

완경사 방정식의 확장에 관한 연구

천제호* · 김재중** · 윤항목***

*동아대학교 대학원 해양공학과

**동아대학교 토목·해양공학부

***동의대학교 토목·도시공학부

A Study on the Extension of Mild Slope Equation

JE-HO CHUN*, JAE-JOONG KIM** AND HANG-MOOK YOON***

*Department of Ocean Engineering, Graduate School of Donga University, Busan, Korea

**Department of Civil and Ocean Engineering, Donga University, Busan, Korea

***Division of Civil and Urban Engineering, Dong-eui University, Busan, Korea

KEY WORDS: Mild-Slope Equation 완경사방정식, Nonlinear Waves 비선형 파랑, Rapidly Varying Topography 급변 경사 수심, Nonlinear Mild-Slope Equation 비선형완경사방정식, Modified Mild-Slope Equation 수정완경사 방정식

ABSTRACT: In this study, the Mild slope equation is extended to both rapidly varying topography and nonlinear waves, using the Hamiltonian principle. It is shown that this equation is equivalent to the modified mild-slope equation (Kirby and Misra, 1998) for small amplitude wave, and it is the same form with the nonlinear mild-slope equation (Isobe, 1994) for slowly varying bottom topography. Comparing its numerical solutions with the results of some hydraulic experiments, there is good agreement between them.

1. 서론

Berkhoff (1972)는 해저 경사가 완만한 지역에서의 파랑 변형을 계산하는 완경사 방정식을 제안하였다. 이 방정식은 수심이 매우 간단하면서도 비교적 정확하게 파랑을 예측할 수 있어 현재까지도 해양공학 전반에 걸쳐 많이 적용되고 있다.

그러나 Berkhoff (1972)의 완경사 방정식은 계산이 비교적 번거로운 편이어서, 이후에 계산하기 편리한 포물형 완경사 방정식(Radder, 1979) 또는 쌍곡선형 완경사 방정식(Copeland, 1985) 등의 근사 모델 등이 개발되었다. 하지만, 이러한 근사 모델은 지배방정식을 유도할 때 생기는 가정들에 의해 실제 현장 적용성과 해의 정확성 등에는 언제나 일정한 한계가 있다.

이에 본 연구에서는 비선형 파랑과 급변 수심 등을 동시에 고려하면서 기존의 완경사 방정식을 확장하여 완경사 방정식의 정확성을 향상시키고자 하였다. 구체적으로 Hamiltonian principle을 적용하여 본 연구의 지배 방정식인 확장형 완경사 방정식을 유도하였는데, 이 때 유도되어진 지배 방정식이 Kirby and Misra (1998) 등이 제안한 수정완경사 방정식과 Isobe (1994) 등이 제안한 비선형 완경사 방정식과 일치함을 보였다. 그리고 본 연구의 지배 방정식을 수치해석 기법을 이용하여 그 해를 구하였는데, 이를 몇 가지 수리 실험에 적용하

여 수리 실험 결과와 본 연구결과의 비교를 통해 본 연구의 지배 방정식에 검증은 시도하였다.

2. 지배 방정식

2.1 지배방정식의 유도

Hamiltonian H는 운동에너지와 위치에너지의 합을 의미하는 데, 대개는 Hamiltonian density H를 사용하여 다음의 식 (1)과 같이 정의한다.

$$H = \int \int_A H dx dy \tag{1}$$

여기서, Hamiltonian density H는 단위면적당 파랑 에너지라는 물리적 의미를 가지며 다음과 같은 식으로 정의된다.

$$H = \frac{\rho g \eta^2}{2} + \int_{-h}^{\eta} ((\nabla \phi)^2 + (\phi_z)^2) dz \tag{2}$$

여기서, η 와 ϕ 는 각각 수면변위와 시·공간에 대한 속도 potential 함수이다.

위의 식 (1)에서의 Hamiltonian density H는 다음의 식 (3)과 같은 canonical equations 에 대입하여 수면 변위 η 와 자유 수면에서의 속도 potential 함수 ϕ 에 관한 파동방정식을 유도한다.

제 1저자 천제호 연락처: 부산광역시 사하구 하단2동 840
051-636-3563 eulia01@hotmail.com

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{\delta H}{\delta \eta} \quad \text{at } z = \eta \quad (3)$$

위의 식 (3)은 각각 운동학적 경계조건(KFSBC)와 동역학적 경계조건(DFSBC) 등을 의미한다 (Radder, 1999).

본 연구에서는 속도 potential 함수 $\Phi(x, y, z, t)$ 를 시간 · 평면에 대한 속도 potential 함수 $\phi(x, y, t)$ 와 수직분포함수 $f(z)$ 의 곱으로 나타내고, 수직분포함수를 다음의 식 (4)와 같이 가정한다.

$$f(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (4)$$

위의 식 (4)와 같은 수직분포 함수는 Kirby and Misra (1998)와 Lee and Park (2000)이 각각 수정완경사 방정식과 비선형완경사 방정식을 유도할 때 사용한 바 있으며, 장파와 단파 영역 모두에 대해서 적용이 가능하다는 장점을 가진다 (Isobe, 1994).

앞서 가정한 것과 같은 형태의 속도 potential 함수 $\Phi(x, y, z, t)$ 를 위의 식 (3)에 대입한 후, 수면변위 η 와 시간 · 평면에 대한 속도 potential 함수 ϕ 에 대한 방정식으로 정리하여 다음의 식 (5.1)과 식 (5.2)와 같은 식을 얻었다.

$$(f_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \phi} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\delta H}{\delta \eta} - \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z=0} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.2)$$

여기서, $f_{z=\eta}$ 는 자유수면에서의 수직분포함수 값으로서 $z=0$ 에 대한 Taylor series 값을 이용하여 $f_{z=\eta} = 1 + \eta k \tanh kh$ (여기서, k =파수, h =수심)와 같이 근사하여 나타낼 수 있다.

한편, Hamiltonian density H를 다음의 식 (6)과 같이 Taylor series를 적용하여 진폭의 1차 정도까지만 고려하도록 근사하였다.

$$H \cong \frac{g\eta^2}{2} + \frac{1}{2} \int_{-h}^0 ((\nabla \Phi)^2 + (\Phi_z)^2) dz + \frac{\eta}{z} ((\nabla \Phi)^2 + (\Phi_z)^2)_{z=0} + O(\eta^2) \quad (6)$$

위의 식 (6)을 식 (5.1)과 식 (5.2) 등의 canonical equations 등에 대입하여 정리하면 다음의 식 (7)과 식 (8)과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} = & - \nabla \left(\frac{CC_x}{g} + \eta \right) \nabla \phi + \frac{\sigma^2 - k^2 CC_x}{g} \phi \\ & + \eta (k \tanh kh)^2 \phi - \eta k \tanh kh \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ & - I_3 \nabla^2 h \phi - \left(\frac{\partial I_3}{\partial h} - I_4 \right) (\nabla h)^2 \phi \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} = & - g\eta - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} (k \tanh kh \phi)^2 \\ & - \eta k \tanh kh \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (8)$$

이 때, 위의 식 (7)에서 I_3 과 $\partial I_3 / \partial h - I_4$ 는 Kirby and Misra (1998)의 값을 따른다.

식 (8)의 우변의 세 번째 항인 $k \tanh kh \phi$ 은 $(\Phi_z)_{z=0}$ 과 같은데, 이를 선형 운동학적 경계 조건(linearized KFSBC)에 의해 η 로 나타낼 수 있다. 이 때, 식 (8)의 $k \tanh kh \phi$ 항을 η 로 치환하여 나타낸 결과는 다음의 식 (9)와 같게 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} = & - g\eta - \frac{(\nabla \phi)^2}{2} - \frac{(\eta_z)^2}{2} \\ & - \eta k \tanh kh \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (9)$$

위의 식 (7)과 식 (9)는 본 연구의 지배 방정식으로 기존의 완경사 방정식을 비선형 파량과 급변하는 수심에 대해서 확장한 방정식이다.

2.2 다른 방정식과의 비교

2.2.1 수정완경사 방정식

Kirby and Misra (1998)은 미소진폭파에 대해 바닥경사는 급하다고 보고 Hamiltonian principle을 적용하여 다음의 식 (10)과 같은 수정완경사방정식을 유도하였다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} = & - \nabla \left(\frac{CC_x}{g} \nabla \phi \right) + \frac{\sigma^2 - k^2 CC_x}{g} \phi \\ & - I_3 \nabla^2 h \phi - \left(\frac{\partial I_3}{\partial h} - I_4 \right) (\nabla h)^2 \phi \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = & - g\eta \end{aligned} \quad (10)$$

정상상태일 경우 위의 식 (10)을 속도 potential ϕ 에 대해서 정리하면 Massel (1993)이 구한 것과 같은 형태의 방정식이 된다. Kirby and Misra (1998)은 이를 Booij의 문제 및 Bragg 반사 문제 등에 성공적으로 적용한 바 있다. 한편, 본 연구의 지배방정식을 1차의 $O(a)$ 에 대해서만 정리하면 다음의 식 (11)과 같은 형태로 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} = & - \nabla \left(\frac{CC_x}{g} \nabla \phi \right) + \frac{\sigma^2 - k^2 CC_x}{g} \phi \\ & - I_3 \nabla^2 h \phi - \left(\frac{\partial I_3}{\partial h} - I_4 \right) (\nabla h)^2 \phi + (a^2) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = & - g\eta + O(a^2) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 미소진폭파라고 가정하여 위 식에서 $O(a^2)$ 이상의 항들은 모두 소거하면 Kirby and Misra (1998)의 방정식과 일치하게 됨을 알 수 있다.

2.2.2 비선형완경사 방정식

Isobe (1994)는 불규칙파에 대해 Euler-Lagrange 방정식을 이용하여 다음의 식 (12)와 비선형완경사 방정식을 유도하였다.

$$f_{\alpha}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla(A_{\alpha\beta} \nabla \phi) + (\mathcal{C}_{\alpha\beta} - \mathcal{C}_{\beta\alpha}) \nabla \phi_{\beta} \nabla h + \left(-\frac{\partial f_{\alpha}^{\eta}}{\partial h} f^{\eta} \nabla \eta \nabla h - B_{\alpha\beta} \right) \phi_{\beta} = 0$$

$$f_{\beta} \frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} f_{\alpha}^{\eta} f_{\beta}^{\eta} \nabla \phi_{\alpha} \nabla \phi_{\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial f_{\alpha}^{\eta}}{\partial z} \frac{\partial f_{\beta}^{\eta}}{\partial z} \phi_{\alpha} \phi_{\beta} + \frac{\partial f_{\alpha}^{\eta}}{\partial h} f_{\beta}^{\eta} \phi_{\alpha} \nabla \phi_{\beta} \nabla h = 0$$

여기서, $f_{\alpha}^{\eta} = (f_{\alpha})_{z=\eta}$, $A_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} f_{\alpha} f_{\beta} dz$

$$B_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial z} dz, \quad \mathcal{C}_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial h} dh$$

식 (12)에서 f_{α} 는 임의의 수직분포함수인데 규칙파에 대해 본 연구에서 가정하는 수직분포 함수를 적용하여 정리하면 다음의 식 (13)과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$(1 + \eta k \tanh kh) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \left(\left(\frac{CC_{\alpha}}{g} + \eta \right) \nabla \phi \right) - \frac{\sigma^2 - k^2 CC_{\alpha}}{g} \phi - \eta (k \tanh kh)^2 \phi = 0$$

$$(1 + \eta k \tanh kh) \frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} (k \tanh kh \phi)^2$$

위의 식 (13)은 본 연구의 지배방정식 (7), (8)에서 바닥경사가 완만하다고 보고 구한 것과 같은 형태의 식이다.

3. 수치해석

본 연구에서는 지배방정식 식 (7)과 식 (9)를 시·공간에 대해 중앙차분한 다음 수치해석 기법을 이용하여 방정식을 푼다. (천제호, 2002) 이 때, 사용하는 수치해석 방법은 explicit scheme의 일종이므로, 다음의 식 (14)와 같은 안정조건을 만족하도록 계산하였다.

$$Cr = C_e \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

여기서, Δt 와 Δx 등은 각각 시간의 격자간격, 공간의 격자간격을 말하고 C_e 는 파의 위상속도를 말한다.

경계조건은 수직벽 경계와 개방 경계 등으로 나누어 처리한다. 여기서, 수직벽 경계는 다음의 식 (15)과 같이 완전 반사조건을 일괄적으로 적용하였다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

여기서, \vec{n} 은 경계 부위에 대해 수직인 방향을 나타내는 벡터다.

경계조건은 안정된 계산 결과를 위해 흡수경계층 기법을 적용하여 처리하였고, 파의 생성은 내부조파기법을 사용하여 처리하였다. 내부조파 기법과 흡수경계층 처리기법은 Larsen and Dancy (1983) 등에 의해 제안된 바 있는 기법으로 매우 효과적으로 사용되고 있는 수치기법이다. (천제호, 2002)

본 연구에서는 내부조파 기법과 흡수경계층 처리기법의 효과적인 적용을 살펴보기 위해 다음의 Fig. 1에서 보이는 것과 같이 길이 50m, 폭 0.5m이고 수조 양 끝단에 각각 5m의 sponge layer를 둔 장방형의 수조에 대해 파랑 전달을 계산하였다.

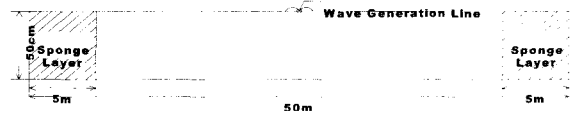


Fig. 1 Computational domain for rectangular basin

Fig. 1의 지형에 대해 0.01m의 파고와 1sec 주기를 가지는 파에 대해서 100sec 동안 파랑 전달을 계산하고 10sec, 20sec, 40sec, 100sec 일 때의 계산 결과를 Fig. 2에 나타내었다.

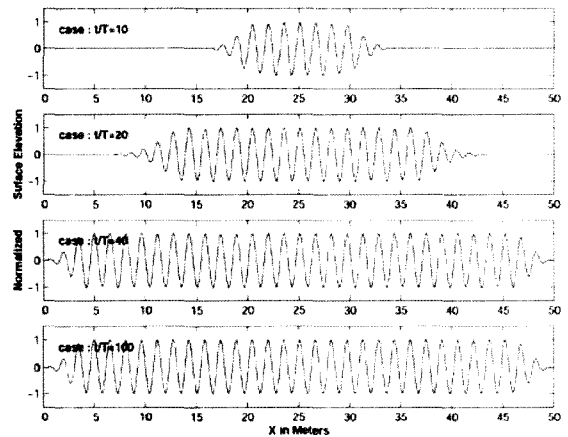


Fig. 2 Snapshots of surface elevation at times (t/T=10, 20, 40, 100)

Fig. 2로부터 수조의 정중앙에서 생성된 파가 수조의 양단으로 전달되는 것과 동시에 수조의 양단에서 파가 감소되어 가며, 일정 시간이 지난 후에는 계산결과가 안정화를 이루고 있음을 관찰할 수 있어 내부조파 기법과 흡수경계층 기법이 매우 효과적임을 알 수 있다.

4. 모델의 검증

4.1 Berkhoff et al. (1982)의 수리실험

Berkhoff et al. (1982)의 수리실험 결과와 비교하여 모델의 정확성을 검증하였다. Berkhoff et al. (1982)의 수리실험에서 사용되는 지형 조건은 다음의 Fig. 3과 같다.

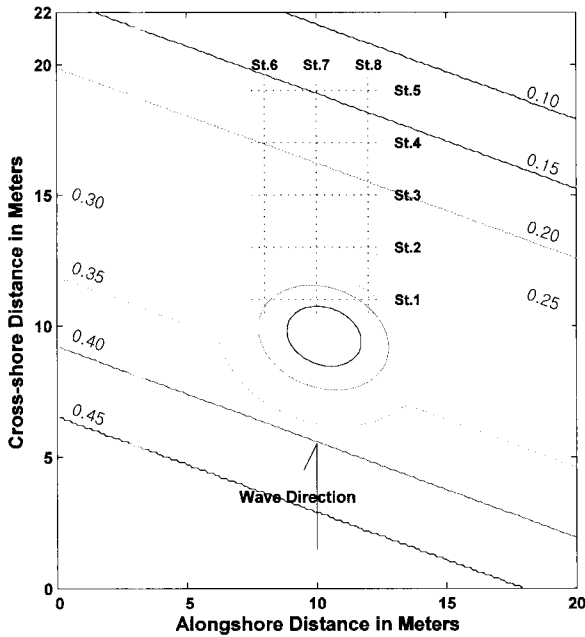


Fig. 3 Experimental set-up by Berkhoff et al. (1982)

본 연구의 결과를 검증할 목적으로 Fig. 3의 지형에 대해 실제의 수리실험에서 사용한 파랑조건인 0.0464m의 파고와 주기 1sec인 입사파를 본 연구의 방정식 및 선형완경사 방정식에 적용하여 수치해석을 실시한 후 각각의 수리실험결과와 함께 비교하여 보았다. 여기에서 선형 완경사 방정식은 Maruyama and Kajima (1985)가 제안한 파동방정식으로 쌍곡선형 완경사 방정식으로 분류되어진다.

본 연구의 계산 결과를 선형파랑 계산 결과 및 수리실험 결과와 함께 각 Section별로 Fig. 4에 나타내었다. 이 때 각 Section의 위치는 Fig. 3에 St.1~St.8로 나타내었다.

Berkhoff et al. (1982)의 수리실험에서 사용되는 지형은 Fig. 3에서와 같이 일정하게 경사진 바닥과 수중천퇴로 구성된다. 이와 같은 지형적 특성에 의해 회·굴절이 동시에 일어나는 것을 관찰할 수 있다. 일반적으로 비선형파는 파고가 파장의 크기에 영향을 주어 결과적으로 파의 회·굴절 현상에 일정한 영향을 끼치는 것으로 알려져 있다. 특히, Berkhoff et al. (1982)의 수리실험에서는 전반적으로 지형렌즈효과로 인해 수중천퇴를 중심으로 파랑 에너지가 집중됨과 동시에 결과적으로 비선형성이 크게 나타나, 수리실험 결과와의 비교를 통해서 본 연

구의 중요한 특징 중 하나인 비선형성을 검증해 볼 수 있다.

Fig. 4에서 수조의 종단면에 해당하는 Section 1~5에서 보면 전반적으로 비선형 파랑계산 결과가 선형 파랑계산 결과보다 수리실험결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 특히 수조의 뒷부분에 해당하는 단면인 Section 4와 Section 5에서는 일부 구간을 제외하고는 본 연구의 계산결과가 수리실험결과와 거의 일치하고 있다.

수리실험의 횡단면에 해당하는 Section 6~8을 통해서 보면 선형 파랑계산 결과와 비선형 파랑계산 결과의 차이를 종단면 도들에서보다 확연히 관찰할 수 있다. 먼저 선형파랑 계산에서는 수리실험치보다 비교적 빨리 최고점에 도달하고는 회절 등의 효과에 의해 파가 전반적으로 분산되어져 버리는 경향을 띄고 있다. 이에 반해 비선형파랑계산의 경우는 실제의 수리실험결과보다는 약간 늦게 최고점에 도달하고 있지만, 전반적인 파랑 변화의 경향은 수리실험의 그것과 일치하고 있다. 특히 Section 6에서 파고가 급격히 저감되었다가 다시금 증가하는 수리실험 결과와 일치하는 현상을 보여주고 있다. Berkhoff et al. (1982)에 의하면 이 지역에서의 파랑 변형 현상은 Amphidrompic point의 작용으로 발생하는 것으로 선형파의 파랑계산으로는 해결할 수 없는 한계점으로 지적되었다.

이상의 결과로부터 본 연구의 결과는 기존의 완경사 방정식의 약점인 비선형 효과를 반영함으로써 기존의 완경사 방정식을 개선시켰다고 판단된다.

4.2 Suh et al. (2001)의 수리실험

Suh et al. (2001)은 일정수심의 장방향 수조 위에 놓여진 반구형의 수중천퇴를 가지는 지형에 대해 수리실험을 실시하였다. 그리고 이 때 얻은 수리실험 결과를 이 지형에 대한 수정 완경사방정식의 수치해석 결과와 비교하였다. 이 때 Suh et al. (2001)이 시행한 수치실험의 개념도 및 파고 관측 위치를 Fig. 5와 Fig. 6에 나타내었다. Suh et al. (2001)은 경계조건에서의 반사를 피하기 위해서 Fig. 5에서처럼 심해파장 L 의 2.5배에 해당하는 길이만큼 흡수경계층을 설치하였다. 그리고 내부조파 기법을 이용하여 파를 재생시킨다.

그리고 Suh et al. (2001)은 파의 주기에 대한 급변수심의 영향을 살펴보기 위해 중간 수심과 영역에서 서로 주기가 다른 입사파를 적용하여 수리실험을 실시하였으며, 그 결과 비교적 파장이 긴 $k_0 h_0 = 1$ 인 경우에 급변 수심의 효과가 뚜렷이 나타난 것을 확인하였다. 이에 본 연구에서는 급변 수심의 효과가 뚜렷이 나타나는 $k_0 h_0 = 1$ 의 경우에 대해서 수치 모의실험을 실시하였다. 입사파고 및 주기는 각각 0.03m, 1.259sec이며, 시간과 공간의 계산 격자는 Suh et al. (2001)이 사용한 값인 0.00834sec 와 0.062818m 등을 각각 사용하였다. 이 때, 본 연구의 계산 결과를 기존의 완경사 방정식 계산결과 및 수리실험과 함께 나타내었다. 여기서 사용되는 기존의 완경사 방정식은 앞에서 소개한 바 있는 Maruyama and Kajima (1985)의 방정식을 사용한다.

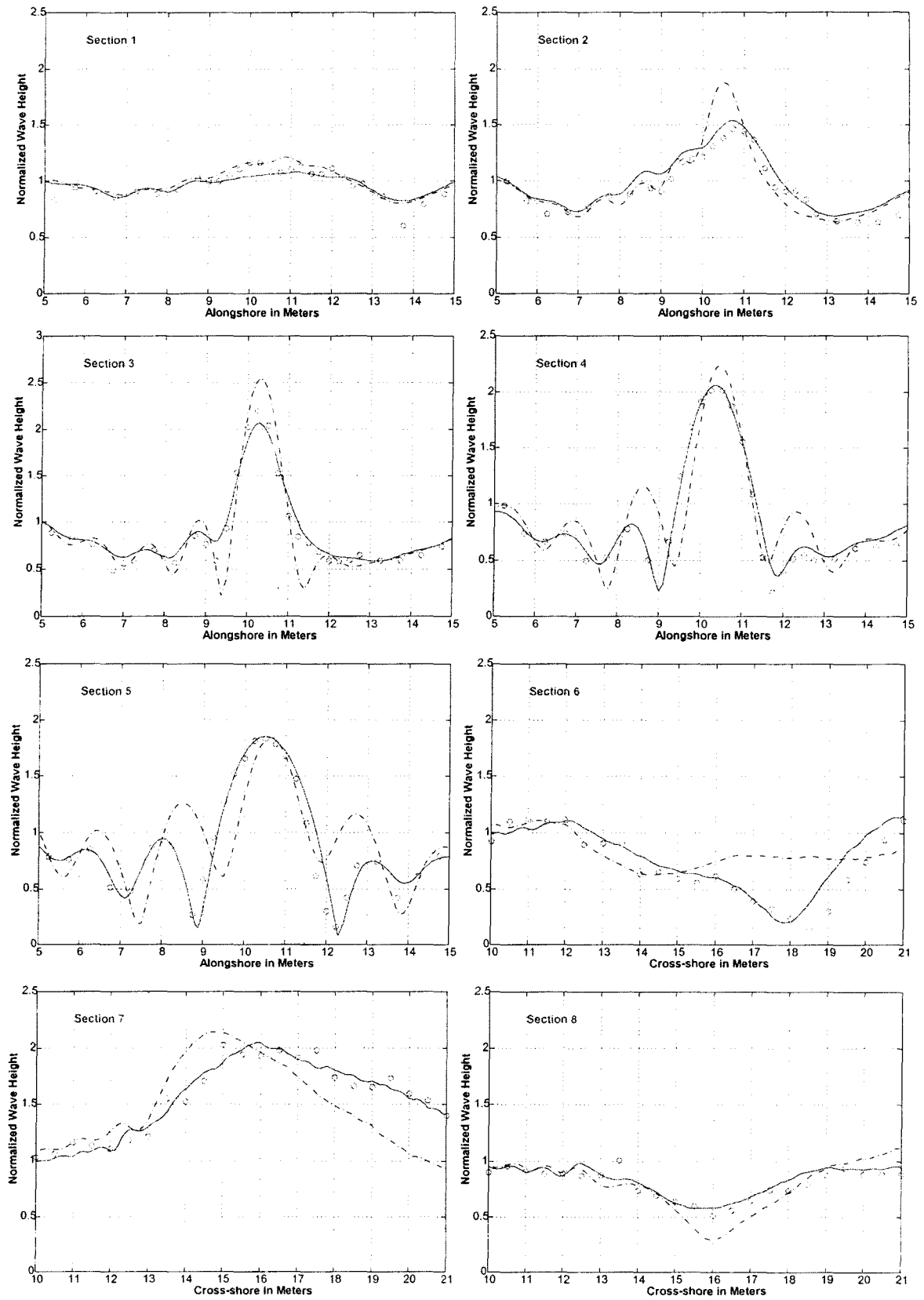


Fig. 4 Comparison among calculations of Maruyama and Kajima (1985) (dashed lines), calculations of present study (continuous lines), and experimental data of Berkhoff et al. (1982) (circle points)

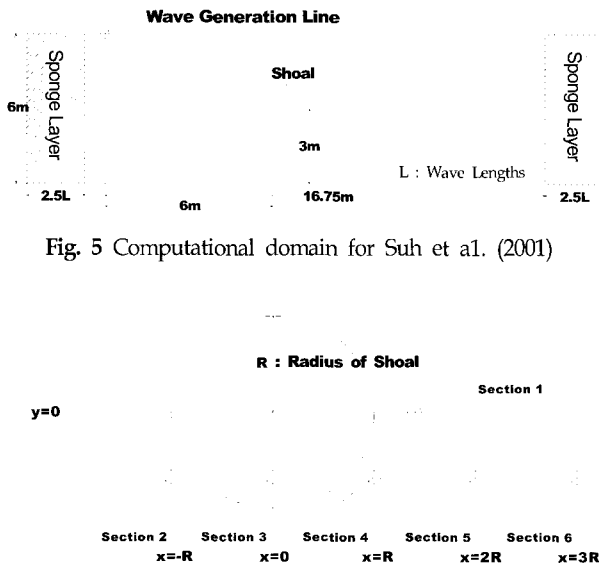


Fig. 5 Computational domain for Suh et al. (2001)

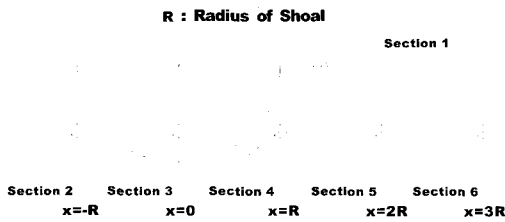


Fig. 6 Wave measurement transects

Fig. 7로부터 본 연구의 계산결과는 비교적 수리 실험 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 이에 반해 Maruyama and Kajima (1985)의 계산은 파가 집중되는 수조의 가운데 부분에서

는 수중천퇴 뒷부분에서 비교적 높게 파고를 예측하면서 (section 1) 측면에서는 오히려 실측치보다 매우 낮은 파고를 예측하는(section 3) 등 계산결과가 부정확하게 나타남을 알 수 있다.

이는 바닥의 경사 및 곡률의 영향이 중요한데 이들의 영향을 무시한 결과로 판단된다. 실제로 수중천퇴에서 멀리 떨어질수록 기존의 완경사 방정식에 의한 파랑계산 결과와 본 연구의 파랑계산 결과상의 차이가 점점 줄어들고 있음을 관찰할 수 있다(section 6).

이에 비해 본 연구에서는 바닥 경사의 제곱항과 바닥경사의 곡률항 등을 포함하고 있어 급변수심 지형에서도 비교적 정확하게 파랑변형을 계산할 수 있는 것으로 판단된다.

5. 결 론

본 연구에서는 기존의 완경사 방정식을 Hamiltonian principle이라는 수학적 기법을 이용하여 급변하는 수심과 비선형 파랑에 대해서 확장하여 새로운 형태의 파랑 방정식을 제안하였다. 이 때 얻은 방정식은 특정 조건 아래에서 기존의 수정 완경사 방정식 혹은 비선형 완경사 방정식 등과 일치하게 된다.

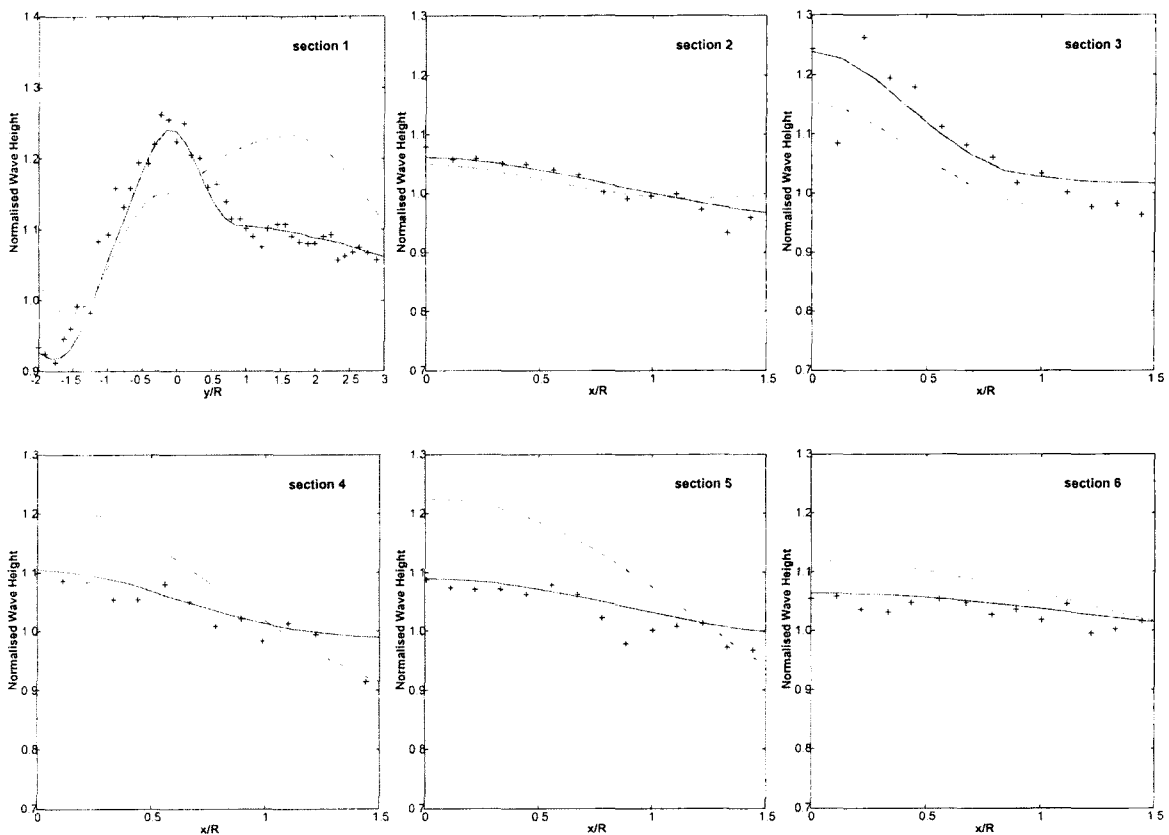


Fig. 7 Comparison among calculations of Maruyama and Kajima (1985) (dashed lines), calculations of present study (continuous lines), and experimental data of Suh et al. (2001) (cross points)

본 연구에서 개발한 방정식을 기존의 완경사 방정식인 Maruyama and Kajima(1985)의 방정식과 함께 수치 해석하여 Berkhoff et al. (1982) 및 Suh et al. (2001)의 수치실험결과와 비교 분석한 결과, 본 연구의 결과가 기존의 완경사 방정식보다 비선형 효과 및 급변 수심의 효과 등을 고려하여 전반적으로 수치실험의 결과와 보다 더 잘 일치하고 있었다.

후 기

동아대학교 지능형통합항만관리연구센터의 연구비 지원에 대해 감사드립니다.

참 고 문 헌

- 박정철 (1999). 흐름이 고려된 불규칙 파랑모델에 관한 연구, 박사학위 논문, 동아대학교 대학원
- 천제호 (2002). 수정완경사 방정식의 비선형 확장에 관한 연구, 석사학위 논문, 동아대학교 대학원
- Berkhoff, J.C.W. (1972). "Computation of Combined Refraction and Diffraction", Proc. 13rd Int'l Conf. on Coastal Eng. ASCE, pp 471-490.
- Berkhoff, J.C.W, Booij, N. and Radder, A.C. (1982). "Verification of Numerical Wave Propagation of Models for Simple Linear Wave", Coastal Eng., Vol 6, pp 225-279.
- Copeland, G.J.M. (1985). "A Practical Alternative to the Mild-Slope Wave Equation", Coastal Eng. Vol 9, pp 125-149.
- Isobe, M. (1994) "Time Dependent Mild Slope Equations for Random Waves", Proc. 24th Int'l Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp 285-299.
- Maruyama, K. and Kajima, R. (1985). Two Dimensional Wave Calculation Method Based on Unsteady Mild-Slope Equation, Report Electric Central Res. Inst. No. 384041(in Japanese).
- Kirby, J.T. and Misra, M.K. (1998). A Note on the Modified Mild-Slope Equation, CACR-98-07, Center for Applied Coastal Research, University of Delaware.
- Larsen, J. and Dancy, H. (1983). "Open Boundaries in Short Wave Simulations - A New Approach", Coastal Eng Vol 7, pp 285-297.
- Lee, J.L and Park, C.S. (2000). "Development of Weakly Nonlinear Wave Model and its Numerical Simulation", J. of Korean Soc. of Coastal and Ocean Engineers, Vol 12, No 4, pp 181-189.
- Massel, S.R. (1993). "Extended Mild-Slope Equation for Surface Waves", Coastal Eng., Vol 19, pp 97-126.
- Suh, K.D., Lee, C., Park, Y.-H. and Lee, T.H. (2001). "Experimental Verification of Horizontal Two-Dimensional Modified Mild-Slope Equation Model", Coastal Eng., Vol 44, pp 1-12.
- Radder, A.C. (1979). "On the Parabolic Equation Method for Water Wave Propagation", J.Fluid Mech., Vol 95, pp 159-176.
- Radder, A.C. (1999). Hamiltonian Dynamics of Water Waves, Advances in Coastal and Ocean Eng., Vol 4, World Scientific Publishing Co.

2003년 7월 24일 원고 접수

2004년 4월 2일 최종 수정본 채택