

오차 예측과 격자밀도 지도를 이용한 적응 Delaunay 격자생성방법

홍진태* · 이석렬* · 박철현* · 양동열*
(2003년 12월 31일 접수)

Adaptive Delaunay Mesh Generation Technique Based on a Posteriori Error Estimation and a Node Density Map

J. T. Hong, S. R. Lee, C. H. Park and D. Y. Yang

Abstract

In this study, a remeshing algorithm adapted to the mesh density map using the Delaunay mesh generation method is developed. In the finite element simulation of forging process, the numerical error increases as the process goes on because of discrete property of the finite elements and distortion of elements. Especially, in the region where stresses and strains are concentrated, the numerical error will be highly increased. However, it is not desirable to use a uniformly fine mesh in the whole domain. Therefore, it is necessary to reduce the analysis error by constructing locally refined mesh at the region where the error is concentrated such as at the die corner. In this paper, the point insertion algorithm is used and the mesh size is controlled by using a mesh density map constructed with a posteriori error estimation. An optimized smoothing technique is adopted to have smooth distribution of the mesh and improve the mesh element quality.

Key Words : Finite Element Mesh, Remeshing Scheme, Mesh Compression Method, Mesh Optimization, Smoothing

1. 서 론

소재의 대변형을 수반하는 소성가공공정의 유한 요소해석에서는 기본적으로 유한요소 자체의 이산적 특징에 의해 분석적 해와 오차가 발생한다. 특히, 응력이나 변형률이 집중되는 영역에서는 해석 오차가 급격히 발생하므로 이러한 영역에 적응하는 효율적이고 적절한 밀도 분포를 갖는 격자의 구성이 필요하다. 대부분의 소성변형이 표면에 집중되어있는 점에서 볼 때, 형상에 적응하는 격자의 구성만으로도 상당부분 해석오차가 줄어들기는 하나, 소재 내부의 유동 및 응력의 변화가 심한

예제의 경우는 해석오차를 피할 수 없다. 따라서, 해석오차를 고려하여 격자의 크기 및 분포를 제시⁽¹⁾하고, 그에 따라 최적의 분포 및 요소품질을 갖는 격자의 구성이 필요하다.

본 논문에서는, Zienkiewicz가 제안한 에너지 오차법⁽²⁻³⁾을 이용하여 격자 밀도 지도를 구한 후, 각 위치에서 격자밀도에 맞춰 절점을 생성하였으며, 격자구성 알고리즘은 일반적으로 강건하고, 구현이 쉬운 것으로 알려진 Constrained Delaunay 격자구성방법⁽⁴⁻⁶⁾을 이용하였다. 또, 행렬식 최적화 방법⁽⁷⁻⁹⁾을 이용하여 격자분포 및 요소의 품질을 향상시켰다.

* 한국과학기술원 기계공학과

2. 격자재구성 방법

2.1 격자재구성 알고리즘

본 연구에서 제안하는 격자재구성 과정은 Fig. 1과 같다. 즉, 격자 재구성이 판별되었을 때, 다음과 같은 순서로 격자를 재구성한다.

- step1. 그 단계에서 에너지 오차를 계산
- step2. 에너지 오차 예측법을 이용하여 적절한 격자 크기를 계산
- step3. 격자밀도 지도 구성
- step4. 형상경계면의 절점 재구성
- step5. 격자밀도지도에 적용하는 격자 구성
- step6. 최적화를 통한 격자유연화

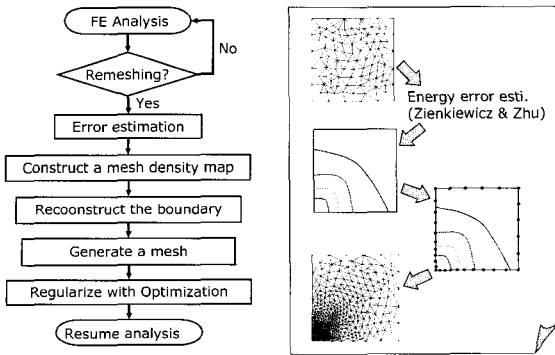


Fig. 1 Flow chart of a remeshing procedure

2.2 에너지오차 계산

강소성 유한요소해석에 이용되는 구성방정식은 식 (1)과 같으며, 식 (2)는 벌칙상수를 이용하여 강소성 유한요소해석에 적용한 식이다.⁽¹⁰⁾ 이전 단계의 요소들에서 계산된 유효 변형률 값을 식 (1)에 대입하여 유효 응력을 구한 후, 각 요소의 소성변형에너지(식 (3)) 및 소성변형에너지 오차(식 (4))를 정의할 수 있다. 식 (3),(4)로부터 에너지 오차는 식 (5)와 같이 정의된다.

$$\bar{\sigma} = C \hat{\varepsilon}^m \quad (1)$$

$$\sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega} (\bar{\sigma} + \alpha \Delta t \hat{\varepsilon} H') \delta \hat{\varepsilon} dV + K^* \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_i \delta \hat{\varepsilon}_i dV - \int_{S_f^m} (f_i + \alpha \Delta f_i) \delta v_i dS \right] = 0 \quad (2)$$

$$\|e\|_{ele}^2 = \int_{\Omega} (\bar{\sigma}' - \hat{\sigma}') : \left(\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}' \right) d\Omega \quad (3)$$

$$\|E\|^2 = \sum_{m=1}^M \|E\|_{ele}^2 = \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} (\hat{\sigma}' \hat{\varepsilon}_{ij} - p \hat{\varepsilon}_{kk}) d\Omega \quad (4)$$

$$\eta = \frac{\|e\|_{ele}}{\|E\|_{ele}} \leq \bar{\eta} \quad (5)$$

여기서, $\bar{\sigma}', \hat{\varepsilon}'$ 은 $\hat{\sigma}', \hat{\varepsilon}$ 을 요소의 절점 값으로 유연화시킨 후, 보간하여 구한 값이며, $\bar{\eta}$ 는 최대 허용 오차율이다.

식 (3),(4),(5)로부터 각 요소에서의 최대허용 오차는 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{e}_{max} = \bar{\eta} \frac{\|E\|}{\sqrt{M}} \quad (6)$$

여기서 M 은 전체 요소의 개수이다.

2.3 격자크기 결정 및 밀도지도 생성

전절에서 계산된 에너지 오차값으로부터 다음과 같이 새로운 요소의 크기를 결정하였다.

$$h^{new} = \frac{h_{elem}}{\xi_{elem}^{1/p}} \quad (7)$$

여기서, h_{elem} 은 현재 요소의 크기이며, ξ_{elem} 은 최대 허용 오차와 현재 요소의 에너지 오차의 비율로 다음과 같이 정의된다.

$$\xi_{elem} = \frac{\|e\|_{elem}}{\bar{e}_{max}} \quad (8)$$

위에서 구한 h^{new} 는 요소의 크기로 길이를 의미하므로 2 차원에서는 면적을, 3 차원에서는 부피를 의미할 수 있도록 다음과 같이 격자의 밀도를 구한다.

$$D_i = \frac{1}{(h_i^{new})^n} \quad (9)$$

여기서, n 은 차원 수를 의미한다. 위에서 구해진 격자의 밀도를 Fig. 2와 같이 각 요소의 위치에 저장한 후, 새로운 격자 구성 시, 보간법을 통하여 구해진 밀도값(D_m)에 맞게 격자를

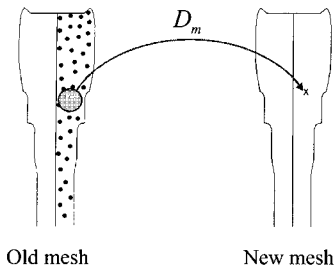


Fig. 2 Construct a density map

구성하였다.

$$D_m = \sum_{i=1}^{neighbour} W_i D_i \quad (10)$$

여기서, W_i 는 새로 구성될 격자의 위치와 기존 절점들과의 거리에 대한 가중치이다.

2.4 경계면 절점 재구성

전절에서 구해진 격자 밀도지도를 이용하여 격자를 재구성하는 첫 단계로 경계면의 절점을 밀도에 맞게 재구성할 필요가 있다. Fig.3은 경계면 절점 재구성 과정을 보여주며, 다음과 같다.

- Step1. 경계면 모서리 길이와 밀도 쌍을 구한다.
- Step2. 모서리길이 vs. 목표 요소크기(h^{new}) 좌표에 사상시킨다.
- Step3. 최소자승법을 이용한 모서리길이 재구성
- Step4. 재구성된 모서리길이와 밀도 쌍을 원래의 경계면 형상에 사상시킨다.

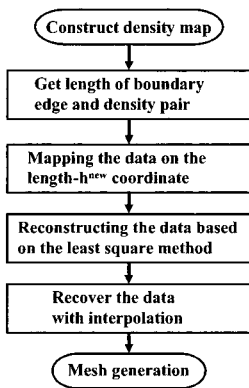


Fig. 3 Flowchart of boundary reconstruction

우선, Fig. 4와 같이 기존 격자의 경계(boundary)에서 모서리길이($m_pOX[i]$)와 중심에서의 밀도를 구한 후식 (11)), Fig. 5와 같이 좌표축에 표현한다. 여기서, h^{new} 는 밀도값(D)을 알고 있으므로, 식 (9)를 이용하여 구한다.

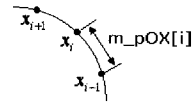


Fig. 4 Schematics of getting edge length and density

$$m_pOX[i] = \sqrt{(x[i] - x[i-1])^2 + (y[i] - y[i-1])^2} \quad (11)$$

$$m_pD[i] = \sum D_i x_i$$

여기서 구해진 곡선은 식 (12)를 이용하여 모서리길이를 재구성한다. 즉, Fig. 6과 같이 곡선과 x축이 이루는 면적이 한 변의 길이가 x^{new} 인 정사각형의 넓이와 같아지는 x^{new} 를 새로운 모서리 길이로 설정하는 방식으로 x축을 재구성한다.

$$\int_0^x f(x)dx = x^2 \quad (12)$$

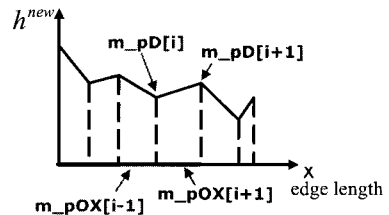


Fig. 5 Mapping on the edge length-density coordinate

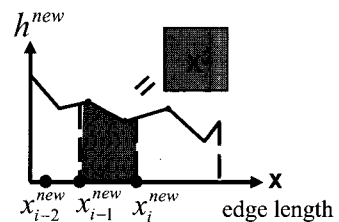


Fig. 6 Reconstruction of the edge length

재구성된 경계면 모서리길이 좌표(x_j^{new})의 이전 모서리길이 좌표($m_pOX[i]$)에 대한 상대위치를 2차 보간법을 이용하여 구한 후, Fig. 7과 같이 상대위치에 따라 식 (13)을 이용하여 원래의 경계면에 사상하면 경계면의 절점이 재구성된다.

$$x_i^{new} = \sum_{i=1}^3 h_i(r)x_i \quad \text{where} \quad \begin{cases} h_1 = (1-r) - 2r(1-r) \\ h_2 = 4r(1-r) \\ h_3 = r - 2r(1-r) \end{cases} \quad (13)$$

$$y_i^{new} = \sum_{i=1}^3 h_i(r)y_i$$

$$\text{where } r = \frac{m_pOX[i+1] - m_pOX[i]}{m_pOX[i+2] - m_pOX[i]}$$

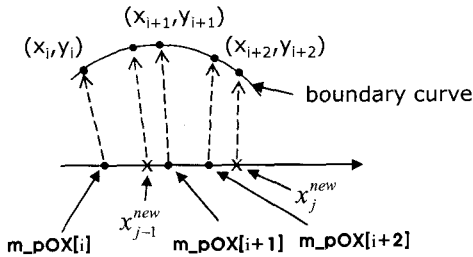


Fig. 7 Recover boundary with reconstructed data

2.5 격자구성 및 최적화

전절에서 구성된 밀도지도 및 경계면 절점들을 이용하여 일반적으로 강건하고, 구현이 쉬운 것으로 알려진 Constrained Delaunay 방법으로 격자를 구성하였다. 먼저 경계삼각망(convex hull)을 구성한 후, 절점을 추가할 위치는, 절점이 추가될 삼각형(또는 사면체)의 각 절점에서 구한 밀도비의 가중치를 적용하여 결정하는 방법을 제안하기로 한다.

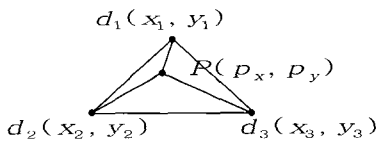


Fig. 8 Point insertion method

즉, Fig. 8에서 추가될 절점 p의 위치는 식 (14)과 같이 밀도가중내적법(density-weighted inner product)을 이용하여 계산된다.

$$p_x = \frac{\sum d_i x_i}{\sum d_i}, p_y = \frac{\sum d_i y_i}{\sum d_i} \quad (14)$$

위에서 구성된 격자는 요소의 모양이 좋지 않으므로, 해석의 정확성과 수렴성 향상을 위하여 최적화를 통해 격자의 분포 및 모양을 향상시켜야

하며, 본 연구에서는 Brackbill 등⁽¹¹⁾이 제안한 매끄러움(smoothness) 유연화 방법을 이용하여 다음과 같이 적용하였다.

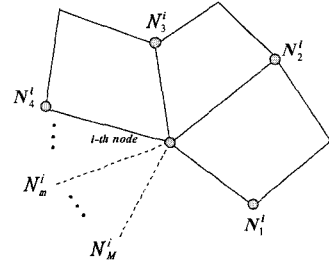


Fig. 9 boundary node set of i-th internal node

Fig. 9는 내부의 한 절점과 이웃하고 있는 절점 간의 관계를 보여준다. 절점번호가 i인 절점의 위치는 (x^i, y^i) 이다. 이 절점과 이웃하고 있는 절점들을 반시계방향으로 순열시킨다.

$$S^i = \{N_1^i, N_2^i, \dots, N_m^i, \dots, N_M^i\} \quad (15)$$

$$N_{M+1}^i = N_1^i$$

절점 N_m^i 와 N_{m+1}^i 의 위치를 각각 (x_m^i, y_m^i) , (x_{m+1}^i, y_{m+1}^i) 이라 하면, 야코비안(Jacobian)행렬 (J_m^i)은 식 (16)과 같이 정의되며, 매끄러움(Smoothness) 범함수는 식 (17)과 같이 절점 i에서의 야코비안(Jacobian) 행렬의 조건수(f)의 함으로 표현되고, 야코비안(Jacobian) 행렬의 특이성을 최소화 시키는 방향으로 최적화를 수행하여 격자의 품질을 향상시키게 된다.

$$J_m^i = \begin{bmatrix} e_m^i & e_{m+1}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m^i - x^i & x_{m+1}^i - x^i \\ y_m^i - y^i & y_{m+1}^i - y^i \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\min f = \min \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{1}{2} \|J_m^{-1}\| \|J_m\| \right\} \quad (17)$$

여기서, $\|J_m\|$ 은 Frobenius norm을 의미하며, 결국, 식 (17)의 물리적 의미는 면적에 대한 길이 차승의 합의 되므로, 절점 i가 이웃하는 절점들과의 거리는 최대한 같아지는 방향으로, 절점들과 이루는 각은 최대한 균등한 방향으로 최적화 된다는 것을 뜻하게 된다. 또한, 특히 야코비안(Jacobian) 행렬을 최대한 억제시킨다는 의미에서, Oddy's

metric과 매우 유사하다.

최적화 방법은 헤시안(Hessian)행렬을 구하는 뉴턴(Newton) 방법을 사용하였다.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (18)$$

수렴조건은 다음과 같다.

$$\delta_n < 1.0^{-6}, \delta_n = \sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2} \quad (19)$$

3. 격자재구성 결과

전절에서 제시한 격자재구성 방법을 이용하여 2 가지 2 차원 예제에 대하여 테스트 해보았다.

3.1 중공강판 인장 예제

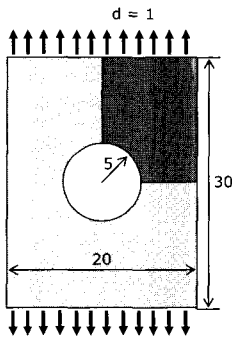


Fig. 10 Modeling of plate hole

Fig. 10은 인장하중을 받는 중공강판을 모델링한 예이다. 형상과 응력분포가 1/4대칭이므로 1/4형상으로 해석을 수행하게 된다. 특히 본 예제는 탄성 예제이므로 구성방정식은 식 (20)을 이용하였으며, 2.2절에 제시된 방법을 이용하여 초기 격자에 대한 에너지오차를 구하고, 격자밀도의 분포를 계산하여 등고선으로 표현하면 Fig. 11과 같다.

$$\sigma = E\epsilon \quad (20)$$

Fig. 11의 격자밀도 분포를 이용하여 격자를 구성하면 Fig. 12와 같다.

여기서, Case 1은 이전 형상데이터만을 이용하여

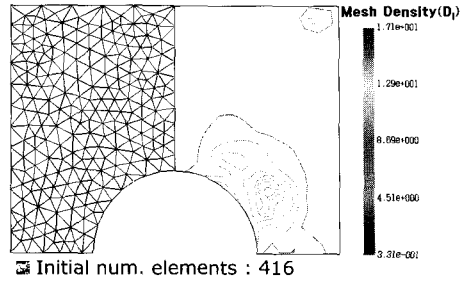


Fig. 11 Description of desired mesh density(plate hole)

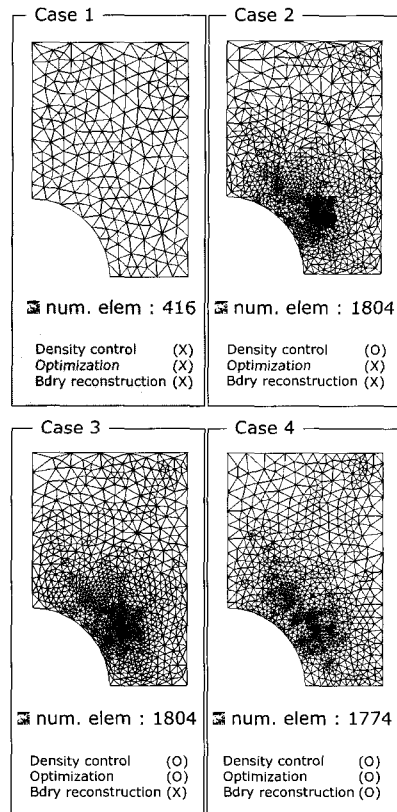


Fig. 12 Comparison the distribution of mesh

격자를 재구성한 경우이고, case 2는 격자밀도 분포 지도를 이용하여 내부 격자를 재구성한 경우이며, case 3은 case 2 이후 최적화를 수행한 경우이고, case 4는 격자밀도 분포지도에 맞게 경계면 절점을 재구성 한 후, 내부 격자를 재구성 하고 최적화를 수행한 경우이다. Case 4에서는 경계면 절점을 재구성하고 내부격자를 구성함으로써, 최적화를 통한 격자 유연화가 쉽게 이루어졌으며, Fig. 13과 같이 전체적으로 좋은 품질을 갖는 요소를

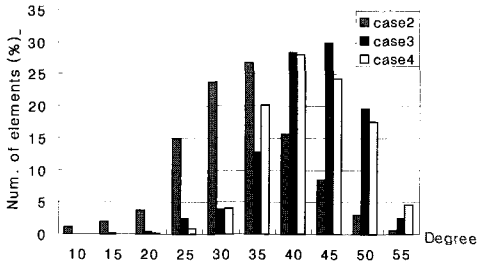


Fig. 13 Comparison the distribution of dihedrals (Plate hole)

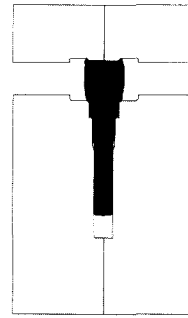


Fig. 15 Modeling of pin forging

구성할 수 있었다.

목표 격자밀도지도에 적용된 격자가 재구성되었는지 확인하기 위하여 격자의 목표 밀도분포와 재구성된 격자의 밀도분포를 비교해보면, Fig. 14와 같다. Fig. 14의 왼쪽 그림이 목표 격자밀도 분포이며, 오른쪽 그림이 재구성된 격자의 밀도 분포이다. 그림에서 볼 수 있듯이 재구성된 격자밀도 분포가 목표 밀도분포와 유사한 경향의 분포를 보임을 알 수 있다.

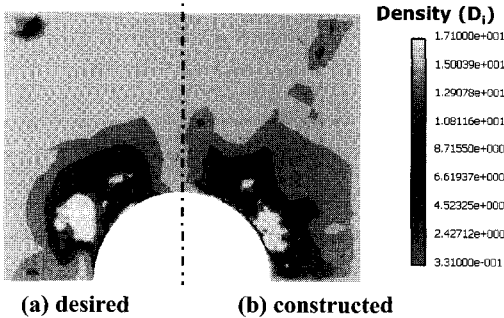


Fig. 14 Comparison the contour of desired mesh density and constructed mesh density (Plate hole)

3.2 Pin 단조 예제

Fig. 15는 Pin 제품의 냉간 단조공정을 모델링한 것이다. 해석에 이용된 소재는 S45C이며, $C=97.02$, $n=0.14$ 이다. 해석 중간에 격자재구성이 판별 되었을 때, 에너지오차를 이용한 격자밀도의 분포를 등고선으로 표현하면 Fig. 16과 같다.

Fig. 16의 격자밀도 분포를 이용하여 격자를 구성하면 Fig. 17과 같다. 중공강관 예제와 마찬가지로 pin예제에서도 Case 4에서 경계면 절점을 재구성하고 내부격자를 구성함으로써, 최적화를 통한 격자 유연화가 쉽게 이루어져서 Fig. 19와 같이 전

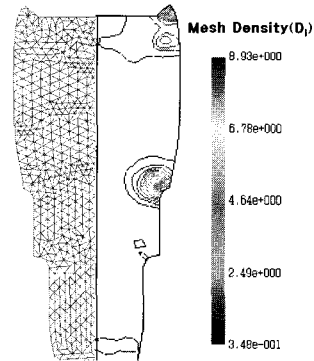
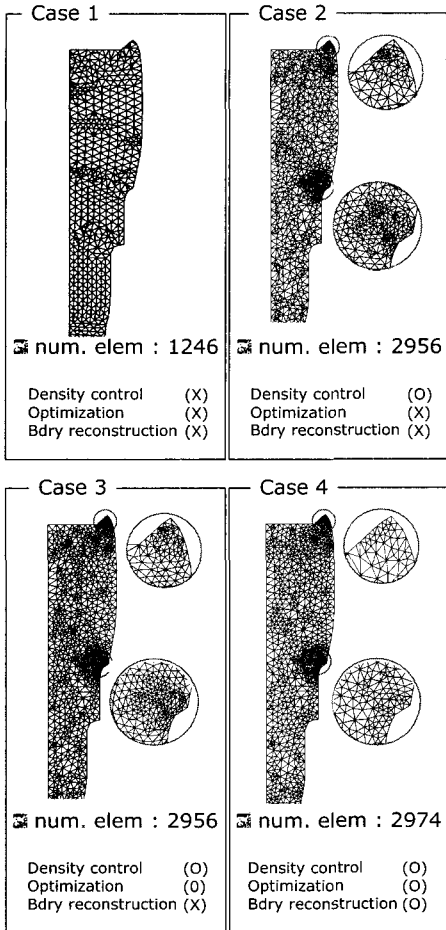


Fig. 16 Description of desired mesh density(pin)

체적으로 좋은 품질을 갖는 요소를 구성할 수 있었다. 격자의 목표 면적밀도 분포와 재구성된 격자의 면적밀도 분포의 비교그림은 Fig. 18과 같다. Fig. 18의 왼쪽 그림이 목표 격자밀도 분포이며, 오른쪽 그림이 재구성된 격자의 밀도 분포이다. 그림에서 볼 수 있듯이 재구성된 격자밀도 분포가 목표 밀도분포와 유사한 경향의 분포를 보임을 알 수 있다.

이상의 두 예제에서, 에너지 오차를 이용하여 구성된 격자 밀도에 맞추어 Delaunay 방법으로 격자를 재구성 하였으며, 구성된 격자의 밀도와 목표밀도의 비를 식 (21)을 이용하여 Table 1에 표시 하였으며, 비교적 잘 적응하였음을 알 수 있다. 구성된 격자의 면적밀도 분포에서 부분적으로 보이는 특이현상은 격자 자체의 불연속적인 특성에 의한 한계 때문에 계산상에 오차가 발생하는 문제로 격자구성 후에, 격자밀도에 맞게 절점을 재배치시킴으로써 완화시킬 수 있다.

$$ratio = \frac{Constructed_mesh_density}{Desired_mesh_density} \quad (21)$$



(a) desired (b) constructed

Fig. 17 Comparison the distribution of mesh

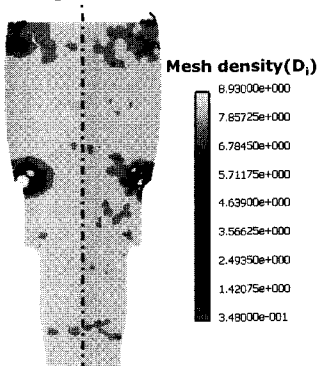


Fig. 18 Comparison the contour of desired mesh density and constructed mesh density (Pin)

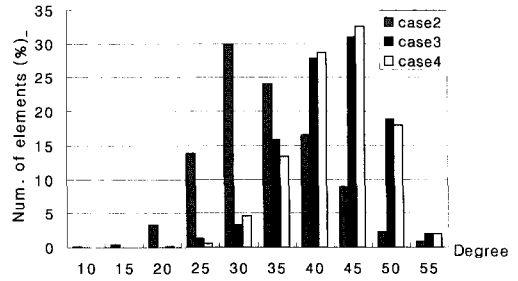


Fig. 19 Comparison the distribution of dihedrals(Pin)

Table 1 Distribution of mesh adaptive to mesh density

ratio	Percentage of Element	
	Plate Hole	Pin
0.0 ~ 0.1	0.0 %	0.0 %
0.1 ~ 0.2	0.0 %	0.0 %
0.2 ~ 0.3	0.0 %	0.0 %
0.3 ~ 0.4	0.0 %	0.0 %
0.4 ~ 0.5	0.0 %	0.08 %
0.5 ~ 0.6	1.0 %	0.4 %
0.6 ~ 0.7	7.2 %	3.8 %
0.7 ~ 0.8	22.6 %	18.1 %
0.8 ~ 0.9	28.5 %	32.9 %
0.9 ~ 1.0	18.5 %	22.24 %
1.0 ~	22.2 %	22.48 %

4. 결론

본 연구에서는 Delaunay 방법을 이용한 격자재 구성 시, 해석의 정확도를 높이기 위해 에너지 오차방법을 이용하여 적절한 격자크기를 구하고, 그로부터 격자밀도지도를 구성하였다. 구성된 격자밀도지도에 맞추어 적절한 분포로 경계면 절점을 재구성하였으며, 내부 격자도 격자밀도에 맞게 Delaunay 방법을 이용하여 구성하였다. 또, 요소의 밀도차가 심한 격자에서 전체적인 요소의 품질을 향상시키기 위하여 최적화 방법을 적용하였다.

2 차원 예제들의 테스트 결과를 통해, 목표 격자 밀도분포와 비슷한 분포를 갖는 격자를 구성하였다.

밀도분포의 차이는 삼각형 요소 자체의 이산적 특성에 의한 한계도 있으나, 세분화를 통해 개선

해야 한다. 또, 격자밀도 차이가 심한 영역의 부드러운 분포 및 더 정확한 격자구성을 위하여 다양한 유연화 방법 및 세분화 방법이 적용되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

- (1) H. Okuda, T. Yashiki and G. Yagawa., 1997, "Three-dimensional finite element adaptive analysis of incompressible flow based on control of node density distribution and a posteriori error estimation", *Adv Eng. Softw*, Vol. 28, pp. 173~187.
- (2) O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu., 1987, "A simple error estimate and adaptive procedure for practical engineering analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.24, pp. 337~357.
- (3) 박근, 양동열, 1998, "강소성 유한요소해석에서의 사후오차추정 및 적응적 격자세분화에의 적용", *대한기계학회학회지*, Vol.22, No.7, pp. 1278~1286.
- (4) P. Chew., 1987, "Constrained Delaunay triangulation", ACM, New York
- (5) T. J. Baker., 1989, "Automatic mesh generation for complex three-dimensional regions using the constrained Delaunay triangulation", *Eng. Comput.* Vol. 5, pp. 161~175.
- (6) S. W. Sloan., 1993, "A fast algorithm for generating constrained Delaunay triangulations", *Comput. Struct.*, Vol. 47, Issue. 3, pp. 441~450.
- (7) P. M. Knupp., 2000, "Achieving finite element mesh quality via optimization of the Jacobian matrix norm and associated quantities Part I-a framework for surface mesh optimization", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 48, pp. 401~420.
- (8) P. M. Knupp., 2000, "Achieving finite element mesh quality via optimization of the Jacobian matrix norm and associated quantities Part II-a framework for volume mesh optimization and the condition number of the Jacobian matrix", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 48, pp. 1165~1185.
- (9) 홍진태, 이석렬, 양동열, 2003, "격자압축을 이용해 구성된 격자의 효과적인 격자유연화 방법", *한국소성가공학회 춘계학술대회논문집*, pp. 331~334.
- (10) J. H. Yoon and D. Y. Yang., 1988, "Rigid-plastic finite element analysis of three-dimensional forging by considering friction on continuous curved dies with initial guess generation", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 30, pp. 887~898.
- (11) J. Brackbill and J. Saltzman., 1982, "Adaptive zoning for singular problems in two dimensions", *J. Comput. Phys.*, Vol. 46, pp. 342~368.