역사적 사례를 제시하고 있다. 이 때, 감추어진 보조 정리를 찾아 증명에 합체하여 증명을 개선하고 그에 대응하는 조건을 추측에 합체시킴으로써 반박된 추측을 개선할 수 있는데, 이러한 방법을 보조 정리 합체법이라고 한다. Lakatos는 보조 정리 합체법이 결론에 대한 반례는 적어도 그 한 전제의 반례가 된다는, 결론으로부터 가정으로의 '허위성의 재전달 원리'에 근거한다고 하면서 보조 정리 합체법의 의미에 대하여 다음과 같이 말하고 있다(Lakatos 1976, 37).

> 본인은 이제 비록 증명하지는 못하더라도 증명이 확실히 우리의 추측을 개선하는 데 도움을 준다는 것을 여러분들 모두가 이해하기를 바랍니다. 예외 배제법 역시 추측을 개선하였으나, 그 개선은 증명과는 무관한 것이었습니다. 우리의 방법은 증명에 의해 개선하는 것입니다. 발견의 논리와 정당화의 논리 사이의 본질적인 통합이 보조 정리 합체법의 가장 중요한 측면입니다.

원래의 추측에 새로운 조건이 첨가된다는 점은 예외 배제법이나 보조 정리 합체법이나 모두 마찬가지인데도 Lakatos가 보조 정리 합체법을 선호하는 이유는 그것이 증명에 의해 추측을 개선하기 때문이며, 첨가된 조건이 증명을 통하여 생성된 개념이기 때문이다.

다시 말해서, 증명은 정당화의 수단이기는 하지만, 준경험적 이론에서는 절대적인 정당화의 수단이 아니라 반례가 나타났을 때 증명을 분석함으로써 증명이 새로운 발견의 원천이 될 수 있다는 점을 말하고 있다.

2. 수학사와의 관련성

준경험주의 이론은 완성된 이론이 아니라 성장하는 과정에 있는 이론이므로 그 이론의 역사와 관련될 수밖에 없다. Lakatos(1976, 4)도

"수학의 역사와 수학적 발견의 논리, 곧 수학적 사고의 계통 발생과 개체 발생은 형식주의의 비판과 궁극적인 거부 없이는 개발될 수 없다"고 주장하고 있는 바, 보조정리 합체법이 수학의 역사와 밀접한 관련이 있음을 시사하고 있다.

Lakatos는 유클리드적 이론에서 공리적이고 연역적으로 제시하는, 이른바 연역주의자의 양식을 다음과 같이 규정한다(Lakatos 1976, 142).

> 유클리드적인 방법론은 어떤 의무적인 제시 양식을 발전시켰다. 나는 이것을 연역주의자의 양식이라고 부를 것이다. 이 양식은 고심하여 진술된 공리, 보조 정리, 정의의 목록에서 시작한다. 공리와 정의들은 종종 인공적이며 어리둥절할 정도로 복잡해 보인다. 이와 같이 복잡한 것이 어떻게 생겨났는지에 대하여 아무도 이야기해 주지 않는다. 정의와 공리의 목록에 이어서 조심스럽게 표현된 정리가 뒤따른다. 정리에는 운신하기 힘든 조건이 실린다. 그 누가 전에 그것을 추측했다는 것은 불가능해 보인다. 정리 뒤에는 증명이 뒤따른다.

연역주의자의 양식은 유클리드적 이론을 매우 간결하고 아름답게 기술하는 양식임에 틀림없다. 그러나 이러한 연역주의자의 양식은 성장 발전해 온 역사의 과정을 모두 무시한 채 이론을 완성된 불변의 형태로 재구성하여 제시하게 되므로, 실제적인 수학의 활동적 성질을 완전히 일소해 버리고 학생들에게 수학적 정의와 정리를 의미 없이 무조건적으로 수용하도록 하는 권위주의적 체제가 되어 버린다. 의심은 허용되지 않고 '기다려 보아라'라는 말이 그 대답이 될 뿐이다. 그러므로 연역주의자의 양식은 교육적 맥락에서 볼 때 바람직해 보이지 않는다.

Lakatos는 수학적 개념이 발생한 역사적 맥락에 따라서 수학 교재를 구성할 것을 제안하고 있다. Lakatos가 제안하는 교재 구성의 방법은 발견의 논리를 강조하는, 일종의 역사 발생적 개념 지도 방법이다. Lakatos의 발견적 양식은 수학적 개념이 발견되도록 안내한 문제 상황과 새로운 개념을 탄생시킨 논리를 강조한다(Lakatos 1976, 144). 그는 평등 수렴, 유계 변동(Bounded Variation), 가측 집합(Measurable Set)에 대한 Carathéodory의 정의를 발견적 양식으로 도입하는 방법을 예시하고 있는 바, 그 한 예는 다음과 같다(Lakatos 1976, 144-5).

> 테제: 라이프니츠의 연속성의 원리의 특수한 해석, 곧 연속 함수의 임의의 수렴하는 수열의 극한 함수는 연속이다(원초적 추측).
> 안티테제: ... 안티테제의 음극을 발생시킨다. 양극은 평등 수렴의 증명 전신이 될 Cauchy 증명에 의해 강화된다. 음극은 원초적 추측에 대한 점점 더 많은 전면적인 반례에 의해 강화된다.
> 진테제: 전면적인 반례가 또한 국소적인 반례가 되는 그러한 유죄인 보조 정리가 발견되고 증명이 개선되고 추측이 개선된다. 진테제의 특징적인 구성 요소가 드러난다. 곧, 정리 및 그와 함께 평등 수렴이란 증명-생성 개념이 나타난다.

이러한 발견적 양식은 기본적으로 원시적 추측과 그 증명에 이어서 전면적 반례가 제시되고, 유죄인 보조 정리가 발견되어 그것을 조건으로 추가하여 증명과 추측을 개선하는 단계로 구성된다. 따라서, 발견적 양식에 의해 교재를 구성하는 순서는 다음과 같이 공식화될 수 있을 것이다.

(1) 문제 상황이 설정된다.
(2) 원시적 추측이 제안된다.
(3) 추측을 검사하고 증명한다.
(4) 전면적인 반례가 나타나거나, 원시적 개념의 한계가 밝혀진다.

(5) 증명을 분석하여 유죄인 보조 정리를 발견한다.

(6) 추측을 개선하며, 원시적 개념이 개선되거나 새로운 개념이 발견된다.

그러므로 수학의 역사는 Lakatos의 발견적 양식의 바탕을 이루고 있지만, 이러한 발견적 양식은 수학적 개념을 실제적인 역사적 발생 순서 그대로 제시하는 것이 아니라 수학사를 합리적으로 재구성할 것을 요구한다. Lakatos는 일종의 합리적으로 재구성된 역사가 반영되도록 Proofs and Refutations을 구성하였다. Lakatos는 여기서 합리적 재구성이 무엇이며 어떻게 하는 것이 합리적 재구성인가에 대한 논의를 하고 있지 않지만, "Pi의 진술은 발견적으로 옳지만(곧, 수학의 합리적인 역사에서는 참이지만), 역사적으로는 거짓이다"(Lakatos 1976, 84)라는 그의 말에서 합리적 재구성이 반드시 역사적 순서와는 일치하는 것은 아니라는 것을 알 수 있다. 따라서 합리적 재구성은 역사를 반영한다는 점에서 역사 발생적 원리와 같으나 그 순서가 역사적 사실과는 다를 수 있다는 점에서 역사 발생적 원리와 차이가 있다. Lakatos의 수리 철학을 연구한 Koetsier는 어떤 특별한 일련의 수학적 행위 그대로의 기술을 수학적 발달의 構成이라고 정의하고, 그러한 구성이 역사에서 일어난 일련의 수학적 행위를 참고로 하여 이루어질 때 그것을 수학적 발달의 再構成이라고 정의하였다. 그리고, 구성 또는 재구성은 그것이 어떤 방법론에 근거한다면 合理的이라고 하였다(Koetsier, 12). 합리성에 대한 이러한 정의가 Lakatos의 합리적 재구성의 의미를 보다 명확히 해준다.

III. Lakatos 방법론을 초등수학에 적용하기 위한 방안 탐색

1. 가능성

(적어도 성장하는 분야에서의) 수학적 지식은 준경험적 지식이며, 이때 반례와 증명의 분석이 이론의 성장에 중요하다는 Lakatos의 철학, 그리고 그의 방법론에 근거한 수학사의 합리적 재구성이 초등 수학에 적용 가능할 것인가?

학교 수학은 성장을 마친 완성된 이론을 학생 수준에 맞게 재구성한 것이라고 할 수 있으며, 그런 점에서 백보 양보해서 볼 때 완성된 이론이라고 주장할 수도 있다. 그러나 학생의 입장에서 보면, 수학은 그들의 마음 속에서 성장하고 있는 것임에는 틀림없을 것이다. Piaget의 조절과 동화 이론을 언급하지 않더라도, 학생들은 수학을 학습하면서 많은 오류와 오개념, 잘못된 직관을 보여주고 있으며 일정한 어느 단계에서는 그러한 오류와 오개념, 잘못된 직관을 확실한 것으로 납득하고 있다. 또한 학생들이 성장하면서 그들이 학습하는 개념도 그 폭이 넓어지고 그 깊이가 깊어진다. 그러므로 교과서가 아니라 학생의 사고 과정을 존중한다면 유클리드적 이론보다 준경험적 이론으로 학교 수학을 보는 것이 바람직하다고 할 수 있을 것이다. 바로 이 부분이 Lakatos의 방법론을 초등 수학에 적용할 가능성이 있는 첫 번째 근거로 제시될 수 있을 것이다.

Lakatos는 "성장하는 이론에서 직관은 미숙하고 비틀거리며 잘못을 범한다. 그러한 성장 기간을 거치지 않은 이론은 없다. 더욱이 이러한 기간은 역사적 관점에서 가장 흥미진진한

것이며, 교육의 관점에서 가장 중요하게 다루어져야 할 것이다"(Lakatos 1976, 140)라고 주장함으로써, 시행착오와 오류가 불필요하며 귀찮은 것이 아니라 교육적으로 대단히 가치가 있다는 것을 강조하고 있는 바, 수학자가 아닌 교육자로서는 이러한 주장을 도외시하기가 매우 어려울 것이라는 생각이 든다.

한편, Lakatos는 추측일 수 있는 수학적 지식을 개선하는 방법으로 증명과 반박의 방법을 제안하고 있다. 증명과 반박의 방법에서는 증명과 반례가 모두 중요한 역할을 수행한다. 따라서, 중등 수학에서는 Lakatos의 방법론이 적용될 가능성이 매우 높다. 그러나 초등학교 수준에서는 일반화와 그에 따른 반례가 나타나기는 하지만, 증명이 없기 때문에 Lakatos의 방법이 직접 적용되기는 어렵다. 특히, 보조정리 합체법은 전면적 반례를 국소적 반례로 전환하는데 그 묘미가 있고 국소적 반례는 증명의 결과인 보조정리의 반례이므로, 증명을 다루지 않는 초등학교 수준에서는 근본적으로 보조정리 합체법을 적용할 수가 없다.

그런데, Lakatos는 "어떤 분명하게 서술된 주장이 참이거나 거짓이라는 것을 결정적으로 보이는 것이 증명의 목적이 아니라 원래의 소박한 추측을 진정한 정리로 개선하는 것이 증명의 실제적인 목적"(Lakatos 1976, 41)이라고 말하고 있다. 증명의 이러한 목적에 주목한다면 증명 없이 추측을 개선하는 활동 역시 의미 있다고 할 수 있을 것이다. 이 점이 Lakatos의 방법론을 초등 수학에 적용할 가능성이 있는 두 번째 근거로 제시될 수 있을 것이다.

바로 이러한 점 때문에 Lakatos의 수학적 발견의 논리인 보조정리 합체법을 온전한 형태로 초등학교 수준에서 적용할 수는 없지만, 그의 발견적 양식을 어느 정도 변형된 형태로 초등 수학에 적용할 수 있을 것이다.

연구자는 Lakatos의 이론을 교수 방법과 교육과정 구성 방법의 두 가지로 측면에서 초등 수학에 적용할 수 있을 것이라고 생각된다.

2. 국소적 방법: 교수 방법

Lakatos에게서 증명은 추측을 여러 개의 보조정리로 나누어서 비판의 표적을 확대하는 것이며, 비판을 활성화하고 비판을 수용하여 증명을 분석하고 추측을 개선하는 것이 그의 방법론의 핵심이라고 할 수 있다. 그러한 관점에서 앞서 발견적 교재구성의 순서를 제시한 바 있다. 그러나 초등학교 수준에서는 증명을 다루지 않으며 특히 Lakatos식 증명관을 수용하기는 매우 어려울 것으로 생각된다. 그런 점에서 Lakatos의 방법론은 초등학교에서 수정될 필요가 있다. 즉, 증명을 고려하지 않기 때문에 증명과 반박의 방법을 합리적 재구성의 근거로 삼을 수는 없다. 그러나 추측을 개선하는 방법으로 괴물 배제법이나 예외 배제법을 사용할 수 있을 것이다. 괴물 배제법과 예외 배제법 역시 추측이 나타나고 반례가 제시되며 반례를 극복해 가는 역동적 과정을 보여줄 수 있으며, 초등학교 수준에서 괴물 배제법과 예외 배제법은 쉽게 구현할 수 있기 때문이다. 지식의 준경험성을 인정한다면, 괴물 배제법과 예외 배제법을 적용한 추측에 또다시 반례가 나타나는 과정이 반복되게 된다. 그러므로 Lakatos의 발견적 교재 구성의 순서를 약간 수정하여, 다음과 같은 교수 절차를 따를 수 있을 것이다.

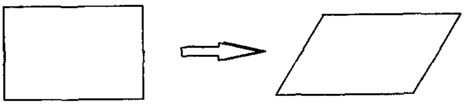
먼저, 문제 상황이 설정된다. 학생들이 문제를 의식해야 능동적 활동이 시작되기 때문이다.

다음에는 문제의 해에 대한 추측이 제안된다. 이때 학생들이 원시적 추측을 할 수 있는 상황을 교사가 만들어 주어야 한다. 이 추측에는 학생들의 오류나 잘못된 직관이 반영되어야

그 다음에 반례가 등장할 수 있다. 그러므로 교사는 학생들의 직관이 오류로 연결될 수 있는 상황을 잘 파악하고 있어야 한다. 그러한 예들은 다음과 같이 많이 있다.

(1) 교과서에서는 1, 2, 3, ..., 9까지 학습한 후에 '십'을 '10'으로 쓰기로 약속한다. 그 다음에 11, 12를 지도할 것이 아니라 학생들에게 십일, 십이, 이십오를 어떻게 쓸 것인지 물어본다. 아마도 101, 102, 205와 같이 쓰는 학생이 있을 것이다.

(2) 빨대로 만든 직사각형의 한 꼭지점을 눌러서 평행사변형으로 만들어 보자. 그리고 이 도형의 넓이가 어떻게 변할 것인지를 물어보자. 꽤 많은 학생들이 직사각형과 평행사변형의 넓이를 구하는 공식을 알고 있어도, '두 도형의 넓이가 같다'고 말할 것이다.



(3) 분모가 다른 두 분수의 덧셈을 지도하기 전에 $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$를 계산해 보라고 한다. 그러면 많은 학생들이 $\frac{2+3}{3+4}$와 같이 계산할 것이다. 학생들은 그러한 근거를 많이 제시할 수 있다. 예를 들어 이승엽 선수가 '어제는 3타석 2안타를 치고 오늘은 4타석 3안타를 쳤으니까 합하면 7타석 5안타'라거나 어제는 구슬이 3개 있었는데 2개를 잃었고 오늘은 4개가 있다가 3개를 잃었으니까 어제, 오늘 합해서 7개 중에 5개를 잃었다는 것들이 그러한 예가 될 것이다.

(4) 1에서 30까지의 수를 주고 각각에 대해 약수를 구하게 하면, 약수를 구하는 과정에서 수가 클수록(혹은 짝수에서만) 그 약수는 많아진다고 생각할 수도 있다.

(5) 귀납의 경우 오류를 동반하는 사례가 많이 있다.

이와 같이 학생들이 오류를 수반하는 추측을 한 후에 추측을 검사하게 한다.

추측의 검사는 추측이 옳다는 확증을 얻기 위해서보다는 추측에 대한 반례(또는 강한 의심)를 찾기 위함이다. 그러므로 극단적인 경우를 찾아보게 하고, 계산기나 컴퓨터 등을 활용하게 할 수도 있다.

예를 들어, 위의 (3)의 경우에는 $\frac{1}{1}+\frac{1}{100}$이나 $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$과 같은 분수의 덧셈을 해보게 하거나 어림을 해 보게 할 수 있으며, (2)의 경우에는 넓이를 구하는 공식을 이용하여 계산해 보게 하거나 아주 납작한 평행사변형과 직사각형을 비교해 보게 할 수도 있다. 이와 같이 추측을 검사하는 과정에서 반례가 나타나거나 반례가 나타나지 않더라도 추측에 대한 강한 의심이 생길 수 있으며 때에 따라서는 원시적 추측의 한계가 밝혀진다.

Lakatos에 의하면, 반례가 나타났으므로 증명을 분석하여 유죄인 보조정리를 찾아내야 한다. 그러나 증명을 고려하지 않는 상황에서 이런 작업은 불가능하다. 그러므로 이 경우에는 증명을 분석하기 보다는 반례를 분석한 후, 개념의 정의를 명확히 함으로써 반례를 제외시키거나(괴물 배제법), 반례를 포함하는 조건을 추가하여 그러한 반례를 제외시켜(예외 배제법) 추측을 개선한다.

이러한 과정을 요약하면 다음과 같은 교수 절차를 생각할 수 있다.

(1) 문제 상황이 설정된다.
(2) 원시적 추측이 제안된다.
(3) 추측을 검사한다.
(4) 반례가 나타나거나, 원시적 개념의 한계가 밝혀진다.

(5) 반례를 분석한 후, 개념의 정의를 명확히 함으로써 반례를 제외시키거나, 조건을 추가하여 그러한 반례를 제외시켜 추측을 개선한다.

3. 대국적 방법: 교육과정 구성 방법

역사를 아무리 압축하여 재구성한다 하더라도, 수학의 발달을 어느 한 단위 시간에 소화할 수는 없다. 그러므로 Lakatos의 방법론을 적용하려면 단위 수업에서의 교수 방법도 있을 수 있으나 교육과정의 오랜 시기를 고려하는 것도 필요하다. 초등학교에서 고등학교까지, 심지어는 대학 과정까지 계속 그런 성장의 과정이 이어질 수 있을 것이다. Lakatos의 방법론에 근거하여 교육과정을 구성하는 것은 van Hiele의 기하 학습 수준 이론의 적용과 유사해 보인다. van Hiele는 학생들이 기하를 학습하는 데는 1 수준에서 5 수준까지의 5 개의 수준이 있으며, 이전 수준에서 對象을 고찰하는 手段이 다음 수준에서는 고찰의 對象이 되는 과정을 반복하면서, 이러한 5 개의 수준을 거치게 된다고 보고 있다. Lakatos는 이러한 수준 이론을 제시하지는 않았다. 그러나, 증명과 반박의 방법론에 근거하여 수학의 역사를 재구성하면 아마도 이와 유사한 방식의 수준을 확립할 수 있지 않을까 생각된다. 이러한 수준은 반박의 수준, 즉 학생들의 오류와 잘못된 직관의 수준에 기초할 것이며, 수학적 개념과 방법에 내재해 있는 한계에 기초할 것이라 생각된다. van Hiele는 대상과 수단의 반복에 의해 수준을 구분하였으나 정당화와 반례에 의한 구분도 상당히 비슷한 결과를 얻게 되지 않을까 생각된다.

예를 들어, 초등학생들은 처음에는 직사각형과 정사각형을 서로 별개의 대상으로 인식하게 되는데, 이것은 도형과 도형의 성질에 의한 van Hiele의 어느 한 수준으로 볼 수도 있으나, 이는 분명히 학생들의 오개념이고 잘못된 직관의 하나이기도 하기 때문이다. 면이나 다면체도 학생들은 처음에는 내부를 포함하는 평평한 것으로 이해할 것이다. 면이나 다면체가 추상화된 최초의 구체물이 그러한 오개념을 야기하기 때문이다. 그러나 점점 수학적 수준이 향상되면서 그 내부를 고려하지 않거나 평평한 조건을 버리는 단계로 발전할 수 있을 것이다. 곱셈은 동수누가로 정의되지만, 0을 곱하는 것은 일상적인 동수누가가 아니며 특히 분수나 소수의 곱으로 발전하면서 동수누가의 방법은 그 한계에 부딪히게 된다. 집합은 '몇 개의' 모임에서 출발하지만 더 이상 일상 의미에서의 모임이 아니라 '아무 것도 없는' 모임까지 포함시킨다. 분수 지도에 필요한 등분할 활동도 처음에는 모양과 크기가 같은 등분할만 다루다가 나중에 모양은 다르지만 넓이가 같은 경우도 다루게 된다. 이것은 모양이 다를 때 넓이가 같다는 것을 납득시킬 수단을 갖고 있지 않을 때는 불가피한 상황이다. 중학교에서 학습하는 접선의 개념도 고등학교에서 미적분을 학습하면서 그 개념이 변해진다.

이러한 일련의 발달과 변화, 수정의 단계를 거치는 개념과 알고리즘이 학교 수학에 많이 있다. 이러한 것을 일거에 최종 형태를 제시하려고 하는 것은 무리일 것이다.

개념이나 알고리즘을 Lakatos의 방법론에 근거하여 교육과정에 반영할 때의 순서는 다음과 같은 기준에 따를 수 있을 것이다. 개념의 경우, 처음에는 명확하게 정의하지 않고 제시한다. 정의에는 논리적 정의, 예시적 정의, 발생적 정의 등이 있는데, 아동들이 스스로 논리적 정의를 하기는 어렵다. 그러므로 처음에는 "다음과 같은 사각형을 직사각형이라고 한다."와 같이 예시적으로 정의하거나 혹은 발생적으로

정의하여 사용한다. 예시적 정의를 보다 명확히 해야 할 필요성을 인식할 무렵(아마도 이 무렵에 반례가 나타날 수도 있다) 이를 명확히 하여 논리적으로 정의한다. 논리적 정의 역시 최종적인 형태로 제시할 것이 아니라 학년 단계에 따라 정의를 계속 보완할 필요가 있을 것이다. 예를 들어, 배수는 처음에는 자연수 범위에서 도입되지만, 수의 범위를 확장하면서 배수의 정의를 새로 할 수도 있을 것이다.

알고리즘의 경우, 처음부터 표준 알고리즘을 제시하기보다는 학생들이 발명한 비표준 알고리즘에서 출발하여 비표준 알고리즘이 불완전하거나 불편함을 깨달을 무렵 표준 알고리즘을 제시하는 것이 더 바람직할 것이다. 혹은 알고리즘의 발생 당시의 개념에 충실하게 알고리즘을 도입하고, 이 알고리즘의 불완전함이 드러날 때 좀더 개선된 알고리즘을 제시할 수 있다. 예를 들어, 분수의 나눗셈은 나눗셈의 기본 개념인 동수누감이나 등분할 상황에서 출발한다. 이 경우 몫이 자연수가 되는 (분수)÷(분수)나 (분수)÷(자연수)가 지도될 것이다. 그러다가 몫이 자연수가 아닌 (분수)÷(분수)의 상황에서 개선된 알고리즘을 창조하게 한다. 분수의 나눗셈을 제수의 역수의 곱으로 지도하지 않고 학생들이 다음과 같이 대각선 방향의 곱인 것으로 발견하게 된다면 그런 알고리즘을 사용하다가 여러 분수의 곱과 나눗셈을 다루면서 그런 알고리즘의 불편함을 깨닫고 제수의 역수의 곱으로 이해하게 할 수도 있을 것이다.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

이러한 흐름은 교수요목 상으로 보면 현행 교과서의 교수요목 순서와 별 차이가 없어 보일 수도 있다. 그러나 기본 철학과 지도 방법에서의 차이점이 존재하게 된다. 이와 같이, 학생의 오개념과 잘못된 직관을 참고하고 수학의 역사를 Lakatos의 방법론에 기초하여 재구성하여 교육과정을 개발한다면, 수학은 고정된 것이 아니라 성장, 발전하는 것임을 학생들에게 인식시켜 주고, 수학을 만들고 성장시키는 것이 바로 인간임을 그리고 바로 '나'임을 인식시켜 수학을 좀더 학생 가까이 둘 수 있게 되지 않을까 생각한다. 그러나 Lakatos는 명백하게 수준 이론을 제안하지는 않았으며, 오개념과 반박에 의해서 개념이나 알고리즘의 수준을 정하는 것은 van Hiele의 수준만큼 명확하지는 않다. 그러므로 Lakatos의 방법론에 의해 교육과정을 구성하는 것은 결코 쉬운 일은 아닐 것이라고 생각된다. 그러나 지금의 교육과정에서도 개념의 발달과 수정을 찾아볼 수 있다는 점에서 불가능한 것이라고 생각되지는 않는다.

한 가지 또 주의할 점은, 수학의 성장은 Lakatos식 방법론에만 의존할 수는 없다는 것이다. 특히 교육과정을 특정 개인의 방법론에만 의존한다는 것은 매우 위험한 발상이다. Lakatos의 방법론에 의한 교육과정의 개발은 교육과정 개발의 '한 가지' 방법론으로 제안되고 있다는 점을 주의해야 할 것이다.

Ⅳ. Lakatos 방법론의 적용 사례

다음은 실제 교실 수업 사례를 Lakatos의 방법론에 근거하여 재구성한 것이다. 5-가 단계에서 약수의 개념을 배우고 나서 진행될 수 있는 수업이다. 이 수업에서는 추측하고 반례가 나타나서 추측이 개선되고, 개선된 추측에 다시 반례가 나타나서 추측을 개선하는 활동이 반복된다. 학생들이 처음에 제시한 추측이 무엇이고 등장한 반례가 무엇인가에 따라 진행되는 내용이 달라지게 된다.

■ 수업 목표: ① 수의 약수를 구한다.

② 소수, 소수의 제곱수, 소수의 세제곱수의 약수의 개수에 대한 법칙을 발견하는 경험을 한다.

■ 수업 전개

단계	핵심 활동	교수-학습 활동	비고
문제 상황	주어진 수의 약수를 구하게 한다.	▶ 1, 2, 8, 30의 약수를 구하게 한다. - 1의 약수: 1 - 2의 약수: 1, 2 - 8의 약수: 1, 2, 4, 8 - 30의 약수: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30	
원시적 추측	자료에서 추측을 하게 한다.	▶ 여기서 무엇을 알 수 있는지, 무슨 생각이 드는지를 발표하게 한다. - 양 끝에 있는 두 수, 그리고 그 다음 수들끼리 곱하면 처음 수가 된다. - 수가 클수록 약수가 많아진다.	
추측의 검사 및 반례 출현	다른 자료를 통해 추측이 옳은지 검사하게 한다. 반례를 찾아낸다.	▶ 다른 수에 대해서도 약수를 조사해 보자. - 5의 약수: 1, 5 - 4의 약수: 1, 2, 4 - 6의 약수: 1, 2, 3, 6 - 7의 약수: 1, 7 ☞ 수가 클수록 약수가 많아지지는 않는다.	
추측의 개선 및 새로운 문제	추측을 개선하게 한다.	☞ 짝수에서는 수가 클수록 약수가 많아진다. ☞ 짝수에서는 약수가 2개, 3개, 4개가 되는데, 홀수는 약수가 2개이다. 정말일까?	
추측의 검사 및 반례 출현	다른 자료를 통해 추측이 옳은지 검사하게 한다. 반례를 찾아낸다.	▶ 좀더 많은 홀수에 대해서 조사해 보자. - 1의 약수: 1 - 3의 약수: 1, 3 - 5의 약수: 1, 5 - 7의 약수: 1, 7 - 9의 약수: 1, 3, 9 - 11의 약수: 1, 11 - 13의 약수: 1, 13 - 15의 약수: 1, 3, 5, 15	1, 9, 15 등은 반례가 된다.
추측의 개선과 새로운 문제	반례를 검토하게 한다.	▶ 1, 9, 15에 대해서 좀더 자세히 검토해 보아라. - 9=3×3, 15=3×5로 나타낼 수 있고, 3, 5, 7, 11 등은 그렇지 못하다.	
	반례를 고려해서 추측을 개선하게 한다.	☞ 두 홀수의 곱으로 쓸 수 있으면 약수는 2개가 아니다. ☞ 두 홀수의 곱으로 쓸 수 있으면 약수가 4개가 될 것이다. ☞ 두 홀수의 곱으로 쓸 수 없는 홀수는 약수가 2개(1과 자신)이다.	완벽한 추측은 아니지만 어느 정도 추측이 개선되었다.
	새로운 문제가 제기된다.	☞ 같은 두 홀수의 곱으로 쓸 수 있는 수의 약수는 몇 개일까? ☞ 세 홀수의 곱으로 쓸 수 있는 수의 약수는? ☞ 짝수의 약수의 개수는?	학생에게서 자발적으로 제기되게 한다.

다음은 2명의 학생을 대상으로 한 지도 사례를 바탕으로 하여 재구성한, 받아내림이 있는 뺄셈에서 반례를 처리하며 수학적 발견을 하는 수업안이다.

■ 수업 목표: ① 받아내림이 있는 뺄셈을 할 수 있다.
② 수학적 발견을 경험한다.

■ 수업 전개

단계	핵심 활동	교수-학습 활동	비고
문제 상황	주어진 뺄셈을 하게 한다.	▶ 다음 뺄셈을 하여라. 52 41 94 - 25 - 14 - 49	
원시적 추측	자료에서 추측을 하게 한다.	▶ 여기서 무엇을 알 수 있는지, 무슨 생각이 드는지를 발표하게 한다. 문제나 답에서만 공통점을 찾을 때 다른 쪽도 생각해 보게 하고, 나중에 이 모든 것을 종합해서 발표하게 한다. - 두 자리 수에서, 십의 자리의 수와 일의 자리의 수를 바꿔서 빼면, 답의 일의 자리 수와 십의 자리의 수를 더할 때 9가 된다.(답은 9의 배수이다.)	'배수'라는 표현은 5학년에서 가능하다.
추측의 검사 및 반례 출현	다른 자료를 통해 추측이 옳은지 검사하게 한다. 반례를 찾아낸다.	▶ 다른 뺄셈에 대해서 조사해 보아라. 십의 자리의 수와 <u>일의 자리</u>의 <u>수를 바꾸지 않고</u> 임의의 뺄셈을 하는 경우가 있는데, 이 경우에는 적절한 지도를 해 준다. ☞ 88과 같은 수의 경우 바꿔서 빼면 답은 0이 되어 추측이 틀렸다.	
추측의 개선 및 새로운 문제	추측을 개선하게 한다. 새로운 문제가 제기된다. 다른 자료를 통해 새로운 문제를 해결하려 한다.	☞ <u>십의 자리의 수와 일의 자리의 수가 같은 경우를 제외한</u> 두 자리 수에서, 십의 자리의 수와 일의 자리의 수를 바꿔서 처음 수와 빼면, 답의 일의 자리 수와 십의 자리의 수를 더할 때 9가 된다. ☞ 세 자리 수에서도 이런 일이 생길까? ▶ 세 자리 수에서 조사해 보자. - 321, 624와 같은 수를 통해 검사해 본다.	예외배제법을 적용하였다.
새로운 추측	새로운 추측이 제안된다. 새로운 문제 제기	☞ 백의 자리의 수와 일의 자리의 수가 같은 경우를 제외한 세 자리 수에서, 순서를 바꾼 수와 처음 수의 차를 구하면, 답의 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리의 수를 모두 더할 때 18이 된다. ☞ 네 자리 수에서는 27이 될 것 같다.	

V. 결론

이 연구는 Lakatos의 수학 인식론과 그의 방법론을 학교 수학, 특히 초등 수학에 적용하려는 시도이다. Lakatos는 수학을 준경험적 이론으로 보고 정당화의 논리로 알려진 증명을 발견의 논리로 발전시켰다. 그러나 일반적으로 학교 수학은 준경험적 이론이 아니라 유클리드적 방법으로 전개되고 있으며 초등 수학에는 증명이 관련되지 않아서 Lakatos의 방법론을 직접 적용하는 데는 어려움이 있을 수 있다.

그러나, 이 연구에서는 학교 수학, 특히 학생의 사고 가운데서 성장해 가는 수학은 유클리드적 이론이 아니라 준경험적 이론임을 주장하고 있으며, 그런 점에서 초등 수학에서도 비록 증명과 반박의 방법은 아니지만 반례가 중요한 역할을 할 수 있는 괴물 배제법이나 예외 배제법 등을 Lakatos의 발견적 양식에 포함시켜 그의 방법론의 일부가 적용될 수 있음을 주장하였다. 또한, Lakatos의 방법론을 적용할 수 있는 방법을 교수 방법적 측면과 교육과정 구성 측면에서 논하였다. 교수 방법적 측면에서는 Lakatos의 발견적 양식의 수정된 절차를 제안하고 그에 따른 수업 사례를 제시하였다. 교육과정 구성 측면에서는 발달과 변화, 수정의 단계를 거치는 개념과 알고리즘을 일거에 최종 형태로 제시하는 대신 단계적으로 도입하는 과정을 예시적으로 제안하였다.

Lakatos의 수학 인식론과 그의 증명과 반박의 방법을 증명을 다루지 않는 초등학교 수준에서 적용하는 것은 불가능하다. 그러나 지식이 성장, 발전한다는 그의 준경험적 이론관의 도입은 불가능한 일이 아님을 알 수 있다. 오히려, Lakatos의 방법론에 의한 수업 전개와 교육과정 구성은 학생들에게 수학을 만들고 수정해 가는 경험을 시켜줄 수 있으며 수학의 성장 배경을 인식시켜 줄 수 있다는 점에서, 초등학교 수준에서도 적용할 가치가 있는 매우 중요한 교육 인식론이자 방법론이라고 할 수 있을 것이다.

참고문헌

강문봉(1993). **Lakatos의 數理哲學의 敎育的 硏究**. 서울대학교 대학원 교육학박사학위논문.

나귀수(1998). **증명의 본질과 지도 실제의 분석-중학교 기하 단원을 중심으로-**. 서울대학교대학원 교육학박사학위논문.

서동엽(1999). **증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색 - 중학교 수학을 중심으로 -**. 서울대학교 대학원 교육학박사학위논문.

우정호(1994). "증명 지도의 재음미". **대한수학교육학회논문집** 4(1), 3-24.

우정호(1998). **학교 수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교출판부.

Greig, Judith Maxwell(1987). *The epistemological and educational arguments of Imre Lakatos's proofs and refutations.* Doctoral Dissertation, Stanford University; University Microfilms International.

Koetsier, Teun(1991). *Lakatos' philosophy of mathematics: a historical approach.* Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery.* In J. Worrall & E. Zahar. London: Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1978). A renassance of empiricism in the recent philosophy of mathematics? In J. Worrall & G. Currie (Eds.), *Mathematics, Science and Epistemology* (pp.23-42). London: Cambridge University Press.

Popper, K. R. (1963). *Conjectures and refutations: the growth of scientific knowledge.* London: Routledge and Kegan Paul.

Sekiguchi, Yasuhiro(1991). *An investigation on proofs and refutations in the mathematics classroom.* UMI Doctoral Dissertation of University of Georgia.

A Study on the Application of Lakatos's Methodology to Teaching Elementary Mathematics

Kang, Moon Bong (Gyeongin National University of Education)

Lakatos's mathematical philosophy implies that the mathematical knowledge is quasi-empirical and provides the context where mathematics grows and develops. So, it is educationally significant.

But, it is not easy to apply Lakatos's methodology to teaching elementary mathematics, because Lakatos's logic of the mathematical discovery is based on the proofs and refutations but elementary mathematics does not contain any proof.

This study is to develop the schemes that apply Lakatos's methodology to teaching elementary mathematics and to provide the teaching examples. I devised the teaching process and the curriculum development method. And I developed the teaching examples.

* **Key Words**: Lakatos(라카토스), proof(증명), conterexample(반례), history of mathematics(수학의 역사), elementary mathematics(초등수학), teaching method(교수법), curriculum(교육과정)

논문접수 : 2004. 1. 21

심사완료 : 2004. 2. 11