메쉬에 두 개의 링크를 추가한 연결망의 에지 고장 해밀톤 성질

박 경 욱†·임 형 석††

요 약

본 논문에서는 $m \times n$ 메쉬 연결망의 첫 행과 마지막 행에 랩어라운드 링크를 갖는 연결망 $M_2(m, n)$ ($m \geq 2$, $n \geq 3$)의 고장 해밀톤 성질을 고려한다. 이분 그래프인 $M_2(m, n)$에 하나의 결함 링크가 발생했을 때 임의의 두 노드가 다른(같은) 집합에 속한 경우 두 노드를 잇는 길이 $mn-1$($mn-2$)인 경로가 존재함을 보인다. [1]에서 보인 $P_m \times C_n$의 연구 결과와 비교하면 $P_m \times C_n$ 또한 이러한 해밀톤 성질을 지닌다. 그러나 $P_m \times C_n$이 m개의 랩어라운드 에지를 지니는 것에 반해 $M_2(m, n)$은 단지 두 개의 링크를 추가하여 이러한 해밀톤 성질을 지닌다. 또한 $M_2(m, n)$은 다차원 메쉬, 재귀원형군, 하이퍼큐브, 이중 루프 네트워크, k-ary n-큐브와 같은 여러 상호 연결망의 스패닝 부 그래프이다. 따라서 $M_2(m, n)$의 고장 해밀톤 성질은 이들 연결망들의 고장 해밀톤 성질을 밝히는데 활용될 수 있다. 본 논문의 결과를 3차원 메쉬, 재귀원형군, 하이퍼큐브에 적용시켜 이들 연결망의 고장 해밀톤 성질들을 보인다.

Edge Fault Hamiltonian Properties of Mesh Networks with Two Additional Links

Kyoung-Wook Park† · Hyeong-Seok Lim††

ABSTRACT

We consider the fault hamiltonian properties of $m \times n$ meshes with two wraparound links on the first row and the last row, denoted by $M_2(m, n)$, $m \geq 2$, $n \geq 3$. $M_2(m, n)$, which is bipartite, with a single faulty link has a fault-free path of length $mn-1$($mn-2$) between arbitrary two nodes if they both belong to the different(same) partite set. Compared with the previous works of $P_m \times C_n$[1], it also has these hamiltonian properties. Our result show that two additional wraparound links are sufficient for an $m \times n$ mesh to have such properties rather than m wraparound links. Also, $M_2(m, n)$ is a spanning subgraph of many interconnection networks such as multidimensional meshes, recursive circulants, hypercubes, double loop networks, and k-ary n-cubes. Thus, our results can be applied to discover fault-hamiltonicity of such interconnection networks. By applying hamiltonian properties of $M_2(m, n)$ to 3-dimensional meshes, recursive circulants, and hypercubes, we obtain fault hamiltonian properties of these networks.

키워드 : 메쉬(Mesh), 상호연결망(Interconnection Networks), 해밀톤 경로(Hamiltonian Path), 고장 해밀톤 경로(Fault Hamiltonian Path), 강한 해밀톤 laceable 그래프(Strongly Hamiltonian Laceable)

1. 서 론

메쉬(mesh) 연결망은 구조가 간단하여 확장이 쉽고 VLSI 구현에 적합하다는 장점으로 MasPar, Intel Paragon XP/S, Touchstone DELTA System, Mosaic C와 같은 여러 상용 병렬 시스템의 상호 연결망으로 사용되고 있다[2]. 연결망의 규모가 커질수록 결함 노드나 결함 링크가 발생할 가능성이 높아지므로 이러한 상황을 고려하는 결함 허용(fault tolerance)은 연결망의 중요한 척도 중 하나이다. 결함 허용을 위한 기존의 연구는 크게 두 가지로 나뉜다. 첫 번째는 결함 요소를 시스템 내의 다른 노드나 링크로 대치시키는 것이다[3, 4]. 이 기법은 추가 하드웨어로 인한 비용이 없으나 결함 발생시 시스템의 성능저하가 일어난다. 이러한 단점을 극복하기 위해 예비 노드나 링크를 추가하여 결함 노드나 링크를 대체하도록 하여 시스템의 성능을 계속 유지하는 기법에 대한 연구가 진행되고 있다[5-8]. 그러나 메쉬 연결망에서는 k개의 결함 요소(노드 또는 링크)가 발생하더라도 메쉬 연결망을 계속 유지하기 위해서는 $O(k^2/\log k)$의 예비 노드와 $O(\log^3 k)$의 분지수를 지니도록 에지가 추가되어야 함이 알려져 있어 결함에 대비하기 위해 요구되는 예

† 준 회 원 : 전남대학교 대학원 전산학과
†† 정 회 원 : 전남대학교 전산학과 교수
논문접수 : 2003년 10월 23일, 심사완료 : 2004년 6월 10일

비 하드웨어의 비용이 높다[8]. 따라서 많은 예비 하드웨어를 추가하여 결함 발생시 동일한 성능으로 유지시키는 것 보다는 최소의 예비 하드웨어를 추가하여 특정 성능만을 유지시키도록 하는 연구가 요구되고 있다.

본 논문에서는 2차원 메쉬에 최소의 예비 링크를 추가하여 결함이 발생하더라도 다양한 해밀톤 경로를 지니는 연결망을 제시하고 이 연결망의 고장 해밀톤 성질에 대해 고려한다. 상호 연결망에서의 해밀톤 경로나 사이클은 경로 기반(path-based) 멀티 캐스팅이나 파이프라인 계산을 위한 선형 배열의 구현 등 여러 응용에서 활용되므로 연결망이 해밀톤 성질을 지니는가는 연결망을 평가하는 중요한 척도 중 하나다. 따라서 하이퍼큐브, k-ary n-큐브, 재귀원형군, 스타그래프와 같은 여러 연결망들의 해밀톤 성질들에 대한 연구가 이루어지고 있다[9-11]. 연결망에서 해밀톤 경로나 사이클을 찾는 해밀톤 문제(hamiltonian problem)는 그래프 이론 분야에서 널리 알려진 문제 중 하나다. 연결망 구조는 그래프로 모델링 될 수 있는데 이때 노드는 그래프의 정점(vertex)에 대응되고 통신 링크는 에지(edge)에 대응된다. 그래프의 해밀톤 경로(사이클)는 그 그래프의 모든 정점을 오직 한번씩만 지나는 경로(사이클)를 말하며 해밀톤 사이클을 지닌 그래프를 해밀톤(hamiltonian) 그래프라 한다. 그리고 모든 두 정점들 사이에 해밀톤 경로가 있는 그래프를 해밀톤 연결된(hamiltonian-connected) 그래프라 한다. 또한 에지나 정점 중 k개 이하의 결함이 발생하더라도 해밀톤 사이클을 지니면 k-고장 해밀톤(k-fault hamiltonian) 그래프이라 하고 해밀톤 연결되면 k-고장 해밀톤 연결된(k-fault hamiltonian-connected) 그래프라 한다.

이분 그래프(bipartite graph)는 해밀톤 연결된 그래프가 아니다[12]. 따라서 [13]에서는 이분 그래프를 위한 해밀톤 laceable 그래프 개념을 소개하였다. 이분 그래프는 모든 정점들을 두 개의 이분 집합으로 나눌 수 있으며 이때 서로 다른 집합에 속한 정점들 끼리 에지를 갖는다. 이러한 이분 집합들은 일반적으로 흰색 정점들의 집합과 검정 점정들의 집합으로 표현되며 이들을 각각 W와 B이라 하자. $|W|=|B|$이고 모든 W에 속한 정점들과 B에 속한 정점들 사이에 해밀톤 경로를 가지면 해밀톤 laceable 그래프(hamiltonian-laceable)라 한다. 그리고 해밀톤 laceable 그래프가 같은 정점 집합에 있는 모든 두 정점들을 잇는 길이가 $|W|+|B|-2$인 경로를 지니면 강한 해밀톤 laceable 그래프(strongly hamiltonian-laceable)라 한다[14]. 강한 해밀톤 laceable 그래프는 임의의 두 정점을 잇는 가능한 가장 긴 길이의 경로를 지닌다.

또한 [1]에서는 강한 해밀톤 laceable 그래프가 결함 에지나 결함 정점을 지니는 경우를 위해 다음과 같은 고장 해밀톤 성질을 제안하였다. 정점 수가 N인 이분 그래프에서 결함 요소들의 집합 $F=F_v \cup F_e$라 하자. 여기서 F_v는 결함 정점들의 집합, F_e는 결함 에지들의 집합이다. 결함이 없는 흰색 정점들과 검정 정점들을 각각 n_w, n_b라 하자. $n_w=n_b$일 때 서로 다른(같은) 집합에 속한 두 정점을 잇는 길이 $2n_b-1\,(2n_b-2)$인 결함 허용(fault-free) 경로를 L^{opt}-경로라 한다. $n_b > n_w$일 때, L^{opt}-경로의 길이는 B에 속한 한 쌍의 정점들을 잇는 경우 $2n_w$, 서로 다른 집합에 속한 정점들을 잇는 경우 $2n_w-1$, 그리고 W에 속한 정점들을 잇는 경우 $2n_w-2$이다. 이와 비슷하게 $n_b < n_w$인 이분 그래프의 L^{opt}-경로도 정의할 수 있다. 또한 길이가 2 $\min n_b, n_w$인 결함 허용 사이클을 L^{opt}-사이클이라 한다. 이러한 L^{opt}-경로와 L^{opt}-사이클은 가능한 가장 긴 길이의 경로와 사이클이다. k개 이하의 결함 정점이나 결함 에지를 갖더라도 두 정점을 잇는 L^{opt}-경로를 지니면 k-고장 강한 해밀톤 laceable(k-fault strongly hamiltonian-laceable) 그래프라 한다.

본 논문에서 대상으로 하는 메쉬 연결망의 해밀톤 성질에 대한 기존의 연구들은 다음과 같다. [15-17]에서 2차원 메쉬에서 해밀톤 경로가 존재하기 위한 조건들과 이들 조건에서 해밀톤 경로를 생성하는 선형시간(linear-time) 알고리즘이 제시되었으며 3차원 메쉬에서 해밀톤 사이클을 생성하는 알고리즘이 [18]에서 제시되었다. 그러나 메쉬는 최소 분지수가 2인 낮은 연결도를 지니고 있으므로 결함이 발생했을 때 해밀톤 성질들을 지니지 못한다. 따라서 2차원 메쉬에 에지가 추가된 그래프 $P_m \times C_n$, $C_m \times C_n$의 고장 해밀톤 성질들에 대한 연구가 이루어지고 있다[1, 10, 19, 20]. $P_m \times C_n$은 길이 m인 체인과 길이 n인 링의 곱으로 얻어지는 그래프로 m행 n열 메쉬의 모든 행에 랩어라운드 에지가 추가된 형태를 지닌다. [1, 10]에서 $P_m \times C_n$는 n이 홀수이면 해밀톤 연결된 그래프, 1-고장 해밀톤 그래프이며 n이 짝수이면 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프임이 알려져 있다. 또한 메쉬의 모든 행과 열에 랩어라운드 에지가 추가된 형태인 2차원 토러스 $C_m \times C_n$는 m과 n이 모두 4의 배수인 경우 4-고장 해밀톤 laceable 그래프이며, 이분 그래프가 아닌 경우 1-고장 해밀톤 연결된 그래프, 2-고장 해밀톤 그래프임이 증명되었다[19].

또한, [21]에서는 $P_m \times C_n$보다 적은 랩어라운드 에지들을 갖는 그래프 $M_2(m,n)$의 해밀톤 성질들에 대해 보였다. 여기서 $M_2(m,n)$은 $m \times n$ 메쉬의 첫 행과 마지막 행에만 랩어라운드 에지가 추가된 그래프로 최소 분지수가 3이다. n이 홀수인 $M_2(m,n)$은 메쉬에 최소의 에지들을 추가하여 해밀톤 연결된 그래프가 되는 형태이다. 또한 n이 짝수인 경우는 하나의 결함 정점을 지니더라도 강한 해밀톤 laceable 그래프임이 증명되었다.

본 논문에서는 $M_2(m,n)$가 하나의 결함 에지를 지니더라도 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다. 먼저 하나의 결함 에지를 갖는 $M_2(m,n)$에는 서로 다른 집합에 속한 임의의 두 정점들을 잇는 해밀톤 경로가 존재함을 보인다. 그리고 같은 집합에 속한 임의의 두 정점들을 잇는 길이 $mn-2$인 결함 허용 L^{opt}-경로가 존재함을 증명함으로써 메쉬에 두 개의 에지를 추가하여 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프가 될 수 있음을 보인다. $M_2(m,n)$은 n이 짝수인 경우 하이퍼큐브, 재귀원형군, k-ary n22-큐브, 이중 루프 네트워크와 같은 여러 상호 연결망들의 스패닝 부그래프(spanning subgraph)이므로 $M_2(m,n)$의 고장 해밀톤 성질들을 이러한 연결망들에 적용시킬 수 있다. $M_2(m,n)$의 고장 해밀톤 성질을 3차원 메쉬와 재귀원형군에 적용시켜 이들 연결망이 1-고장 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다. 또한 n-차원 하이퍼큐브 Q_n이 $f_e(\le n-3)$개의 결함 에지를 지니더라도 $M_2(2^r, 2^{n-r})$을 스패닝 부 그래프로 지님을 보임으로써 하나의 결함 정점과 $n-3$개의 결함 에지를 지닌 Q_n이 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서 본 논문에서 필요로 하는 정의와 표기법들에 대해 기술하고 3장에서는 $M_2(m,n)$이 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다. 4장에서는 이러한 해밀톤 성질을 3차원 메쉬, 재귀원형군, 하이퍼큐브에 적용시켜 이들의 고장 해밀톤 성질들을 밝히고 마지막으로 5장에서 결론을 맺는다.

2. 정의 및 표기법

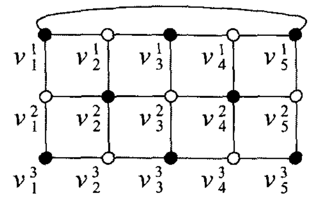
$m\times n$ 메쉬는 그래프 $M(m,n)=(V,E)$로 정의한다. 여기서 정점의 집합 $V=\{v_j^i \mid 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$이며, 에지의 집합 $E=\{(v_j^i, v_{j+1}^i) \mid 1\le i\le m, 1\le j< n\}\cup\{(v_j^i, v_j^{i+1}) \mid 1\le i< m, 1\le j\le n\}$이다. 메쉬의 최소 분지수는 2이므로 해밀톤 연결된 그래프, 1-고장 해밀톤 그래프, 1-고장 해밀톤 laceable 그래프가 아니다. 분지수가 2인 4개의 정점들을 꼭지 정점이라 하자. 메쉬가 이러한 해밀톤 성질을 지니도록 꼭지 정점들 사이에 최소의 에지를 추가하여 최소 분지수가 3이 되도록 다음과 같이 정의할 수 있다.

[정의 1] $m\times n$ 메쉬를 $M(m,n)=(V,E)$라 하자.

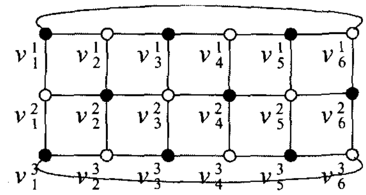
(a) 그래프 $M_1(m,n)=(V_{M_1}, E_{M_1})$은 정점 집합 $V_{M_1}=V$이고, 에지 집합 $E_{M_1}=E\cup\{(v_1^1, v_n^1)\}$이다.

(b) 그래프 $M_2(m,n)=(V_{M_2}, E_{M_2})$은 정점 집합 $V_{M_2}=V$이고, 에지 집합 $E_{M_2}=E\cup\{(v_1^1, v_n^1), (v_1^m, v_n^m)\}$이다.

그래프 $M_1(m,n)$, $M_2(m,n)$의 모든 정점은 이분 정점 집합 B와 W로 나눌 수 있다. 정점 v_j^i는 $i+j$가 짝수이면 검정 정점, 홀수이면 흰색 정점이라 하고, 검정 정점의 집합을 B, 흰색 정점의 집합을 W라 한다. 행 i에 속한 정점을 $R(i)=\{v_j^i \mid 1\le j\le n\}$, 열 j에 속한 정점은 $C(j)=\{v_j^i \mid 1\le i\le m\}$로 표시한다. $i\le j$일 때 $R(i:j)=\cup_{i\le k\le j}R(k)$, $C(i:j)=\cup_{i\le k\le j}C(k)$로 표시한다.



(a) $M_1(3,5)$



(b) $M_2(3,6)$

(그림 1) $M_1(m,n), M_2(m,n)$의 예제

그래프의 경로는 정점들의 순열(sequence)로 표기하고 경로 P의 정점들의 집합을 $V(P)$로 표기한다. 정점들의 집합 X로 유도되는 부 그래프(induced subgraph)를 $G\langle X\rangle$라 하고, $G\langle X\rangle$의 두 정점 s, t를 잇는 해밀톤 경로가 존재하면, 그 경로를 $H[s,t \mid X]$라 한다. 만약 X가 공집합이면, $H[s,t \mid X]$는 비어있는 순열로 표기한다. 부 그래프 $G\langle R(i)\rangle$에서 두 정점 v_j^i와 $v_{j'}^i$를 잇는 경로를 $v_j^i \to v_{j'}^i$로 표기한다. 다시 말해 $v_j^i \to v_{j'}^i$는 $j<j'$이면 $(v_j^i, v_{j+1}^i, \cdots, v_{j'-1}^i, v_{j'}^i)$이며 $j>j'$이면 $(v_j^i, v_{j-1}^i, \cdots, v_{j'+1}^i, v_{j'}^i)$이다. 이와 비슷하게 $G\langle C(j)\rangle$에서 두 정점 v_j^i와 $v_j^{i'}$를 잇는 경로를 $v_j^i \to v_j^{i'}$로 표기한다.

메쉬는 다음과 같은 조건에서 해밀톤 경로를 지니며[15], 이러한 경로들을 생성하는 선형시간(linear-time) 알고리즘이 [16]에서 제안되었다.

[보조정리 1][15] m, n이 모두 2 이상인 임의의 정수일 때, 다음이 성립한다.

(a) mn이 짝수이면, $m\times n$ 메쉬에는 한 꼭지 정점과 색이 다른 임의의 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.

(b) mn이 홀수이면, $m\times n$ 메쉬에는 한 꼭지 정점과 색이 같은 임의의 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.

$M_2(2,n)$과 $P_2\times C_n$은 동형이다. $M_2(m,n)$의 고장 해밀

톤 성질을 증명하기 위해 $P_2 \times C_n$의 다음과 같은 해밀톤 성질을 이용한다.

[보조정리 2][1, 10] $P_2 \times C_n$에서 $n \geq 3$이면 다음과 같은 해밀톤 경로를 지닌다.

(a) n이 홀수이면, $P_2 \times C_n$은 임의의 두 정점들을 잇는 해밀톤 경로를 지닌다.

(b) n이 짝수이면, 하나의 고장 에지를 지닌 $P_2 \times C_n$은 임의의 두 정점들을 잇는 L^{opt}-경로를 지닌다.

[21]에서 밝혀진 $M_1(m, n)$과 $M_2(m, n)$의 해밀톤 성질들 중 다음 두 가지 성질들을 이용하여 $M_2(m, n)$이 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다.

[보조정리 3][21] $m \geq 2, n \geq 4$ (n 짝수)일 때, $M_1(m, n)$은 임의의 두 정점들을 잇는 L^{opt}-경로를 지닌다.

[보조정리 4][21] $m \geq 2, n \geq 4$(n 짝수)일 때, 하나의 결함 정점을 지닌 $M_2(m, n)$은 임의의 두 정점들을 잇는 L^{opt}-경로를 지닌다.

3. $M_2(m, n)$의 고장 해밀톤 성질

본 절에서는 하나의 결함 에지를 갖는 $M_2(m, n)$에는 임의의 두 정점을 잇는 L^{opt}-경로가 존재함을 보인다. 이를 위해 먼저 하나의 결함 에지를 갖는 $M_2(m, n)$에는 서로 다른 집합에 속하는 두 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재함을 보인다.

[보조정리 5] $m \geq 2, n \geq 4$(n 짝수)일 때, 하나의 결함 에지를 지닌 $M_2(m, n)$은 해밀톤 laceable 그래프이다.

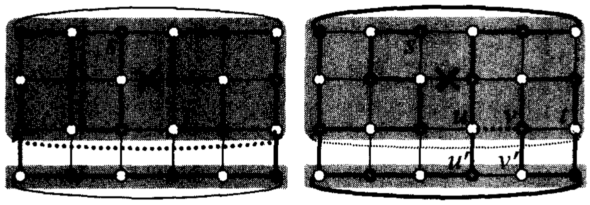
[증명] m에 대한 수학적 귀납법을 이용하여 두 정점 s와 t를 잇는 해밀톤 경로 P가 존재함을 보인다. 먼저 $m = 2$인 경우 [보조정리 2]에 의해 성립한다. $m \geq 3$인 경우 다음 경우들로 나누어 위 정리가 $m-1$일 때 성립한다고 가정하고 m일 때 성립함을 보인다. 두 정점 s와 t를 각각 v_i^x, v_j^y라 하자. 일반성을 잃지 않고 e_f는 $G\langle R(1:m-1)\rangle$에 속한다고 가정한다.

먼저 e_f가 랩어라운드 에지 (v_1^1, v_n^1) 이거나 (v_1^m, v_n^m)인 경우 [보조정리 3]에 의해 성립한다. e_f가 랩어라운드 에지가 아닌 경우는 다음과 같은 경우들로 나누어 해밀톤 경로가 존재함을 보인다.

(경우 1) $s, t \in R(1:m-1)$

$m-1$행에 랩어라운드 에지 (v_1^{m-1}, v_n^{m-1})가 존재한다고 가정하면 $G\langle R(1:m-1)\rangle$에는 귀납가설에 의해 s와 t를 잇는 해밀톤 경로 P'가 존재한다. 이때 P'가 (v_1^{m-1}, v_n^{m-1})를 지나면 $(v_1^{m-1}, v_1^m \rightarrow v_n^m, v_n^{m-1})$로 대신하여 P를 생성할 수 있다(그림 2)(a).

그렇지 않으면 P'에서 $G\langle R(m-1)\rangle$에 속한 에지 (u, v)를 선택한다. u, v와 인접한 $R(m)$에 있는 두 정점을 각각 u', v'라 하면 $G\langle R(m)\rangle$은 링 형태이므로 u', v'을 잇는 해밀톤 경로 P''가 존재한다. P'에서 (u, v)를 제거하고 $(u, u'), (v, v')$를 추가하여 P''를 연결하면 P를 생성할 수 있다(그림 2)(b).



(a) (b)

(그림 2) [보조정리 5](경우 1) 증명의 설명

(경우 2) $s \in R(1:m-1), t \in R(m)$

(경우 2.1) 결함 에지 e_f가 열 에지 (v_k^z, v_k^{z+1})인 경우

(경우 2.1.1) $x > z$ 경우. [보조정리 3]에 의해 $G\langle R(z+1:m)\rangle$에는 s와 t를 잇는 해밀톤 경로 P'가 존재한다. P' 중에서 $G\langle R(z+1)\rangle$에 속한 에지 (u, v)를 선택한다. 이때 u, v는 모두 v_k^{z+1}이 아니어야 한다. u, v와 인접한 $R(z)$에 있는 두 정점을 각각 u', v'라 하면 $G\langle R(1:z)\rangle$에는 $z = 1$인 경우 사이클 형태이며 $z \geq 2$인 경우 [보조정리 3]에 의해 u', v'를 잇는 해밀톤 경로 P''가 존재한다. P'에서 (u, v)를 제거하고 $(u, u'), (v, v')$를 추가하여 P''와 연결하면 해밀톤 경로 P를 생성할 수 있다(그림 3)(a).

(경우 2.1.2) $x \leq z$ 경우. $R(z)$에 속한 s와 다른 색을 지닌 정점을 s'라 하자. 이때 $s' \neq v_k^z$이다. $R(z+1)$에 속한 정점들 중 s'와 인접한 t'라 하면 [보조정리 3]에 의해 $P = (H[s, s'|R(1:z)], H[t', t|R(z+1)])$인 해밀톤 경로를 생성할 수 있다(그림 3)(b).

(경우 2.2) 결함 에지 e_f가 행 에지 (v_k^z, v_{k+1}^z)인 경우

$k = n-1$인 경우는 $k=1$인 경우로 대응시켜 생각할 수 있으므로 $1 \leq k < n-1$로 가정한다. 다음 세 가지 경우로 나누어 해밀톤 경로가 존재함을 보인다.

(경우 2.2.1) $i \leq k < j$.

a) $k=1$일 때,

$x \leq z$인 경우 다음과 같이 해밀톤 경로를 생성할 수 있다(그림 3)(c), (그림 3)(d).

$$P=\begin{cases}(s\to v_1^m, v_n^m\to v_n^x, H[v_n^{x-1}, v_{n-1}^{x-1}|R(1:x-1)],\\ H[v_{n-1}^x, t|C(2:n-1)\cap R(x:m)]) & \text{if } j\neq n\\ (s\to v_1^m, v_2^m\to v_2^x, H[v_2^{x-1}, v_3^{x-1}|R(1:x-1)],\\ H[v_3^x, t|C(3:n)\cap R(x:m)]) & \text{if } j=n\end{cases}$$

$x>z$인 경우 v_{j-1}^x, v_j^x 그리고 v_{j+1}^x 중 t와 같은 색을 지닌 정점을 s'라 하고 $R(x+1)$에 속한 정점들 중 s'와 이웃한 정점을 t'라 하면 다음과 같은 해밀톤 경로를 생성할 수 있다(그림 3)(e).

$$P=(s\to v_1^1, H[v_n^1, s'|C(2:n)\cap R(1:x)],\\ H[t', t|R(x+1:m)])$$

b) $k>1$ 일 때,

먼저 m 또는 k가 짝수인 경우를 고려한다. m이 짝수이고 $s\in B$이거나 m이 홀수이고 $s\in W$이면 $s'=v_1^m$, $t'=v_n^m$이라 하자. 그렇지 않은 경우, 즉 m이 짝수이고 $s\in W$이거나 m이 홀수이고 $s\in B$이면 $s'=v_k^m$, $t'=v_{k+1}^m$이라 하자. $P=(H[s,s'|C(1:k)], H[t', t|C(k+1:n)])$이다 (그림 3)(f).

나머지 경우, 즉 m과 k가 모두 홀수인 경우, $s\in B$, $t\in W$이면(그림 3)(g)

$$P=\begin{cases}H[s, v_k^m|C(1:k)], H[v_{k+1}^m, t|C(k+1:n)]) & \text{if } j=n\\ H[s, v_1^m|C(1:k)], H[v_n^m, t|C(k+1:n)]) & \text{if } j\neq n\end{cases}$$

$s\in W$, $t\in B$이면 v_{j-1}^{m-1} 혹은 v_{j+1}^{m-1} 중 $C(k+1:n)$에 속한 정점을 s'라 하고 s'와 이웃한 $R(m)$에 속한 정점을 t'라 하면 다음과 같은 해밀톤 경로를 생성할 수 있다(그림 3)(h).

$$P=(H[s, v_1^1|C(1:k)\cap R(1:m-1)],\\ H[v_n^1, s'|C(k+1:n)\cap R(1:m-1)], H[t', t|R(m)])$$

(경우 2.2.2) $i\le j\le k$.

$i=j$인 경우와 $i<j$인 경우로 나누어 해밀톤 경로가 존재함을 보인다.

a) $i=j$.

$k=1$이면 s와 t는 모두 $C(1)$에 속한다. 다음과 같이 해밀톤 경로 P를 생성할 수 있다. $x\ge z$인 경우(그림 3)(i),

$$P=(s\to v_1^1, H[v_n^1, v_2^x|C(2:n)\cap R(1:x)],\\ H[v_2^{x+1}, t|R(x+1:m)])$$

$x<z$인 경우(그림 3)(j),

$$P=\begin{cases}(H[s, v_n^x|R(1:x)], H[v_n^{x+1}, v_2^{x+1}|\\ C(2:n)\cap R(x+1:m)]\, v_1^{x+1}\to t) & \text{if } z=m-1\\ (s\to v_1^{m-1}, H[v_2^{m-1}, v_2^m|C(2:n)], t) & \text{if } z\neq m-1\end{cases}$$

$k>1$인 경우, $i=1$이면 s'를 v_k^1 또는 v_k^{m-1} 중 v_k^z가 아닌 정점이라 하고 t'는 $C(k+1)$에 속한 s'와 인접한 정점이라 하면 해밀톤 경로는 다음과 같다(그림 3)(k), (그림 3)(l).

$$P=\begin{cases}(H[s, v_1^1|C(1:k)\cap R(1:m-1)],\\ H[v_n^1, v_n^{m-1}|C(k+1:n)\cap R(1:m-1)], v_n^m\to t) & \text{if } s\neq v_1^1\\ (H[s, s'|C(1:k)\cap R(1:m-1)],\\ H[t', v_{k+1}^m|C(k+1:n)], v_k^m\to t) & \text{if } s=v_1^1\end{cases}$$

$i>1$인 경우 m과 $k-i$가 모두 짝수이면 v_i^1 또는 v_i^{m-1} 중 s가 아닌 정점을 s'라 하자. m이 홀수이거나 $k-i$가 홀수이면 v_i^1 또는 v_i^2 중 흰색 정점을 s'라 하자. 그리고 $C(i-1)$에 속한 정점들 중 s'와 인접한 정점을 t'라 하면 다음과 같은 해밀톤 경로를 생성할 수 있다(그림 3)(m).

$$P=(H[s, s'|C(i:k)\cap R(1:m-1)], H[t', v_1^m|C(1:i-1)],\\ H[v_n^m, v_{k+1}^m|C(k+1:n)], v_k^m\to t).$$

b) $i<j$ 인 경우, $j=k$이면 $s\in W$, $t\in B$일 때(그림 3)(n)

$$P=(H[s, v_1^1|C(1:k)\cap R(1:m-1)],\\ H[v_n^1, v_n^m|C(k+1:n)], v_1^m\to t)$$

$s\in B$, $t\in W$이면 m이 짝수인 경우 $C(k)$에 속한 정점들 중 결함 에지 e_f와 인접하지 않는 정점 v_k^1 혹은 v_k^{m-1}을 선택하여 s'라 하고 $C(k+1)$에 속한 정점들 중 s'와 인접한 정점을 t'라 하자. 해밀톤 경로는 다음과 같다(그림 3)(o).

$$P=(H[s, s'|C(1:k)\cap R(1:m-1)],\\ H[t', v_n^m|C(k+1:n)], v_1^m\to t)$$

m이 홀수이면(그림 3)(p), (그림 3)(q),

$$P=\begin{cases}(H[s, v_k^x|C(1:k)\cap R(1:x)], v_k^{x+1}\to v_k^{m-1},\\ H[v_{k-1}^{m-1}, v_1^m|C(1:k-1)\cap R(m-1:m)],\\ H[v_n^m, v_{k+1}^m|C(k+1:n)], t) \text{if } s\in C(1)\\ (H[s, v_{k-1}^{m-1}|C(i:k)\cap R(1:m-1)], v_{k-1}^m\to v_i^m,\\ H[v_{i-1}^m, v_1^1|C(1:i-1)], H[v_n^1, v_{k+1}^m|C(k+1:n)], t)\\ \text{if } s\notin C(1)\end{cases}$$

$j<k$이면 m이 홀수이거나 k가 짝수인 경우, $s\in W$이면 $s'=v_1^1$, $t'=v_n^1$이라 하고 $s\in B$이면 $s'=v_1^m$, $t'=v_n^m$이라 하자. 해밀톤 경로는 다음과 같다(그림 3)(r).

$$P=(H[s, s'|C(1:j-1)], H[t', v_{k+1}^m|C(k+1:n)],\\ H[v_k^m, t|C(j:k)])$$

m이 짝수이고 k가 홀수인 경우, $s\in B$이면 v_{k+1}^1 혹은 v_{k+1}^{m-1} 중 e_f와 인접하지 않는 정점을 s'라 하고 $C(k)$에 속한 정점들 중 s'와 인접한 정점을 t'라 하자(그림 3)(s).

$$P=(H[s, v_1^m|C(1:j-1)], H[v_n^m, s'|C(k+1:n)],\\ H[t', t|C(j:k)])$$

$s \in W$이면

$$P = (H[s, v_1^1 | C(1:j-1)], H[v_n^m, v_{k+1}^m | C(k+1:n)],\ H[v_k^m, t | C(j:k)])$$

(경우 2.2.3) $k < i < j$.

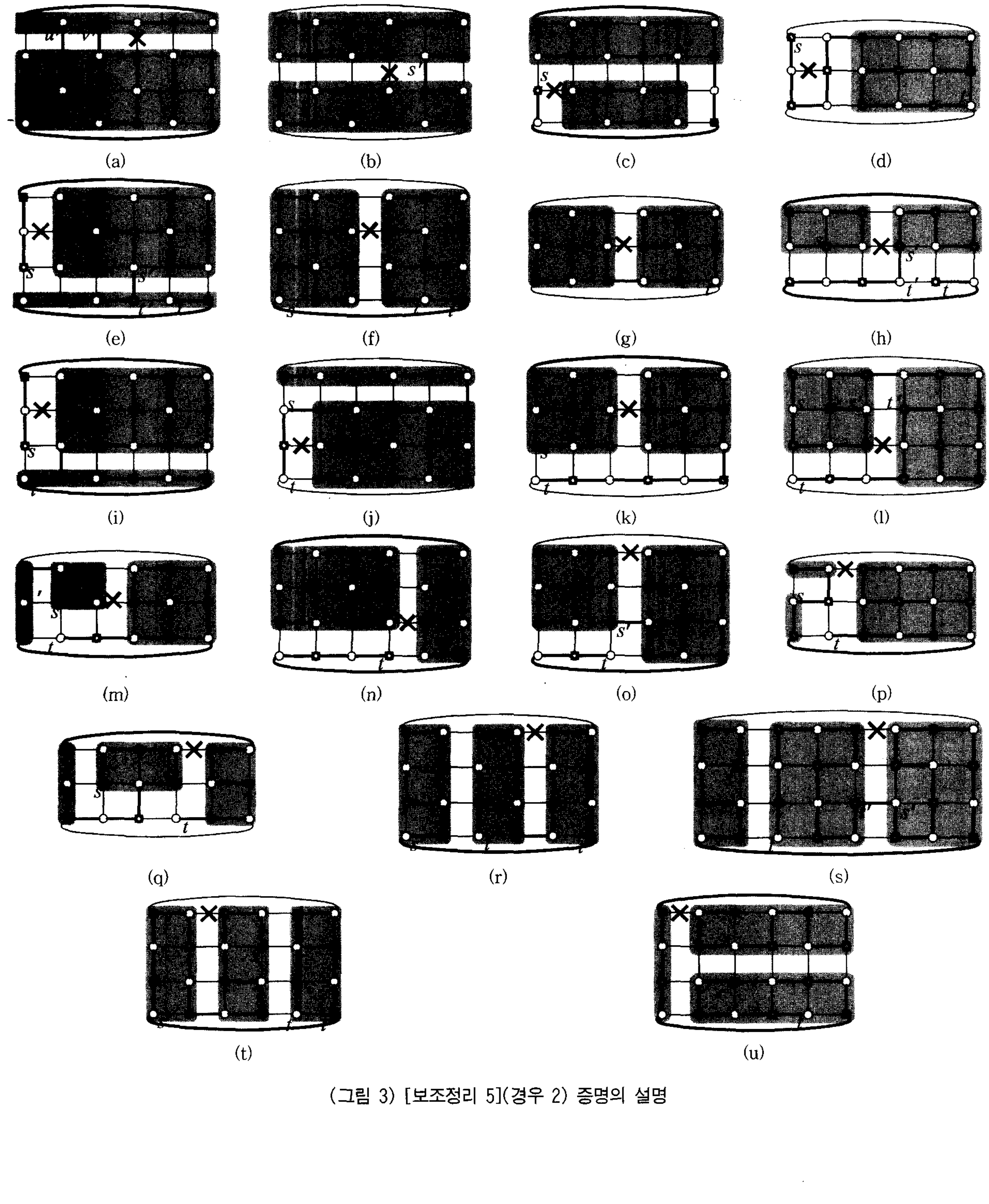
a) $s \in B,\ t \in W$인 경우

m이 홀수이거나 k가 짝수이면 다음과 같이 해밀톤 경로 P를 생성할 수 있다. k가 짝수이면 두 정점 $s' = v_1^m$, $t' = v_n^m$이라 하고 k가 홀수이면 $s' = v_1^1$, $t' = v_n^1$이라 하자(그림 3)(t).

$$P = (H[s, v_{k+1}^m | C(k+1:j-1)], H[v_k^m, s' | C(1:k)],\ H[t', t | C(j:n)])$$

m이 짝수이고 k가 홀수이면(그림 3)(u)

$$P = \begin{cases} (H[s, v_n^1 | C(k+1:n) \cap R(1:m-2)], H[v_1^1, v_n^1 | \\ \quad C(1:k)], H[v_n^m, t | C(k+1:n) \cap R(m-1:m)]) \\ \qquad\qquad \text{if } s \in R(1:m-2) \\ (H[s, v_{j-1}^1 | C(k+1:j-1)], H[v_j^1, v_n^1 | C(j:n) \cap \\ \quad R(1:m-1)], H[v_1^1, v_n^m | C(1:k)], v_n^m \rightarrow t) \\ \qquad\qquad \text{if } s \in R(m-1) \end{cases}$$



(그림 3) [보조정리 5](경우 2) 증명의 설명

b) $s \in W$, $t \in B$인 경우는 앞에서 기술한 $s \in B$, $t \in W$인 경우와 비슷하게 해밀톤 경로를 생성할 수 있다.

(경우 3) $s, t \in R(m)$

(경우 3.1) 결합 에지 e_f가 행 에지 (v^z_k, v^z_{k+1})인 경우

a) $i \le k < j$일 때(그림 4)(a), (그림 4)(b), (그림 4)(c), m이 짝수인 경우 $s \in B$이면 $s' = v^m_1$, $t' = v^m_n$이라 하고 $s \in W$이면 $s' = v^1_1$, $t' = v^1_n$이라 하자. m이 홀수이고 $s \in B$인 경우 k가 짝수이면 $s' = v^m_k$, $t' = v^m_{k+1}$라 하고 k가 홀수이면 $s' = v^1_1$, $t' = v^1_n$라 하자.

$$P = (H[s, s' | C(1:k)], H[t', t | C(k+1:n)])$$

m이 홀수이고 $s \in W$이면,

$$\begin{aligned} P = \; & (H[s, v^m_k | C(i:k)], v^m_{k+1} \to v^1_{k+1} \to v^1_n, \\ & H[v^1_1, v^1_n | C(1:i-1)], \\ & H[v^m_n, t | C(k+2:n) \cap R(2:m)]) \end{aligned}$$

b) $i < j \le k$일 때(그림 4)(d), (그림 4)(e), $s \in B$, $t \in W$이면,

$$P = \begin{cases} (H[s, v^m_1 | C(1:j-1) \cap R(2:m)], H[v^m_n, v^1_n | C(k+1:n)], \\ \quad v^1_1 \to v^1_{j-1}, H[v^1_j, t | C(j:k)]) & \text{if } m \text{ is even} \\ (H[s, v^2_{j-1} | C(1:j-1) \cap R(2:m)], \\ \quad H[v^2_j, v^1_j | C(j:k) \cap R(1:m-1)], v^1_{j-1} \to v^1_1, \\ \quad H[v^1_n, v^m_{k+1} | C(k+1:n)], v^m_k \to t) & \text{if } m \text{ is odd} \end{cases}$$

$s \in W$, $t \in B$인 경우도 이와 비슷하게 해밀톤 경로를 생성할 수 있다.

(경우 3.2) 결합 에지 e_f가 열 에지 (v^z_k, v^{z+1}_k)인 경우

[보조정리 3]에 의해 $G\langle R(z+1:m)\rangle$ s와 t를 잇는 해밀톤 경로 P'가 존재한다. P'에서 $G\langle R(z+1)\rangle$에 속한 에지 (u, v)를 선택한다. 이때 u, v 모두 v^{z+1}_k이 아니어야 한다. $R(z)$에 있는 u, v와 인접한 두 정점을 각각 u', v'라 하면 [보조정리 3]에 의해 $G\langle R(1:z)\rangle$에는 u', v'를 잇는 해밀톤 경로 P''가 존재한다. P'에서 (u, v)를 제거하고 (u, u'), (v, v')를 추가하여 P''와 연결하면 해밀톤 경로 P를 생성할 수 있다(그림 4)(f). □

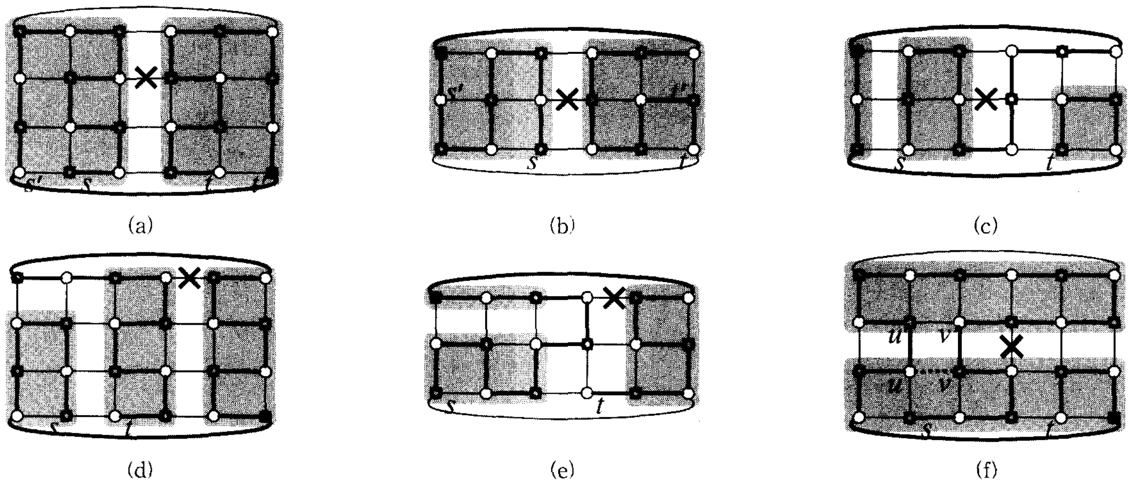
[정리 1] $m \ge 2$, $n \ge 4$인 짝수일 때, 하나의 결합 에지를 갖는 $M_2(m, n)$는 강한 해밀톤 laceable 그래프이다.

[증명] 하나의 결합 에지를 갖는 $M_2(m, n)$에 L^{opt}-경로가 존재함을 보인다. 결합 요소가 에지인 경우 [보조정리 5]에 의해 임의의 검정 정점과 임의의 흰색 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재하므로 임의의 두 정점 s와 t가 같은 색을 지니는 경우 이들을 잇는 길이 $mn-2$인 L^{opt}-경로가 존재함을 보인다. 결합 에지 $e_f = (u, v)$라 하고 $u \in B, v \in W$ 그리고 $s, t \in B$으로 가정한다. v를 결합 정점으로 가정하면 [보조정리 4]에 의해 길이가 $mn-2$인 경로 P를 생성할 수 있다. v는 결합 정점이므로 P는 (u, v)를 경유하지 않는다. 따라서 P는 s와 t를 잇는 L^{opt}-경로이다. $s, t \in W$인 경우도 비슷한 방법으로 L^{opt}-경로를 생성할 수 있다. □

4. 응 용

[정리 1]과 [21]에 의해 $m \ge 2$, $n \ge 4$인 짝수인 $M_2(m, n)$은 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 알 수 있다. 이 절에서는 $M_2(m, n)$의 고장 해밀톤 성질을 3차원 메쉬, 재귀원형군, 하이퍼큐브에 적용시켜 이들 연결망들의 고장 해밀톤 성질들을 보인다.

3차원 메쉬는 그래프 $M(m_1, m_2, m_3) = (V, E)$라 하자. 이때 정점 집합



(그림 4) [보조정리 5](경우 3) 증명의 설명

$V = \{v^i_{j,k} \mid 1 \le i \le m_1, 1 \le j \le m_2, 1 \le k \le m_3\}$,

에지 집합

$$\begin{aligned} E = &\{(v^i_{j,k}, v^{i+1}_{j,k}) \mid 1 \le i < m_1, 1 \le j \le m_2, 1 \le k \le m_3\} \\ &\cup \{(v^i_{j,k}, v^i_{j+1,k}) \mid 1 \le i \le m_1, 1 \le j < m_2, 1 \le k \le m_3\} \\ &\cup \{(v^i_{j,k}, v^i_{j,k+1}) \mid 1 \le j \le m_2, 1 \le k < m_3\} \end{aligned}$$

이다. 전체 정점의 수는 $m_1m_2m_3$개, 분지수는 6이며 최소 분지수는 3인 이분 그래프이다. 3차원 메쉬는 [18]에서 짝수 개의 정점을 지니는 경우 길이 해밀톤 사이클을 지니며 이를 생성하는 선형시간 알고리즘이 알려져 있다. 또한 홀수 개의 정점을 지니는 경우 길이 $m_1m_2m_3-1$인 사이클이 존재함이 알려져 있다. 그러나 결함 에지나 결함 노드를 지닌 경우 해밀톤 성질에 대해서는 알려진 바 없다.

[정리 2] 하나의 결함 정점 또는 에지를 지닌 노드 수가 짝수인 3차원 메쉬는 강한 해밀톤 laceable 그래프이다.

[증명] 짝수 개의 노드들을 갖는 3차원 메쉬는 m_1, m_2, m_3 중 적어도 하나는 짝수이다. $M(m_1, m_2, m_3)$는 $P_{m_1} \times P_{m_2} \times P_{m_3}$형태이므로 일반성을 잃지 않고 m_3는 짝수로 가정한다. $m_2 \times m_3$ 메쉬에서 꼭지정점과 이웃한 정점을 잇는 해밀톤 경로를 $P = (v^{x_1}_{y_1}, v^{x_2}_{y_2}, \cdots, v^{x_d}_{y_d}, \cdots, v^{x_{m_2m_3}}_{y_{m_2m_3}})$라 하자. 이때 $1 \le d \le m_2m_3, 1 \le x_d \le m_2, 1 \le y_d \le m_3$이다. $M(m_1, m_2, m_3)$의 각 정점들 $v^i_{x_d, y_d}$을 $M_2(m_1, m_2, m_3)$의 v^i_d로 사상시키면 $M(m_1, m_2, m_3)$이 $M_2(m_1, m_2, m_3)$을 스패닝 부 그래프로 지님을 알 수 있다. 따라서 정리 1에 의해 임의의 두 정점을 잇는 1-고장 L^{opt}-경로가 존재한다. □

재귀원형군 $G(N, d)$는 N개의 정점 $\{v_0, v_1, \cdots, v_{N-1}\}$을 지니고 $s + d^i \equiv t \pmod N$을 만족하는 $0 \le i \le \lceil \log_d N \rceil - 1$이 존재하면 두 정점 v_s와 v_t 사이에 에지를 지닌다. $N = cd^m$ $(d \ge 2, 1 \le c < d)$일 때 노드 대칭적이며 재귀적 구조를 갖는다. $G(cd^m, d)$는 $cd^{m-1} \times d$ 메쉬를 스패닝 부 그래프로 지닌다. 이분 그래프가 아닌 $G(cd^m, d)$는 $\deg(G)-3$개의 결함 요소가 발생하더라도 임의의 두 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다[22]. 여기서 $\deg(G)$는 $G(cd^m, d)$의 분지수를 의미한다. 그러나 이분 그래프인 경우 고장 해밀톤 성질에 대해 연구되어 있지 않다.

[정리 3] 이분 그래프인 재귀원형군 $G(cd^m, d)$는 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프이다.

[증명] $c \ge 4$인 짝수이고 $d \ge c$인 홀수인 경우 $G(cd^m, d)$는 이분 그래프이다. $G(cd^m, d)$의 정점 $v_k (0 \le k \le cd^m)$는 $M_2(d, cd^{m-1})$의 v^i_j로 사상시키면 $G(cd^m, d)$이 $M_2(d, cd^{m-1})$을 스패닝 부 그래프로 지님을 알 수 있다. 여기서 $j = \lfloor k/d \rfloor + 1$, $i = (k \bmod d) + 1$이다. 정리 1을 적용시켜 위 정리가 성립함을 알 수 있다. □

n-차원 하이퍼큐브 Q_n은 2^n개의 정점들과 $n2^{n-1}$개의 에지들로 구성된다. 각 정점의 주소는 n-비트 이진수 $b_nb_{n-1} \cdots b_1$로 표기되며 임의의 두 정점의 주소가 정확히 1비트만 다른 경우 그들 사이에 에지가 존재하며 i-번째 비트가 다르면 이 에지를 i-차원 에지라 한다. 또한 Q_n에 있는 k-차원 부 큐브는 집합 $0, 1, *$에 속한 n개의 심벌로 나타낼 수 있다. 여기서 $*$는 don't care 심벌을 의미하며 k-차원 부 큐브는 정확히 k개의 $*$를 지닌다. Q_n은 $n \ge 2$이면 강한 해밀톤 laceable 그래프이며 $n \ge 3$이면 하나의 결함 정점이 발생하더라도 해밀톤 laceable 그래프임이 알려져 있다. 최근 [9]에서는 $n-2$개의 결함 에지를 갖더라도 강한 해밀톤 laceable 그래프이고 $n-3$개의 결함 에지와 하나의 결함 정점을 갖더라도 해밀톤 laceable 그래프임을 보였다. 다음은 $n-3$개의 결함에지와 하나의 결함 정점을 지닌 Q_n이 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다.

[보조정리 6] $f_e \le n-3$, $1 \le r \le n - f_e - 2$라 하자. f_e개의 결함 에지를 지닌 Q_n $(n \ge 4)$은 $M_2(2^r, 2^{n-r})$을 스패닝 부 그래프로 지닌다.

[증명] Q_n에서 차원들의 집합을 $D = 1, 2, \cdots, n$이라 하고 결함 에지들이 속한 차원들의 집합을 $D_f = f_1, f_2, \cdots, f_i$, 결함이 없는 에지들로만 이루어진 차원의 집합을 $D_s = s_1, s_2, \cdots, s_j$라 하자. $D = D_f \cup D_s$이며 $D_f \cap D_s = \emptyset$이다.

Q_n에 있는 각 정점들의 $b_{s_1}, b_{s_2}, \cdots, b_{s_r}$ 비트를 모두 '$*$'로 변경시키면 2^{n-r}개의 콤포넌트(component)들로 분할되며 이들 콤포넌트들은 Q_{n-r}형태를 이룬다(그림 5)(a). 이러한 그래프를 Q_n의 축약 그래프(condensation graph) Q^C_{n-r}라 하자. 이때 Q^C_{n-r}의 각 정점은 Q_r인 콤포넌트이며 r개의 $*$를 포함하는 n-비트 주소로 표현된다. Q_n에 있는 이웃한 두 정점을 각각 u, v라 하고 Q^C_{n-r}에 있는 C_u와 C_v를 각각 u와 v를 포함하는 콤포넌트라 하자. 만약 (u, v)가 결함에지라면 Q^C_{n-r}의 (C_u, C_v)를 결함 에지로 가정한다(그림 5)(b).

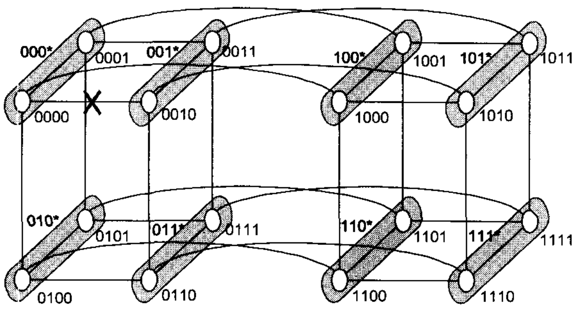
Q_n은 $n-2$개의 결함 에지를 지닌 경우 해밀톤 사이클이 존재하며 이를 위한 $O(n^2)$알고리즘이 알려져 있다[23, 24]. $f_e \le n-r-2$이므로 Q^C_{n-r}에는 해밀톤 사이클이 존재하며 이 사이클을 $C = (x_1, x_2, \cdots, x_d, x_{2^{n-r}}, x_1)$라 하자.

Q_n의 각 정점들 $b_nb_{n-1} \cdots b_2b_1$에서

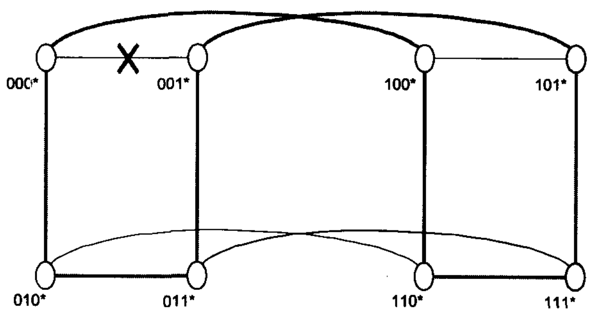
i) $b_{s_1}, b_{s_2}, \cdots, b_{s_r}$ 비트를 제외한 $(n-r)$-비트가 x_d이고,

ii) $b_{s_1}b_{s_2} \cdots b_{s_r}$가 r-비트로 구성된 그레이 코드의 $k(1 \le k \le 2^r)$번째 코드

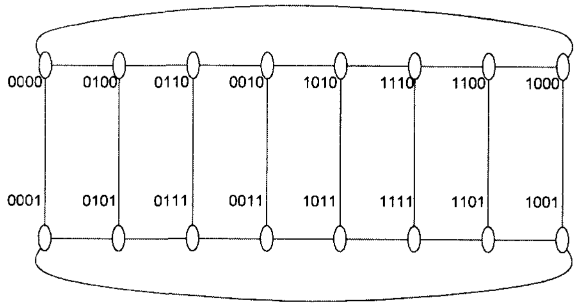
라 하자. Q_n의 각 정점들을 $M_2(2^r,2^{n-r})$의 v_d^k로 사상시키면 위 정리가 성립함을 알 수 있다(그림 5)(c). □



(a) Q_4



(b) Q_{4-1}^C의 해밀톤 사이클



(c) $M_2(2,8)$에 임베딩

(그림 5) [보조정리 6] 증명의 설명

[정리 4] $f_v \le 1, f \le n-2$라 하자. f개의 결함 요소를 지닌 n-차원 하이퍼큐브 Q_n은 강한 해밀톤 laceable 그래프이다.

[증명] [보조정리 6]에 의해 $f_e \le n-3$인 Q_n은 $M_2(2^r,2^{n-r})$을 스패닝 부 그래프로 지닌다. 여기서 $1 \le r \le n-f_e-2$이다. $M_2(2^r,2^{n-r})$은 [정리 1]에 의해 하나의 결함 정점 또는 결함 에지를 지니더라도 임의의 두 정점을 잇는 L^{opt}-경로를 지니므로 위 정리가 성립함을 알 수 있다. □

5. 결 론

본 논문에서는 $m \times n$ 메쉬에 두 개의 랩어라운드 링크를 추가한 연결망 $M_2(m,n)$의 고장 해밀톤 성질에 대해 고려하였다. $M_2(m,n)$이 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 증명하였다. $M_2(m,n)$은 다차원메쉬, 재귀원형군, 하이퍼큐브, 이중 루프 네트워크, k-ary n-큐브와 같은 여러 상호연결망의 스패닝 부 그래프이다. 따라서 본 논문의 결과는 이들 연결망들의 고장 해밀톤 성질을 밝히는데 활용될 수 있다. $M_2(m,n)$이 3차원 메쉬, 재귀원형군의 스패닝 부 그래프임을 보임으로써 이들 연결망들이 1-고장 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보였다. 또한 n-차원 하이퍼큐브 Q_n이 $f_e(\le n-3)$개의 결함 에지를 지니더라도 $M_2(2^r,2^{n-r})$ $(1 \le r \le n-f_e-2)$를 스패닝 부 그래프로 지님으로써 Q_n이 하나의 결함 정점과 $n-3$개의 결함 에지를 지니더라도 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보였다.

참 고 문 헌

[1] J. H. Park and H. C. Kim, "Fault hamiltonicity of product graph of path and cycle," *International Conference, Computing and Combinatorics Conference* (COCOON), pp. 319-328, 2003.

[2] Intel Corporation literature, Intel Corporation, 1991.

[3] F. T. Leighton, 'Introduction to Parallel Algorithms and Architectures : Arrays, Trees,' Hypercubes. San Mateo, Cailf. : Morgan-Kaufmann, 1992.

[4] T. Leighton, B. Maggs and R. Sitaraman, "On the fault tolerance of some popular bounded-degree networks," *Proc. IEEE Symp. Foundations of Computer Science*, pp. 542-552, 1992.

[5] V. Balasubramanian and P. Banerjee, "A fault tolerant massively parallel processing architecture," *Journal of Parallel and Distributed Computing*, Vol.4, pp.363-383, 1987.

[6] M. Ajtai, N. Alon, J. Bruck, R. Cypher, C. T. Ho, M. Naor and E. Szemerédi, "Fault tolerant graphs, perfect hash functions and disjoint paths," *Proc. IEEE Symp. Foundations of Computer Science*, pp.693-702, 1992.

[7] J. Bruck, R. Cypher and C. Ho, "Fault-tolerant meshes with small degree," *SIAM J. Computing*, Vol.26, No.6, pp. 1764-1784, 1997.

[8] L. Zhang, "Fault-tolerant meshes with small degree," *IEEE Transactions on Computers*, Vol.51, No.5, pp.553-560, 2002.

[9] C.-H. Tsai, J. M. Tan, T. Lian and L.-H. Hsu, "Fault-tolerant hamiltonian laceability of hypercubes," Information Processing Letters, No.83, pp.301-306, 2002.

[10] C.-H. Tsai, J. M. Tan, Y. C. Chuang and L.-H. Hsu, "Fault-free cycles and links in faulty recursive circulant

graphs," *Proc. of the ICS 2000 Workshop on Algorithms and Theory of Computation*, pp.74-77, 2000.

[11] Y. A. Ashir and I. A. Stewart, "Fault-tolerant embeddings of hamiltonian circuits in k-ary n-cubes," *SIAM Journal on Discrete mathematics*, Vol.15, No.3, pp.317-328, 2002.

[12] W. T. Huang, Y. C. Chuang, J. J. Tan and L. H. Hsu, "On the fault-tolerant hamiltonicity of faulty crossed cubes," *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol.E85-A, No.6, pp. 1359-1370, 2002.

[13] G. Simmons, "Almost all n-dimensional rectangular lattices are Hamiltonian laceable," *Congr. Numer.*, Vol.21, pp. 103-108, 1978.

[14] S. Y. Hsieh, G. H. Chen and C. W. Ho, "Hamiltonian-laceability of star graphs," *Networks*, Vol.36, No.4, pp. 225-232, 2000.

[15] C. C. Chen and N. F. Quimpo, "On strongly hamiltonian abelian group graphs," *Combinatorial Mathematics VIII. Lecture Notes in Mathematics*, Vol.884, pp.23-34, 1980.

[16] S. D. Chen, H. Shen and R. W. Topor, "An efficient algorithm for constructing hamiltonian paths in meshes," *Parallel Computing*, Vol.28, pp.1293-1305, 2002.

[17] A. Itai, C. H. Papadimitriou and J. L. Czwarcfiter, "Hamiltonian paths in grid graphs," *SIAM Journal of Computing*, Vol.11, No.4, pp.676-686, 1982.

[18] S. D. Chen, H. Shen and R. W. Topor, "Permutation-based range-join algorithms on N-dimensional meshes," *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, Vol.13, No.4, pp.413-431, 2002.

[19] J. S. Kim, S. R. Maeng and H. Yoon, "Embedding of rings in 2-D meshes and tori with faulty nodes," *Journal of Systems Architecture*, Vol.43, pp.643-654, 1997.

[20] H. C. Kim and J. H. Park, "Fault hamiltonicity of two-dimensional torus networks," *Workshop on Algorithms and Computation* (WAAC'00), pp.110-117, 2000.

[21] 박경욱, 이형옥, 임형석, "두 개의 랩어라운드 에지를 갖는 메쉬의 고장 해밀톤 성질", 한국정보과학회논문지, Vol.30, No.8, pp.434-444, 2003.

[22] C. -H. Tsai, "Hamiltonian properties of faulty recursive circulant graphs," *Journal of Interconnection Networks*, Vol.3, No.3&4, pp.273-289, 2002.

[23] S. Latifi, S. Q. Zheng and N. Bagherzadeh, "Optimal ring embedding in hypercubes with faulty links," *Proc. International Symposium on Fault-Tolerant Computing*(FTCS '92), pp.178-184, 1992.

[24] S. Latifi, S. Q. Zheng and N. Bagherzadeh, "Hamiltonian path and cycle in hypercubes with faulty links," *Proc. International Conference on Algorithms and Architectures for Parallel Processing*(ICA3PP'02), pp.471-478, 2002.

박 경 욱

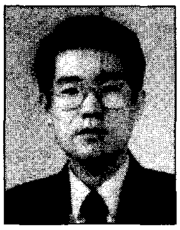
e-mail : kwpark@csblue.chonnam.ac.kr

1996년 순천대학교 전자계산학과(이학사)

1999년 전남대학교 전산통계학과(이학석사)

2000년~현재 전남대학교 전산학과 박사과정

관심분야 : 병렬 및 분산처리, 그래프 이론, 알고리즘



임 형 석

e-mail : hslim@chonnam.chonnam.ac.kr

1983년 서울대학교 컴퓨터 공학과 (학사)

1985년 한국과학기술원 전산학과 (석사)

1993년 한국과학기술원 전산학과 (박사)

1996년~1997년 미국 퍼듀대학교 전산학과 방문교수

1987년~현재 전남대학교 전산학과 교수

관심분야 : 계산이론, 알고리즘, 병렬 및 분산처리