

Pseudospectral Legendre법을 이용한 근접 최적 제어

이대우*, 조겸래*

Neighboring Optimal Control using Pseudospectral Legendre Method

Dae-Woo Lee[#] and Kyeum-Rae Cho^{*}

ABSTRACT

The solutions of neighboring optimal control are typically obtained using the sweep method or transition matrices. Due to the numerical integration, however, the gain matrix can become infinite as time go to final one in the transition matrices, and the Riccati solution can become infinite when the final time free. To overcome these disadvantages, this paper proposes the pseudospectral Legendre method which is to first discreteize the linear boundary value problem using the global orthogonal polynomial, then transforms into an algebraic equations. Because this method is not necessary to take any integration of transition matrix or Riccati equation, it can be usefully used in real-time operation. Finally, its performance is verified by the numerical example for the space vehicle's orbit transfer.

Key Words : Neighboring Optimal Control(근접 최적제어), Two-Point Boundary Value Problem(2-지점 경계값 문제), global orthogonal polynomial Polynomial(전직교 다항식), Pseudospectral Legendre Method, Legendre-Gauss-Lobatto, Linear Algebraic Equations(선형 대수방정식)

1. 서 론

기준궤적으로부터의 작은 섭동을 다루는 많은 피드백 제어기법 중에서 근접 최적 제어(NOC: Neighboring Optimal Control) 법칙은 다양한 유도제어문제에 사용되어 왔다.

Bryson 등의 연구자들¹⁻³에 의해 처음으로 발표되면서 저추력 궤적⁴의 유도제어 문제나 발사 시스템과 같은 분야에 많이 사용되어 왔다.

근접 최적 제어의 기본 개념은 기준궤적 근방의 최종구속조건과 미분 구속조건의 1차 확장을 만족

하며 성능지수의 2차 확장을 최소화함으로 기준 최적궤적으로부터의 편향을 제어하는 것으로 설명된다. 이러한 접근으로부터 시변 이득(time varying gain)을 갖는 선형 상태 섭동 피드백(linear state perturbation feedback) 제어법칙이 얻어지게 된다. 피드백 이득 행렬의 전형적인 해법은 천이행렬이나 Riccati 미분 방정식을 푸는 방법으로 backward sweep method를 이용해 구해지는데 이러한 이득 취득방법은 계산상, 시간상 많은 노력이 요구되며, 또한 상태변수들 중에 하나에 hard constraint만 부과되거나 또는 최종시간이 자유일 경우 이득행렬의

접수일: 2004년 03월 13일; 게재승인일: 2004년 4월 9일

교신저자, 부산대학교 항공우주공학과

E-mail baenggi@pusan.ac.kr Tel. (051) 510-2329

* 부산대학교 항공우주공학과

값이 무한대로 될 수가 있는 문제점을 안고 있다. 이러한 문제에 대한 해법으로 time-to-go나 min-distance guidance 등이 제안^{5,6}되어 왔다. 최근에는 Ping Lu⁷가 정밀한 대기권 진입유도를 위해 직접 선형 2차 문제를 푸는 방법을 기초로 한 receding-horizon 유도시스템을 제안하였다. 하지만 이 방법은 상태에 대한 고차의 제어법칙을 차례로 구해야 하는 단점을 지니고 있다. 근래에 들어 최적화 문제의 해를 빠르게 구할 수 있는 pseudospectral법⁸이 발표되고 있는데, 이것은 Legendre나 Chebyshev와 같은 전직교 다항식(global orthogonal polynomial)을 상태변수와 제어변수의 대략화(approximation)에 이용하는 방법이다. 이것을 2차 가격함수를 갖는 선형 시변 시스템에 적용시키면 선형 2-지점 경계치 문제(TPBVP: Two-Point Boundary Value Problem)를 이산화된 대수방정식의 선형시스템의 형태로 전환할 수가 있게 된다. 따라서 이렇게 구하여진 근사 해석 피드백 법칙은 Riccati 미분방정식의 적분이나 어떠한 반복계산(iteration)이 없이 쉽게 얻어지게 된다.

본 논문에서는 최종시간의 관한 항만 가지는 가격함수의 최적제어 문제에 적용을 위해 pseudospectral법을 NOC에 접목시켜 실시간 적용 가능한 제어법칙을 개발하는데 그 목적이 둔다.

2. Pseudospectral Legendre (PSL) 근사법

최적화 알고리즘은 간접법과 직접법으로 분류 할 수 있는데, 간접법은 Pontryagin's 최소원리로부터 유도되며 본질적으로 작은 반경의 수렴성과 최적조건 유도에 많은 수고를 요구하는 단점을 지니는 반면에 직접법은 시간, 상태, 제어변수에 노드(node)라는 포인트를 정의하여 최적제어문제를 파라메타 최적제어로 이산화 하여 생성된 NLP(Nonlinear Programming)를 계산함으로서 그 해를 구하는 방법이다. 이렇게 구해진 이산화 결과의 제어와 상태변수의 시간변화는 보간법(interpolation)을 통해 구할 수 있으며 상태 미분 방정식을 부과하기 위하여 Hermite-Simpson, trapezoidal과 같은 적분법을 이용한다. 일반적으로 상태, 제어변수의 근사화를 위해 미리 정의된 부간격 사이는 collection 기법인 piecewise continuous polynomial을 사용하는데, 본 연구에서는 다양한

solver에 의해 풀어지고 NLP로 전사가능하고 복잡한 문제에서도 상대적으로 넓은 반경의 수렴성을 갖고 필요조건에 의존할 필요가 없는 Legendre polynomial(LP)과 같은 global orthogonal polynomial⁹을 이용하고자 한다. 이들 polynomial은 유체역학 문제를 풀기 위한 spectral법^{8,9}에 늘리 이용되어 왔으나, 본 연구에서는 최적제어문제로의 적용을 위해 NLP 문제로의 변환과 더불어 이것을 이용한 실시간 NOC 제어법칙을 개발하고자 한다. LP를 이용한 PSL 근사법⁸에 관한 연구는 몇몇 연구자들에 의해 진행중에 있으며 기본 아이디어는 각 노드에서 상태, 상호상태, 제어함수의 polynomial 근사값들을 찾는 것이다. 그 다음 2차 criteria를 갖는 LTV 시스템은 대수방정식을 푸는 문제로 간략화 하여 이 대수방정식을 기초로 해석적 제어법칙을 유도하는 것이다. LP를 이용한 방법의 노드는 최소자승법 관점에서 작은 오차를 제공하는 장점을 가진 LGL(Legendre-Gauss-Lobatto) 포인트를 사용하는데, 이것은 시스템의 시간간격을 식 (1)과 같이 [-1,1]로 전사하여 계산하게 된다.

$$\begin{aligned} t &\in [t_0, t_f] = [-1, 1] \\ \tau &= \frac{(\tau_f - \tau_0)t + (\tau_f + \tau_0)}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

L_N 이 N 자유도 LP이라고 두면 t_i 은 $t_0 = -1$, $t_f = 1$ 을 만족하는 LGL 포인트이며, $1 \leq l \leq N-1$ 에 대하여 L_N 은 0의 값을 갖는다. 가격 함수 적분은 LGL 2차 적분법에 의해 수행되지만 근사 상태벡터의 시간 미분값은 미분행렬을 사용하여 식 (2)와 같이 각 LGL 포인트에서 근사 상태값으로 표현한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^N(t) &= \sum_{l=0}^N \mathbf{x}(t_l) \phi_l(t) \\ \mathbf{u}^N(t) &= \sum_{l=0}^N \mathbf{u}(t_l) \phi_l(t) \\ \lambda^N(t) &= \sum_{l=0}^N \lambda(t_l) \phi_l(t) \end{aligned} \quad (2)$$

N 차 Lagrange Polynomial 함수

$$\phi_l(t) = \frac{1}{N(N+1)L_N(t_l)} \frac{(t^2 - 1)L_N(t)}{t - t_l} \quad (3)$$

는 Kronecker delta

$$\phi_{lk}(t_k) = \delta_{lk} = \begin{cases} 1, & \text{if } l=k \\ 0, & \text{if } l \neq k \end{cases} \quad (4)$$

를 만족하므로 결과적으로

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^N(t_l) &= \mathbf{x}(t_l), \\ \mathbf{u}^N(t_l) &= \mathbf{u}(t_l), \\ \lambda^N(t_l) &= \lambda(t_l) \end{aligned} \quad (5)$$

이 성립된다. 상태방정식의 근사화를 위해 식 (5)가 각 노드에서 미분방정식을 만족한다는 조건을 부과한다. 각 노드 t_k 에서 상태변수와 상호상태변수의 시간미분을 상태변수와 상호상태변수로 표현하기 위해 식 (2)를 미분하면

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^N(t_k) &= \sum_{l=0}^N \phi_{lk}(t_k) \mathbf{x}(t_l) = \sum_{l=0}^N D_{kl} \mathbf{x}(t_l) \\ \lambda^N(t_k) &= \sum_{l=0}^N \phi_{lk}(t_k) \lambda(t_l) = \sum_{l=0}^N D_{kl} \lambda(t_l) \end{aligned} \quad (6)$$

을 얻게되고 D_{kl} 는 $(N+1) \times (N+1)$ 의 크기를 갖는 미분행렬이다.

3. 근접최적 제어(NOC)의 실시간 이용을 위한 제어법칙의 설계

실시간 적용을 위해 먼저 NOC의 이론으로부터 선형 TPBVP를 유도한 후, PSL 근사법을 이용해 시스템을 이산화 하여 선형대수방정식으로 전환하는 차례를 따르게 된다. 이 식으로부터 상태변수와 상호상태변수는 해석적 방법으로 구할 수 있으며, 제어변수는 필요최적조건으로부터 구할 수 있다. 이와 같은 방법은 적분이나 천이행렬의 생성 또는 Riccati 방정식을 푸는 것 없이 해를 구할 수 있어 실시간 시스템 적용에 효과적일 것이다.

3.1 Nominal Optimal Trajectory

다음과 같은 최적제어문제를 고려하면

$$\mathcal{J}[u] = \phi[\mathbf{x}(\tau_f), \tau_f] \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = f[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] \quad (8)$$

$$\mathbf{x}(\tau_0) = \mathbf{x}_0, \quad \phi[\mathbf{x}(\tau_f), \tau_f] = 0 \quad (9)$$

여기서, $\tau \in [\tau_0, \tau_f]$, $\mathbf{x}(\tau) \in R^n$, $\mathbf{u}(\tau) \in R^m$. 해밀토니안과 보조함수는 각각 식 (10), 식 (11)과 같이 정의되며 $\lambda(\tau)$ 는 상호상태변수, ν 는 상수인 라그랑지곱수이다.

$$H = \lambda^T(\tau) f[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)] \quad (10)$$

$$\Phi[\mathbf{x}(\tau_f), \tau_f, \nu] = \phi + \nu^T \varphi \quad (11)$$

최적제어를 위한 필요조건은 상호상태 방정식

$$\lambda = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (12)$$

과 제어 방정식

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (13)$$

이며 최종시간이 고정된 경우의 transversality 조건인 식 (14)를 만족해야 한다.

$$\lambda(\tau_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}|_{\tau_f} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + \nu_f^T \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\tau_f} \quad (14)$$

최종 경계조건과 transversality 조건으로부터 통합 조건인 식 (15)를 구할 수 있다.

$$\Phi[\mathbf{x}(\tau_f), \lambda(\tau_f)] = 0 \quad (15)$$

3.2 고정된 최종시간을 갖는 근접 최적 제어

초기와 최종조건에서의 작은 섭동에 의해 생성되는 기준궤적으로부터의 섭동들은 식 (8-9), (12-13), 그리고 (15)에 의해 얻어진 방정식의 지배를 받는데 이 때 상태방정식

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x} &= f_x \delta \mathbf{x} + f_u \delta \mathbf{u} \\ \delta \lambda &= -H_{xx} \delta \mathbf{x} - f_x^T \delta \lambda - H_{xu} \delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (16)$$

과 제어 최적 조건

$$0 = H_{uu} \delta \mathbf{u} + f_u^T \delta \lambda + H_{uu} \delta \mathbf{u} \quad (17)$$

과 초기조건

$$\delta \mathbf{x}(\tau_0) = \delta \mathbf{x}_0 \quad (18)$$

과 최종시간에 대한 통합조건

$$[\psi_x \delta \mathbf{x} + \psi_\lambda \delta \lambda]_{\tau_f} = 0 \quad (19)$$

으로 표현될 수 있다. H_{uu} 는 $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_f$ 에 대해 정칙(nonsingular)일 때

$$\delta u = -H_{uu}^{-1}(H_{ux}\delta x + f_u^T\delta \lambda) \quad (20)$$

로 정리된다. 다시 말해, 식 (16-19)들은 선형 TPBVP의 형태로 정식화된다. 식 (20)을 식 (16)에 대입하면

$$\begin{aligned} \delta x(\tau) &= A(\tau)\delta x(\tau) + B(\tau)\delta \lambda(\tau) \\ \delta \lambda(\tau) &= -C(\tau)\delta x(\tau) - A^T(\tau)\delta \lambda(\tau) \end{aligned} \quad (21)$$

이며 여기서,

$$\begin{aligned} A(\tau) &= f_x - f_u H_{uu}^{-1} H_{ux} \\ B(\tau) &= -f_u H_{uu}^{-1} f_u^T \\ C(\tau) &= H_{xx} - H_{xu} H_{uu}^{-1} H_{ux} \end{aligned} \quad (22)$$

3.3 LP 근사법의 NOC로의 적용

LP법을 NOC로 적용시키는 궁극적 목표는 LP법을 이용한 선형 대수 방정식의 유도이며 이것은 최종적으로 초기상태를 이용하여 제어 법칙을 유도하는 문제로 귀결된다. 먼저, LP법으로 상태, 상호상태, 제어변수와 그들의 시간미분을 작은 섭동에 관한 것들로 표현하면

$$\begin{aligned} \delta x^N(t_i) &= \delta x(t_i) = a_i \\ \delta u^N(t_i) &= \delta u(t_i) = b_i \\ \delta \lambda^N(t_i) &= \delta \lambda(t_i) = c_i \end{aligned} \quad (23)$$

$$\delta x^N(t_k) = \sum_{l=0}^N D_{kl} a_l, \quad \delta \lambda^N(t_k) = \sum_{l=0}^N D_{kl} c_l \quad (24)$$

$$D_{kl} = \begin{cases} \frac{L_N(t_k)}{L_N(t_l)} \frac{1}{t_k - t_l}, & k \neq l \\ -\frac{N(N+1)}{4}, & k = l = 0 \\ \frac{N(N+1)}{4}, & k = l = N \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (25)$$

선형 TPBVP를 대수방정식으로 전환하면 영벡터 0를 포함한

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^N D_{kl} a(t_l) - \frac{\tau_f - \tau_0}{2} [A(t_k) a(t_k) + B(t_k) c(t_k)] &= 0 \\ \sum_{l=0}^N D_{kl} c(t_l) + \frac{\tau_f - \tau_0}{2} [Q(t_k) a(t_k) + A(t_k)^T c(t_k)] &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

이 되며 상태와 상호상태행렬을 식 (27)로 두고,

$$\begin{aligned} X &= [a_0^T, a_1^T, \dots, a_N^T]^T \\ A &= [c_0^T, c_1^T, \dots, c_N^T]^T \end{aligned} \quad (27)$$

경계조건 $a_0 = \delta x_0$, $\phi_x a_N + \phi_\lambda c_N = 0$ 을 이용하면,

$$\begin{bmatrix} E & -\frac{\tau_f - \tau_0}{2} F \\ \frac{\tau_f - \tau_0}{2} G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} = VZ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

이 되는데, 여기서

$$[E]_{ij} = \begin{cases} D_{ij} I_{n \times n}, & i \neq j \\ D_{ii} I_{n \times n} - \frac{\tau_f - \tau_0}{2} A_i, & i = j \end{cases}$$

$$[H]_{ij} = \begin{cases} D_{ij} I_{n \times n}, & i \neq j \\ D_{ii} I_{n \times n} + \frac{\tau_f - \tau_0}{2} A_i^T, & i = j \end{cases}$$

$$[F]_{ij} = \begin{cases} 0_{n \times n}, & i \neq j \\ B_i, & i = j \end{cases} \quad [G]_{ij} = \begin{cases} 0_{n \times n}, & i \neq j \\ B_i, & i = j \end{cases}$$

$$P_1 = [0_{n \times n}, \dots, 0_{n \times n}, \phi_x], \quad P_2 = [0_{n \times n}, \dots, 0_{n \times n}, \phi_\lambda] \quad (29)$$

이다. V 를 초기치 V_0 과 잔여값 V_e 으로 분리하면, $V_0 a_0 + V_e Z_e = 0$ 이 되며 Z_e 에 대해 정리하면,

$$Z_e = -V_e \setminus V_0 a_0 = W a_0 \quad (30)$$

으로 표현된다. $Z = [a_0 Z_e]^T$ 이므로,

$$Z = \begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ W \end{bmatrix} a_0 \equiv \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} a_0 \quad (31)$$

이 되어

$$\delta x(\tau_k) = a_k = W_{1k} a_0, \quad \delta \lambda(\tau_k) = c_k = W_{2k} a_0, \quad \text{으로}$$

유도된다. 이것들을 식 (20)에 대입하면,

$$\delta u(\tau_k) = -H_{uu}^{-1}(H_{uu}W_{1k} + f_u^T W_{2k}) \alpha_0 \quad (32)$$

으로 제어법칙이 얻어지며 LGL 포인트 사이값은 보간법을 통해 구할 수 있게 된다.

4. 모의 실험

예제에 사용된 문제¹는 고정된 시간과 추력으로 초기궤적에서 최대반경의 궤적으로 전이하는 우주비행체의 최적의 추력기 조종각을 구하는 문제로 r 은 radial 거리, v_r 과 v_t 는 속도의 radial 성분과 tangential 성분, μ 는 중력상수, m_0 은 우주비행체¹⁰의 초기질량, \dot{m} 은 연료소모율, θ 는 추력기의 조종각이다.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v_r \\ \dot{u}_r &= \frac{v_t^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T}{m_0 - \dot{m}\tau} \sin \theta \\ \dot{v}_t &= -\frac{v_r v_t}{r} + \frac{T}{m_0 - \dot{m}\tau} \cos \theta \end{aligned} \quad (33)$$

경계조건 $r(0) = 1 AU$, $v_r(0) = 0$, $v_t(0) = 1 AU/TU$, $v_r(\tau_f) = 0$, $v_t(\tau_f) = \sqrt{\mu/r(\tau_f)}$ 이며, 3.32 TU의 최종시간과 상수 $\mu = 1$, $m_0 = 1$, $\dot{m} = 0.0749$ 을 이용한다. 계산 알고리즘은 NLP solver를 통해 기준궤적으로 기준최적상태(x^*)와 제어변수(u^*)를 구하고, 선형화를 위한 미소시간간격 안에서의 각 시간(τ)에서 최적제어(δu)를 계산한다. 구해진 값들로부터 $u = \delta u + u^*$ 을 이용해 실제궤적을 얻게 되며 상태값의 차($\delta x = x - x^*$)를 이용해 다음의 미소시간간격에서의 계산을 반복한다. 이 반복은 미소시간간격을 바탕으로 최종시간까지 time-to-go 유도방법으로 이루어진다. 여기서의 x 는 선형상태방정식으로부터 구해지지 않고 실제궤적 생성과정으로부터 구해진 값이다. 사용된 기준데이터는 50개이며 70개의 LGL 점을 이용하였고 샘플링시간은 0.1초로 하였다. Table 1은 각 경우에 사용된 초기설정들을 나타낸다. Fig. 1 ~ 4는 기준값으로부터의 변위를 나타내는 결과로서 Fig. 1은 제어변위인데 최종시간으로 갈수록 0에 가까워짐을 확인할 수 있다. Fig. 2와 4에서

r 과 v_r 는 soft constraint를 적용 받고 있으므로 각 경우의 결과의 최종변위가 0이 아닌 임의의 값으로 접근되나, Fig. 3의 v_t 는 hard constraint를 적용 받으므로 최종시간에 접근할수록 변위값은 0에 접근하고 있는 사실 확인할 수 있다. Figs. 5 ~ 7은 본 방법에 의한 기준궤적으로의 추종성능을 보여주고 있는 것으로 궤도거리와 속도의 두성분들 모두 만족할 만한 결과를 보여준다.

Table 1 Initial perturbations

Case	1	2	3
δx_0	(0.004, 0, 0)	(-0.003, 0, 0)	(0, 0.004, 0)
Case	4	5	6
δx_0	(0, -0.003, 0)	(0, 0, 0.004)	(0, 0, -0.003)

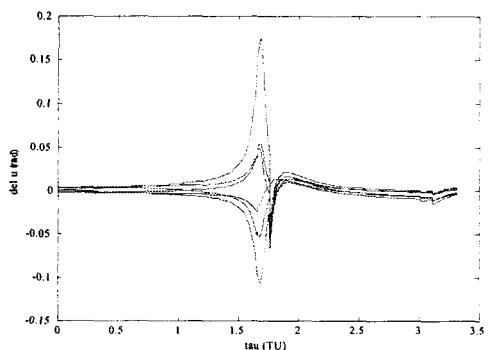


Fig.3 Deviation for the feedback control law (u)

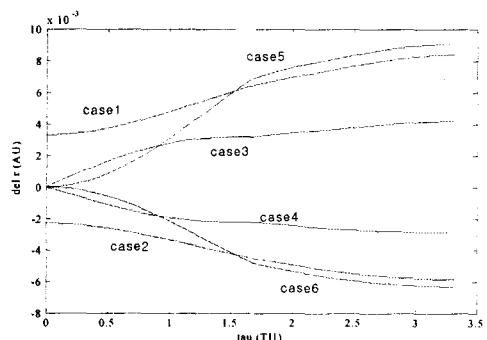


Fig. 4 Deviation for radial distance (r)

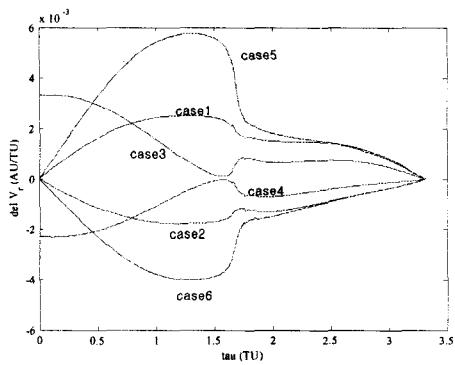


Fig. 5 Deviation of the radial velocity (v_r)

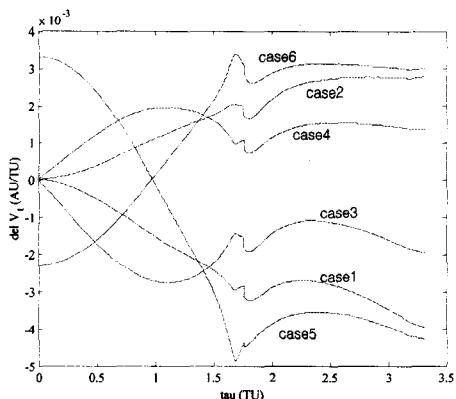


Fig. 6 Deviation for tangential velocity (v_t)

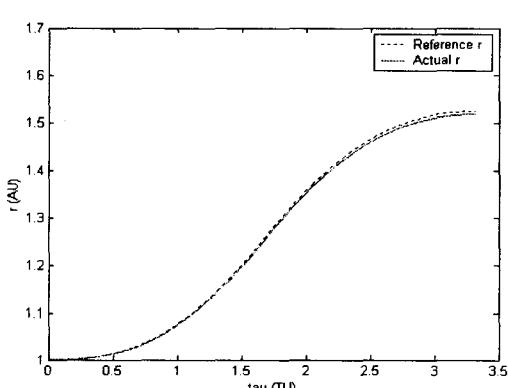


Fig. 7 The time histories of radial distance

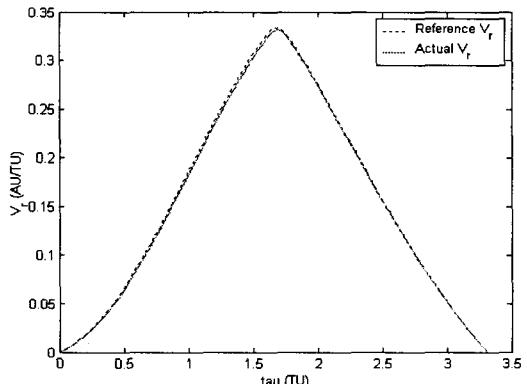


Fig. 8 The time histories of radial component of velocity

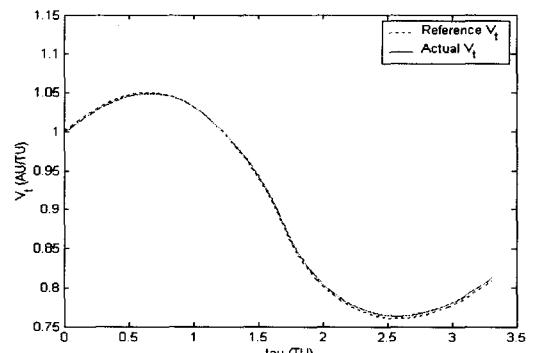


Fig. 9 Time histories of tangential component of velocity

5. 결론

PSL을 이용한 NOC 제어법칙의 도출은 최적제어문제를 TPBVP의 선형화된 이산방정식으로 유도하였고 다시 대수방정식으로 전환할 수 있었다. 이 과정을 통해 생성된 이산 선형 대수방정식은 천이 행렬이나 Riccati 미분방정식의 해법을 필요로 하지 않고 간단한 행렬계산으로 상태와 상호상태, 그리고 제어변수를 구할 수가 있었다. 이러한 특성으로 본 연구의 결과는 여러 가지 시스템의 실시간 제어 적용에 용이하게 이용되어질 수 있을 것으로 사료된다. 우주 비행체의 궤도전이 예는 최종시간 고정의 경우로서 이 방법의 성능을 보여준다. 앞으로 최종시간 자유의 경우에도 적용할 예정이다.

Journal of the Korean Society of Precision
Engineering Vol. 17, No. 6, pp.111-118, 2000.

후 기

“본 연구는 2003년도 부산대학교 신임교수 학
술연구조성비에 의한 연구임”

참 고 문 헌

1. Bryson, A.E. Jr. and Ho, Y.C., *Applied Optimal Control*, Hemisphere New York, 1975.
2. McReynolds, S.R. and Bryson, A. E. Jr., "A Successive Sweep Method for Solving Optimal Programming Problems," Six Joint Automatic Control Conference, Troy, N. Y., June 1965.
3. Breakwell, J.V., Speyer, J.L. and Bryson, A.E. Jr., "Optimization and Control of Nonlinear Systems Using the Second Variation," SIAM Journal on Control, Vol.1, No.2, pp. 193-223, 1963.
4. Bauer, T.P. Wood, L.J. and Caughey, T.K., "Gain indexing Schemes for Low-thrust Perturbation Guidance," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 6, No. 6, pp.518-525, 1983.
5. Speyer, J.L. and Bryson, A.E. Jr., "A Neighboring Optimal Feedback Control Scheme Based on Time-to-Go with Application to Re-Entry Flight paths," AIAA Journal, Vol. 6, pp. 769-776, May 1968.
6. Powers, W.F., "A Method for Comparing Trajectories in Optimal Linear Perturbation Guidance Schemes," AIAA Journal, Vol.6, pp. 2451-2452, Dec 1968.
7. Ping Lu, "Regulation About Time Varing Trajectories: Precision Entry Guidance Illustrated," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 22, No. 6, pp. 784-790, 1999.
8. Fahroo, F. and Ross, I. M., "Costate Estimation by a legendre Pseudospectral Method," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 24, No. 2, pp. 270-277, 2001.
9. Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., Zang, T. A., *Spectral Methods in FluidDynamics*, Springer-Verlag, 1987.
10. Lee, D. W., Cho, K. R., "Reference Trajectory Analysis of Atmosphere Re-entry for Space Vehicle,"