관측가능하지 않은 다중출력 비선형 시스템의 관측기 설계기법

Observer Design for Multi-Output Unobservable Nonlinear Systems

조 남 훈*
(Nam-Hoon Jo)

Abstrac : The observer design problem is studied for a class of multi-output nonlinear systems that are not necessarily observable. Generalized nonlinear observer canonical form is introduced for multi-output nonlinear systems to design nonlinear observers. Sufficient conditions are given for a nonlinear system to be transformed by state-space change of coordinates into generalized nonlinear observer canonical form. Based on this canonical from, a sufficient condition is also given for the existence of nonlinear observers. An illustrative example is presented to show the design procedure of the proposed method.

Keywords : nonlinear system, nonlinear observer canonical form, generalized nonlinear observer canonical form, observable, observability indices

I. 서론

비선형 시스템에 대한 제어기 설계기법은 최근 20여년간 매우 활발히 진행되어 온 연구 주제중의 하나이다.[1][2] 이러한 연구결과의 상당수는 시스템의 상태변수에 대한 모든 정보를 알고 있다는 가정하에서 사용될 수 있는 상태 궤환 제어기의 설계기법에 대한 것이다. 하지만, 모든 상태를 측정하는 것은 대부분의 경우에 매우 어려운 문제이고, 또 가능하다고 하더라도 몇몇 센서는 매우 고가이므로 실제 현장에서 모든 상태를 정확히 측정한다는 것은 거의 불가능하다. 따라서 비선형 시스템의 모든 상태를 측정할 필요가 없는 출력궤환 제어기에 대한 연구가 최근 활발히 수행되었으며, 이를 위한 상태관측기의 설계는 매우 중요한 문제이다. Krener와 Isidori는 참고문헌 [3]에서 단일 출력 비선형 시스템에 대해서 비선형 관측기 표준형을 이용한 관측기 설계기법을 제시하였다. 이들의 결과를 다중 출력 시스템으로 확장한 결과는 참고문헌 [4]에서 제시되었으며, 여기서는 비선형 관측기 표준형으로 변환될 수 있는 필요조건을 제시하였는데, 이는 시스템의 비선형성이 미지 상태(unknown states)에 대해서는 다항식형태로만 표현되며 그 최대차수도 제한된다는 것이다. 참고 문헌 [5]에서는 다중 출력 비선형 시스템에 대한 상태변환을 용이하게 계산할 수 있는 기법을 제시하였으며, 참고문헌 [6]에서는 더욱 일반적인 비선형성을 고려하기 위하여 블록 삼각 비선형 관측기 표준형이 제시되었다. 위의 결과들은 관측기를 설계하기 위하여 비선형 시스템이 관측가능(observable)하다는 가정을 필요로 하며, 따라서 관측가능하지 않은 비선형 시스템에 대해서는 적용이 불가능하다. 최근에, 관측가능하지 않은 시스템에 대한 관측기 설계기법이 참고 문헌 [7][8]에서 제시되었는데, 이들은 단일 출력 비선형 시스템에 대해서만 적용 가능하였다. 다중출력 비선형 시스템에 대한 관측가능성은 단일 출력 시스템의 관측가능성을 간단히 확장할 수 없는 개념이므로, 참고문헌 [7][8]에서는 다중출력 시스템에 대해서는 관측기 설계기법을 제시하지 못했다.

본 논문에서는 관측가능하지 않은 다중 출력 비선형 시스템에 대한 관측기 설계기법을 제시하고자 한다. 우선, 참고문헌 [3-6]에서 사용된 비선형 관측기 표준형을 다중 출력시스템에 대해서 확장한 일반화된 비선형 관측기 표준형 (generalized nonlinear observer canonical form : GNOCF)을 제시하고, 주어진 비선형 시스템이 제시된 표준형으로 변환되기 위한 조건을 제시한다. 또한, 제시된 표준형에 대해서 관측기가 존재하기 위한 조건을 리아프노프 함수를 이용하여 제시한다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2장에서는 참고문헌 [4][5]에서 제안한 다중출력 시스템의 관측가능성과 비선형 관측기 표준형에 대해서 소개한다. 3장에서는 일반화된 비선형 관측기 표준형을 제시하고, 이를 이용한 관측기 설계기법을 제공한다. 4장에서는 제안된 관측기의 설계방법을 예제를 통하여 설명하고, 마지막으로 5장에서는 본 논문에 대한 결론을 제시한다.

시작하기 전에, 본 논문에서 사용되는 주요 용어를 정의하도록 한다. 어떤 다항식의 모든 근이 음의 실수부(negative real part)를 갖는 경우 이 다항식을 Hurwitz라 하며, 마찬가지로 어떤 행렬의 모든 고유치(eigenvalue)가 음의 실수부를 갖는 경우 이 행렬을 Hurwitz라고 한다. 대칭행렬 $A\in R^{n\times n}$가 모든 $x\in R^n$, $x\neq 0$에 대해서 $x^TAx>0$을 만족하면 양정치(positive definite) 행렬이라고 한다. 어떤 벡터장(vector field) f에 대해서, 미분방정식 $\dot{x}=f(x)$의 해가

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수 : 2004. 2. 5., 채택확정 : 2004. 5. 7.
조남훈 : 숭실대학교 전기제어시스템공학부(nhjo@ssu.ac.kr)
※ 본 연구는 숭실대학교 교내연구비 지원으로 수행되었음.

모든 $t\in R$에 대해서 존재하면 벡터장 f를 완전(complete)하다고 한다. 어떤 벡터장 $f:R^n\to R^n$와 평활한 함수 $h:R^n\to R$에 대해서 $L_f h=\frac{\partial h}{\partial x}f$ 이고 $L_f^i h=L_f(L_f^{i-1}h)$, $i\ge 2$ 이다. 두 벡터장 $f:R^n\to R^n$와 $g:R^n\to R^n$의 Lie Bracket은 $[f,g]=\frac{\partial g}{\partial x}f-\frac{\partial f}{\partial x}g$로 정의된다. 두 벡터장 $f:R^n\to R^n$와 $g:R^n\to R^n$에 대해서 $ad_f^0 g=g$ 이고 $ad_f^k g=[f,ad_f^{k-1}g]$, $i\ge 1$ 이다. 미분 가능한 함수 $f(x_1,x_2)$의 x_1과 x_2에 대한 미분은 각각 $D_1 f(x_1,x_2)$와 $D_2 f(x_1,x_2)$로 표기한다. 행렬 $P\in R^{r\times r}$의 최소 고유치와 최대 고유치는 각각 $\lambda_m(P)$와 $\lambda_M(P)$로 표기한다.

II. 비선형 관측기 표준형

본 논문에서는 다음과 같은 다중입력 다중출력 비선형 시스템을 고려한다 :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x)+g(x,u)\\ y &= h(x)\end{aligned} \tag{1}$$

여기서, $x\in R^n$는 상태벡터, $u\in R^l$은 입력, $y\in R^m$은 출력이고 $f(0)=0$, $h(0)=0$, $g(x,0)=0$, $\forall x\in R^n$을 만족한다. 다중출력 비선형 시스템에 대해서 관측기를 설계하기 위해서는 우선, 시스템의 관측지수와 관측가능성에 대한 정의가 필요하다. 시스템 (1)에 대해서

$$\begin{aligned}s_0 &= \text{rank}\{dh_i:1\le i\le m\}\\ &\vdots\\ s_k &= \text{rank}\{dh_i,\cdots,d(L_f^k h_i):1\le i\le m\}\\ &\quad-\text{rank}\{dh_i,\cdots,d(L_f^{k-1}h_i):1\le i\le m\}\\ &\vdots\\ s_{n-1} &= \text{rank}\{dh_i,\cdots,d(L_f^{n-1}h_i):1\le i\le m\}\\ &\quad-\text{rank}\{dh_i,\cdots,d(L_f^{n-2}h_i):1\le i\le m\}\end{aligned} \tag{2}$$

를 정의하고, (2)를 이용하여 다시

$$k_i=\text{card}\{s_j\ge i:0\le j\le n-1\} \tag{3}$$

를 정의한다.

정의 1 : [4][9] 원점(origin) 근방(neighborhood) U가 존재하여 $s_0,s_1,\cdots,s_{n-1}$가 원점 근방 U에서 상수이면, $(k_1,\cdots,k_m)$를 **관측지수**라고 부른다.

정의 2 : [4][9] 원점 근방 U 가 존재하여 출력 $y_1,\cdots,y_m$을 서로 적절히 교환한 후, U에서

$$\text{rank}\{L_f^{j-1}(dh_i):i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,k_i\}=n$$

이 만족되면 시스템 (1)은 원점에서 **관측가능**이라고 한다.

첨언 1 : 정의 2로부터 $k_1+\cdots+k_m<n$ 이면 출력 $y_1,\cdots,y_m$을 어떠한 순서로 재배열하더라도

$$\text{rank}\{L_f^{j-1}(dh_i):i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,k_i\}=n$$

을 만족할 수 없기 때문에 시스템 (1)은 관측 가능하지 않음을 알 수 있다.

대부분의 비선형 관측기에 대한 연구결과[3-6]는 관측기를 설계하기 위하여 시스템 (1)이 관측가능하다는 조건을 필요로 한다. 시스템 (1)이 관측가능한 경우, 비선형 관측기 표준형을 이용하여 비선형 관측기를 설계할 수 있는데, 이에 대한 자세한 결과는 참고문헌 [4][5]를 참고하기로 하고 본 논문에서는 비선형 관측기 표준형에 대한 정의만 소개하기로 한다.

정의 3 : 다음과 같은 다중출력 비선형 시스템을 **비선형 관측기 표준형**(Nonlinear observer canonical form) 이라고 한다.

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az+\gamma(y,u)\\ y &= Cz\end{aligned} \tag{4}$$

여기서

$$A=\text{block diag}[A_1,\cdots A_m]$$
$$C=\text{block diag}[c_1,\cdots,c_m]$$

이고 $A_i\in R^{k_i\times k_i}$, $c_i\in R^{1\times k_i}$ 는 (5)와 같은 Brunovsky 표준 행렬이며 $k_1+\cdots+k_m=n$을 만족한다.

$$A_i=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix},\quad c_i=[0\ 0\ \cdots\ 0\ 1] \tag{5}$$

III. 일반화된 비선형 관측기 표준형

시스템 (1)이 관측가능하지 않은 경우에는, 즉 출력 $y_1,\cdots,y_m$을 어떠한 방식으로 교환하더라도

$$\text{rank}\{L_f^{j-1}(dh_i):i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,k_i\}<n \tag{6}$$

이면, 기존의 방법[3-6]으로는 관측기 설계가 불가능하다. 이러한 경우, 관측기를 설계하기 위하여 본 논문에서는 비선형 관측기 표준형을 확장하여 다음과 같은 일반화된 비선형 관측기 표준형을 제안한다.

정의 4 : 다음과 같은 비선형 시스템을 **일반화된 비선형 관측기 표준형(Generalized Nonlinear Observer Canonical Form : GNOCF)** 이라고 한다.

$$\begin{aligned}\dot{z}_o &= A_o z_o+\gamma_o(y,u)\\ \dot{z}_{\bar{o}} &= A_{\bar{o}o}z_o+f_{\bar{o}}(y,z_{\bar{o}})+\gamma_{\bar{o}}(y,u)\\ y &= C_o z_o\end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $z_o\in R^\rho$, $z_{\bar{o}}\in R^{n-\rho}$이고 $A_{\bar{o}o}\in R^{(n-\rho)\times\rho}$는 임의의 행렬이며 ($1\le\rho\le n$),

$$A_o=\text{block diag}[A_1,\cdots A_m]$$

$$C_o = \text{block diag}[c_1, \cdots, c_m]$$

이고 $A_i \in R^{k_i \times k_i}$, $c_i \in R^{1 \times k_i}$ 는 Brunovsky 표준 행렬이다.

비선형관측기 표준형에서는 $k_1 + \cdots + k_m = n$을 만족해야 하지만, GNOCF에서는 이를 만족할 필요가 없으므로 더욱 많은 비선형 시스템이 GNOCF로 변환될 수 있다. 이제,

$$r = k_1 + k_2 + \cdots + k_m \tag{8}$$

을 정의하면, 시스템 (1)이 관측가능하지 않더라도 출력 $y_1, \cdots, y_m$을 적절히 교환하여 다음을 만족하도록 할 수 있다.

$$\text{rank}\{L_f^{j-1}(dh_i) : i = 1, \cdots, m ; j = 1, \cdots, k_i\} = r \tag{9}$$

이와 같이 (9)를 만족하도록 교환된 출력 $y_1, \cdots, y_m$에 대해서

$$L_{\tau_i} L_f^{k-1} h_j = \delta_{i,j}\delta_{k,k_j}, \quad \begin{array}{l} 1 \le i, j \le m \\ 1 \le k \le k_i \end{array} \tag{10}$$

을 만족하는 벡터장을 $\tau_1, \cdots, \tau_m$이라 하고 이를 이용하여 새로운 벡터장

$$X_{ij} = ad_{(-f)}^{j-1} \tau_i, \quad \begin{array}{l} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le k_i \end{array} \tag{11}$$

를 정의하자. 또한, 앞으로 표기를 간단히 하기 위하여 벡터장 X_{ij}를

$$X_{ij} = X_{k_1 + k_2 + \cdots + k_{i-1} + j} \tag{12}$$

와 같이 벡터장 X_k , $1 \le k \le r$. 로 표기하도록 하고 (9)를 만족하도록 교환된 출력 $y_1, \cdots, y_m$에 대해서 다음을 정의하자.

$$\begin{aligned} Q &= \{L_f^{j-1}(dh_i) : 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le k_i\} \\ Q_j &= \{dh_i, \cdots, L_f^{k_i - 1}(dh_i) : 1 \le i \le m, \ i \ne j\} \\ &\quad \cup \{dh_j, \cdots, L_f^{k_j - 2}(dh_j)\} \end{aligned} \tag{13}$$

정리 1 : (9)를 만족하도록 재배열된 출력 $y_1, \cdots, y_m$에 대해서 벡터장 $\tau_1, \cdots, \tau_m, X_{r+1}, \cdots, X_n$과 원점 근방 U가 존재하여 아래의 조건 i)-vi)을 $\forall x \in U$에서 만족하면, 비선형 시스템 (1)을 GNOCF (7)로 변환시키는 국소적 상태변환(local state transformation) $z = T(x)$, $T(0) = 0$, $z \in R^n$ 이 존재한다.

i) 모든 $j = 1, \cdots, m$에 대해서

$$\text{span } Q_j = \text{span } Q \cap Q_j$$

ii) $\text{rank}\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} = n$

iii) $[X_i, X_j] = 0, \quad 1 \le i, j \le n$

iv) $L_{X_i} h_j = 0, \quad r+1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le m$

v) $$\begin{aligned} [g, X_{ij}] &= 0, \quad 1 \le i \le m \\ &\qquad\quad 1 \le j \le k_i - 1 \\ [g, X_i] &= 0, \quad r+1 \le i \le n \end{aligned}$$

vi) 평활한 함수 $\alpha_{r+1}(x), \cdots, \alpha_n(x)$가 존재하여

$$[f, X_j] = \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i(x) X_i, \quad r+1 \le j \le n$$

을 만족한다.

또한, 조건 i)-vi)에 추가적으로 조건 vii)이 만족되면 전역적 상태변환(global state transformation) 이 존재한다.

vii) $X_1, \cdots, X_r$은 완전한(complete) 벡터장이다.

증명 : 조건 i)을 만족하므로 (10)을 만족하는 벡터장 $\tau_1, \cdots, \tau_m$이 존재하며[5], 이로부터 다시 벡터장 X_{ij}와 X_i를 구할 수 있다. 이제 조건 (ii), (iii)을 동시적교화(Simultaneous rectification)정리[2]에 적용하면 상태변환

$$\begin{aligned} z &= (z_{11}, \cdots, z_{1k_1}, \cdots, z_{m1}, \cdots, z_{lk_m}, z_{r+1}, \cdots, z_n) \\ &= T(x) \\ &= (T_1(x), \cdots, T_n(x)) \end{aligned}$$

이 존재하여

$$\begin{aligned} T_* X_{ij} \circ T^{-1}(z) &= \frac{\partial}{\partial z_{ij}}, \quad 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le k_i \\ T_* X_i \circ T^{-1}(z) &= \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad r+1 \le i \le n \end{aligned}$$

을 만족한다. 새로운 좌표계에서 $f(x)$를 다음과 같이 $\overline{f}(z)$로 표기하고

$$\begin{aligned} T_* f \circ T^{-1}(z) &= \overline{f_{11}} \frac{\partial}{\partial z_{11}} + \cdots + \overline{f_{1k_1}} \frac{\partial}{\partial z_{1k_1}} + \cdots \\ &\quad + \overline{f_{m1}} \frac{\partial}{\partial z_{m1}} + \cdots + \overline{f_{mk_m}} \frac{\partial}{\partial z_{mk_m}} \\ &\quad + \overline{f_{r+1}} \frac{\partial}{\partial z_{r+1}} + \cdots + \overline{f_n} \frac{\partial}{\partial z_n} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_k} \overline{f_{kl}} \frac{\partial}{\partial z_{kl}} + \sum_{k=r+1}^{n} \overline{f_k} \frac{\partial}{\partial z_k} \end{aligned}$$

(14)를 사용하면, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le k_i - 1$일 때,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_{ij+1}} &= T_* X_{ij+1} \circ T^{-1}(z) \\ &= T_* ad_{(-f)}^{j+1} \tau_i \circ T^{-1}(z) \\ &= T_*[-f, ad_{(-f)}^{j} \tau_i] \circ T^{-1}(z) \\ &= [-T_* f \circ T^{-1}(z), T_* ad_{(-f)}^{j} \tau_i \circ T^{-1}(z)] \\ &= -\left[T_* f \circ T^{-1}(z), \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \right] \\ &= -\left[\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_k} \overline{f_{kl}} \frac{\partial}{\partial z_{kl}} + \sum_{k=r+1}^{n} \overline{f_k} \frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_k} \frac{\partial \overline{f_{kl}}}{\partial z_{ij}} \frac{\partial}{\partial z_{kl}} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\partial \overline{f_k}}{\partial z_{ij}} \frac{\partial}{\partial z_k} \end{aligned}$$

이다. 이로부터

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\overline{f_{kl}} = \delta_{k,i}\delta_{l,j+1}, && 1\le i,k\le m, \\ & && 1\le j\le k_i-1 \\ & && 1\le l\le k_k \\ &\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\overline{f_k} = 0, && 1\le i\le m \\ & && 1\le j\le k_i-1 \\ & && r+1\le k\le n \end{aligned} \tag{15}$$

을 얻는다. 따라서 $\overline{f}_{11},\overline{f}_{21},\cdots,\overline{f}_{m1}$은 $z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m}$, $z_{r+1},\cdots,z_n$만의 함수이고 $\overline{f_{ij}}-z_{ij-1}$, $1\le i\le m$, $2\le j\le \overline{k_i}$ 은 $z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m}$, $z_{r+1},\cdots,z_n$만의 함수이고 $\overline{f_{r+1}},\cdots,\overline{f_n}$은 $z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m}$, $z_{r+1},\cdots,z_n$만의 함수임을 알 수 있다. 또한, 조건 (vi)으로부터 $r+1\le j\le n$일 때

$$T_*[f,X_j]\circ T^{-1}(z) = T_*\Big(\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i(x)X_i\Big)\circ T^{-1}(z)$$

이고

$$\begin{aligned} &T_*[f,X_j]\circ T^{-1}(z) \\ &=[\,T_*f\circ T^{-1}(z),\,T_*X_j\circ T^{-1}(z)] \\ &=\Big[\overline{f},\frac{\partial}{\partial z_j}\Big] \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} &T_*\Big(\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i(x)X_i\Big)\circ T^{-1}(z) \\ &=\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i(x)\big(T_*X_i\circ T^{-1}(z)\big) \\ &=\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i(x)\frac{\partial}{\partial z_j} \end{aligned}$$

이므로

$$\Big[\overline{f},\frac{\partial}{\partial z_j}\Big]=\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i(x)\frac{\partial}{\partial z_j} \tag{16}$$

이다. 따라서, (16)으로부터 $r+1\le j\le n$일 때

$$\begin{aligned} \Big[\overline{f},\frac{\partial}{\partial z_j}\Big] &= \Big[\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{k_k}\overline{f_{kl}}\frac{\partial}{\partial z_{kl}}+\sum_{k=r+1}^{n}\overline{f_k}\frac{\partial}{\partial z_k},\frac{\partial}{\partial z_j}\Big] \\ &=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{k_k}\frac{\partial\overline{f_{kl}}}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_{kl}}+\sum_{k=r+1}^{n}\frac{\partial\overline{f_k}}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_k} \\ &=\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i(x)\frac{\partial}{\partial z_j} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z_j}\overline{f_{kl}}=0, && 1\le k\le m \\ & && 1\le l\le k_k \\ & && r+1\le j\le n \end{aligned}$$

을 얻을 수 있다. 따라서 $\overline{f}_{11},\overline{f}_{21},\cdots,\overline{f}_{m1}$은 $z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m}$만의 함수이고 $\overline{f_{ij}}-z_{ij-1}$, $1\le i\le m$, $2\le j\le\overline{k_i}$ 은 $z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m}$만의 함수이다. 따라서 $1\le i\le m$에 대해서

$$\begin{aligned} \overline{f_{i1}} &= \overline{f_{i1}}(z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m}) \\ \overline{f_{i2}} &= \overline{f_{i2}}(z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m})+z_{i1} \\ &\vdots \\ \overline{f_{ik_i}} &= \overline{f_{ik_i}}(z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m})+z_{ik_i-1} \end{aligned} \tag{17}$$

이고

$$\begin{aligned} \overline{f_{r+1}} &= \overline{f_{r+1}}(z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m},z_{r+1},\cdots,z_n) \\ &\vdots \\ \overline{f_n} &= \overline{f_n}(z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m},z_{r+1},\cdots,z_n) \end{aligned} \tag{18}$$

이다.

이제 벡터장 $g(x,u)$를 새로운 좌표계에서 다음과 같이 $\overline{g}(z)$로 표기하자:

$$T_*g\circ T^{-1}(z) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{k_k}\overline{g_{kl}}\frac{\partial}{\partial z_{kl}}+\sum_{k=r+1}^{n}\overline{g_k}\frac{\partial}{\partial z_k}$$

조건 (v)로부터

$$\begin{aligned} &T_*[g,X_j]\circ T^{-1}(z) \\ &=[\,T_*g\circ T^{-1}(z),\,T_*X_j\circ T^{-1}(z)] \\ &=\Big[\overline{g},\frac{\partial}{\partial z_j}\Big] \\ &=0 \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} &T_*[g,X_{ij}]\circ T^{-1}(z) \\ &=[\,T_*g\circ T^{-1}(z),\,T_*X_{ij}\circ T^{-1}(z)] \\ &=\Big[\overline{g},\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\Big] \\ &=0 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} &\Big[\overline{g},\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\Big]=0, && 1\le i\le m \\ & && 1\le j\le k_i-1 \\ &\Big[\overline{g},\frac{\partial}{\partial z_i}\Big]=0, && r+1\le i\le n \end{aligned} \tag{19}$$

이다. 따라서, (19)로부터 $1\le i\le m$, $1\le j\le k_i-1$일 때

$$\begin{aligned} \Big[\frac{\partial}{\partial z_{ij}},\overline{g}\Big] &= \Big[\frac{\partial}{\partial z_{ij}},\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{k_k}\overline{g_{kl}}\frac{\partial}{\partial z_{kl}}+\sum_{k=r+1}^{n}\overline{g_k}\frac{\partial}{\partial z_k}\Big] \\ &=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{k_k}\frac{\partial\overline{g_{kl}}}{\partial z_{ij}}\frac{\partial}{\partial z_{kl}}+\sum_{k=r+1}^{n}\frac{\partial\overline{g_k}}{\partial z_{ij}}\frac{\partial}{\partial z_k} \\ &=0 \end{aligned}$$

을 얻을 수 있고

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\overline{g_{kl}}}{\partial z_{ij}}=0, && 1\le i\le m \\ & && 1\le j\le k_i-1 \\ & && 1\le k\le m \\ & && 1\le l\le k_k \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\overline{g_k}}{\partial z_{ij}}=0, && 1\le i\le m \\ & && 1\le j\le k_i-1 \\ & && r+1\le k\le n \end{aligned} \tag{21}$$

를 얻을 수 있다. 또한, (19)로부터 $r+1 \le i \le n$일 때

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \bar{g}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{k_k}\overline{g_{kl}}\frac{\partial}{\partial z_{kl}} + \sum_{k=r+1}^{n}\overline{g_k}\frac{\partial}{\partial z_k}\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{k_k}\frac{\partial \overline{g_{kl}}}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial z_{kl}} + \sum_{k=r+1}^{n}\frac{\partial \overline{g_k}}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial z_k}$$
$$=0$$

을 얻을 수 있고

$$\frac{\partial \overline{g_{kl}}}{\partial z_i} = 0, \quad \begin{array}{l} r+1 \le i \le n \\ 1 \le k \le m \\ 1 \le l \le k_k \end{array} \tag{22}$$

$$\frac{\partial \overline{g_k}}{\partial z_i} = 0, \quad \begin{array}{l} r+1 \le i \le n \\ r+1 \le k \le n \end{array} \tag{23}$$

를 얻을 수 있다. 따라서, (20), (21), (22)와 (23)으로부터, $1 \le i \le m$에 대해서

$$\begin{aligned} \overline{g_{i1}} &= \overline{g_{i1}}(z_{1k_1}, \cdots, z_{mk_m}, u) \\ \overline{g_{i2}} &= \overline{g_{i2}}(z_{1k_1}, \cdots, z_{mk_m}, u) \\ &\vdots \\ \overline{g_{ik_i}} &= \overline{g_{ik_i}}(z_{1k_1}, \cdots, z_{mk_m}, u) \end{aligned} \tag{24}$$

이고

$$\begin{aligned} \overline{g_{r+1}} &= \overline{g_{r+1}}(z_{1k_1}, \cdots, z_{mk_m}, u) \\ &\vdots \\ \overline{g_n} &= \overline{g_n}(z_{1k_1}, \cdots, z_{mk_m}, u) \end{aligned} \tag{25}$$

을 알 수 있다. 또한, (10)에 Leibniz 공식[2]을 적용하면

$$L_{ad^{k-1}_{(-f)}\tau_i} h_j = \delta_{i,j}\delta_{k,k_j}, \quad 1 \le i,j \le m, \quad 1 \le k \le k_j$$

이므로

$$\begin{aligned} \delta_{i,j}\delta_{k,k_j} &= L_{ad^{k-1}_{(-f)}\tau_i} h_j \\ &= \left[\frac{\partial h_j}{\partial x}(x)\right]\cdot\left[ad^{k-1}_{(-f)}\tau_i(x)\right] \\ &= \left[\frac{\partial h_j}{\partial x}(T_*)^{-1}(z)\right]\cdot\left[T_* ad^{k-1}_{(-f)}\tau_i \circ T^{-1}(z)\right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial z} h_j \circ T^{-1}(z)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial z_{ik}} \\ &= \frac{\partial}{\partial z_{ik}} h_j \circ T^{-1}(z), \quad 1 \le i,j \le l, \ 1 \le k \le \overline{k_j} \end{aligned}$$

이고

$$h_j \circ T^{-1}(z) = z_{jk_j} + \overline{h_j}(z_{r+1}, \cdots, z_n) \tag{26}$$

이다. 또한, 가정 (iv)를 이용하면

$$L_{X_i} h_j = \left\langle dh_j, \frac{\partial}{\partial z_i}\right\rangle = \frac{\partial h_j}{\partial z_i} = 0, \quad \begin{array}{l} r+1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m \end{array}$$

을 얻을 수 있는데, $h(0)=0$라는 가정을 이용하면 (26)으로부터

$$y_i = h_i(x) = z_{ik_i} \tag{27}$$

를 얻을 수 있다. 따라서

$$\gamma^o_{ij}(y,u) = \overline{f_{ij}}(y) + \overline{g_{ij}}(y,u), \quad \begin{array}{l} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le k_i \end{array}$$

와

$$\begin{aligned} f^{\bar{o}}_i(y, z_{r+1}, \cdots, z_n) &= \overline{f_i}(y, z_{r+1}, \cdots, z_n) \\ \gamma^{\bar{o}}_i(y,u) &= \overline{g_i}(y,u), \end{aligned} \quad r+1 \le i \le n$$

을 정의하면 시스템 (1)의 z좌표계에서의 표현식은 (17), (18), (24), (25), (27)으로부터, $1 \le i \le m$ 일 때

$$\begin{aligned} \dot{z}_{i1} &= \gamma^o_{i1}(y,u) \\ \dot{z}_{i2} &= z_{i1} + \gamma^o_{i2}(y,u) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{ik_i} &= z_{ik_i-1} + \gamma^o_{ik_i}(y,u) \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} \dot{z}_{r+1} &= f^{\bar{o}}_{r+1}(y, z_{r+1}, \cdots, z_n) + \gamma^{\bar{o}}_{r+1}(y,u) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= f^{\bar{o}}_n(y, z_{r+1}, \cdots, z_n) + \gamma^{\bar{o}}_n(y,u) \end{aligned} \tag{28}$$

이다. 최종적으로

$$\begin{aligned} z_o &= [z_{11}, \cdots, z_{1k_1}, \cdots, z_m, \cdots, z_{mk_m}]^T \\ z_{\bar{o}} &= [z_{r+1}, \cdots, z_n]^T \\ \gamma_o(y,u) &= [\gamma^o_{11}, \cdots, \gamma^o_{mk_m}]^T \\ f_{\bar{o}}(y, z_{\bar{o}}) &= [f^{\bar{o}}_{r+1}, \cdots, f^{\bar{o}}_n]^T \\ \gamma_{\bar{o}}(y,u) &= [\gamma^o_{r+1}, \cdots, \gamma^o_n]^T \end{aligned}$$

을 정의하면 (27)과 (28)로부터

$$\begin{aligned} \dot{z}_o &= A_o z_o + \gamma_o(y,u) \\ \dot{z}_{\bar{o}} &= f_{\bar{o}}(y, z_{\bar{o}}) + \gamma_{\bar{o}}(y,u), \\ y &= C_o z_o \end{aligned}$$

이며, 비선형 시스템 (1)이 상태변환 $z=T(x)$에 의하여 GNOCF으로 변환됨을 확인할 수 있다. ■

첨언 2 : $k_1 \ge k_2 \ge \cdots \ge k_m$을 이용하면 정리 1의 조건 (i)의 $Q_j \cap Q$는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned} Q_j \cap Q &= \{d(L^k_f h_i) : 0 \le k \le \min(k_i, k_j) - 1, \\ &\qquad 1 \le i \le m, \ i \ne j\} \\ &\quad \cup \{dh_j, \cdots, d(L^{k_j-2}_f h_j)\} \\ &= \{d(L^k_f h_i) : 0 \le k \le k_j - 1, \ 1 \le i < j\} \\ &\quad \cup \{d(L^k_f h_i) : 0 \le k \le k_i - 1, \ j < i \le m\} \\ &\quad \cup \{dh_j, \cdots, d(L^{k_j-2}_f h_j)\} \end{aligned}$$

따라서, 만약 $k_1 \ge \cdots \ge k_s = k_{s+1} = k_{s+2} = \cdots = k_m$이라면, $j = s, s+1, \cdots, m$에 대해서는 정리 1의 조건 (i)이 항상 만족됨을 알 수 있다. 또한, 이로부터 $k_1 = k_2 = \cdots$

$=k_m$ 이라면 정리 1의 조건 (i)은 자동으로 만족됨을 쉽게 확인할 수 있다.

첨언 3 : 정리 1의 조건이 모두 만족될 때, 시스템 (1)을 GNOCF (7)로 변환해 주는 상태변환 $z=T(x)$을 구하기 위해서는 (14)로부터 편미분 방정식

$$\frac{\partial T}{\partial x}=[X_{11},\cdots,X_{mk_m},X_{r+1},\cdots,X_n]^{-1}$$

의 해를 구해야 함을 알 수 있다. 이러한 편미분 방정식의 해의 존재성은 정리 1의 조건 (iii)에 의해 보장된다

이제, GNOCF (7)로 주어진 비선형 시스템에 대해서 관측기가 존재하기 위한 조건을 알아 보자.

$$\begin{aligned}\dot{z}_o &= A_o z_o+\gamma_o(y,u)\\ \dot{z}_{\bar o} &= A_{\bar o o}z_o+f_{\bar o}(y,z_{\bar o})+\gamma_{\bar o}(y,u)\\ y &= C_o z_o\end{aligned}$$

(7)로부터 측정신호 y는 상태변수 z_o에만 연결되어 있고 상태변수 z_o는 상태변수 $z_{\bar o}$에 의하여 영향을 받지 않음을 알 수 있다. 이는 측정신호 y만을 사용하여 상태변수 $z_{\bar o}$를 관측하는 것이 불가능함을 의미한다. 따라서 시스템 (7)에 대해서 모든 상태의 관측이 필요한 경우는 $z_{\bar o}$와 관련된 시스템의 관측오차 $\widehat{z}_{\bar o}-z_{\bar o}$가 외부환경과 관계없이 0으로 수렴하는 경우이다.[7]

정리 2 : GNOCF (7)로 주어지는 시스템에 대해서 어떤 상수 $k_0>0$와 양정치 행렬 $P_2\in R^{(n-r)\times(n-r)}$가 존재하여 (29)를 만족하면,

$$\begin{aligned}&v^TP_2[D_2f_{\bar o}(y,z_{\bar o})]v \le -k_0\|v\|^2,\\ &\qquad\forall(y,z_{\bar o},v)\in R^r\times R^{n-r}\times R^{n-r}\end{aligned}\tag{29}$$

모든 유한한 입력 $u(t)$에 대해서, 시스템 (30)은 시스템 (7)의 관측기이다.

$$\begin{aligned}\dot{\widehat{z}}_o &= A_o\widehat{z}_o+\gamma_o(y,u)+L(y-C_o\widehat{z}_o)\\ \dot{\widehat{z}}_{\bar o} &= A_{\bar o o}\widehat{z}_o+f_{\bar o}(y,\widehat{z}_{\bar o})+\gamma_{\bar o}(y,u)\end{aligned}\tag{30}$$

여기서 관측기 이득 $L\in R^{r\times m}$은 행렬 (A_o-LC_o)가 Hurwitz가 되도록 선정한다.

증명 : 우선, 각각의 관측 오차를

$$\begin{aligned}e_o &= \widehat{z}_o-z_o\\ e_{\bar o} &= \widehat{z}_{\bar o}-z_{\bar o}\end{aligned}$$

로 정의하면, (7)과 (30)으로부터 관측오차는

$$\begin{aligned}\dot{e}_o &= (A_o-LC_o)e_o\\ \dot{e}_{\bar o} &= A_{\bar o o}e_o+f_{\bar o}(y,\widehat{z}_{\bar o})-f_{\bar o}(y,z_{\bar o})\end{aligned}\tag{31}$$

을 만족한다. (A_o,C_o)는 관측가능하므로, 관측기 이득 $L\in R^{r\times m}$을 행렬 가 Hurwitz가 되도록 선정할 수 있고, 이러한 경우 (31)로부터 적절한 양의 상수 d_1과 α_1이 존재하여

$$\|e_o\|\le d_1e^{-\alpha_1 t}\tag{32}$$

을 만족한다. 이제, 관측오차 $e_{\bar o}$의 수렴성을 분석하기 위하여 (29)에서 주어진 양정치 행렬 P_2를 이용하여 리아프노프 함수

$$V(e_{\bar o})=\frac{1}{2}e_{\bar o}^TP_2e_{\bar o}$$

를 정의하자. (31)을 이용하여 $V(e_{\bar o})$를 시간 t에 대해서 미분하면

$$\dot V=e_{\bar o}^TP_2\left[A_{\bar o o}e_o+f_{\bar o}(y,\widehat{z}_{\bar o})-f_{\bar o}(y,z_{\bar o})\right]$$

인데, 중간값 정리(mean-value theorem)와 가정 (29)를 사용하면, 어떤 $\tilde z_{\bar o}\in\{t\,\widehat{z}_{\bar o}+(1-t)z_{\bar o}:\ 0\le t\le 1\}$이 존재하여

$$\begin{aligned}\dot V &= e_{\bar o}^TP_2[A_{\bar o o}e_o+D_2f_{\bar o}(y,\ \tilde z_{\bar o})e_{\bar o}]\\ &\le -k_0\|e_{\bar o}\|^2+e_{\bar o}^TP_2A_{\bar o o}e_o\\ &\le -\frac{1}{2}k_0\|e_{\bar o}\|^2-\frac{1}{2}k_0\left(\|e_{\bar o}\|-\frac{\|P_2A_{\bar o o}\|}{k_0}\|e_o\|\right)^2\\ &\qquad+\frac{\|P_2A_{\bar o o}\|^2}{2k_0}\|e_o\|^2\\ &\le -\frac{1}{2}k_0\|e_{\bar o}\|^2+\frac{\|P_2A_{\bar o o}\|^2}{2k_0}\|e_o\|^2\end{aligned}\tag{33}$$

을 만족한다. 따라서 (32)와 (33)으로부터

$$\dot V\le-\alpha_2V+d_2e^{-2\alpha_1 t}$$

을 얻을 수 있다. 여기서

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{k_0}{\lambda_M(P_2)}\\ d_2 &= \frac{(\|P_2A_{\bar o o}\|\ d_1)^2}{2k_0}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $2\alpha_1>\alpha_2$이라면 (관측기 이득 L을 적절히 선정하면 (32)로부터 항상 $2\alpha_1>\alpha_2$을 만족하도록 할 수 있음을 알 수 있다.)

$$\begin{aligned}V(t) &\le V(0)e^{-\alpha_2 t}+\int_0^t e^{-\alpha_2(t-\tau)}d_2e^{-2\alpha_1\tau}d\tau\\ &= V(0)e^{-\alpha_2 t}+\frac{d_2}{2\alpha_1-\alpha_2}e^{-\alpha_2 t}(1-e^{-(2\alpha_1-\alpha_2)t})\\ &= V(0)e^{-\alpha_2 t}+\frac{d_2}{2\alpha_1-\alpha_2}e^{-\alpha_2 t}\end{aligned}$$

이므로

$$\|e_{\bar o}\|^2\le\left[\frac{1}{\lambda_m(P_2)}\left(\frac{d_2}{2\alpha_1-\alpha_2}+e_{\bar o}(0)^TP_2e_{\bar o}(0)\right)\right]e^{-\alpha_2 t}\tag{34}$$

을 얻을 수 있고, (32)와 (34)로부터 관측오차가 0으로 지수적으로 수렴함을 알 수 있다. ■

첨언 4 : 정리 2의 관측기 이득행렬을 간단히 구하는 방법은 다음과 같다. 즉, 모든 $i=1,\cdots,m$에 대해서

$$L_i=[\,l_{i,1},\cdots,l_{i,k_i}]^T$$

를 행렬 $(A_i-L_ic_i)$이 Hurwitz가 되거나, 또는 다항식 $s^{k_i}+l_{i,k_i}s^{k_i-1}+\cdots+l_{i,2}s+l_{i,1}$이 이 Hurwitz가 되도록 선정한 후, 최종적인 관측기 이득을

$$L=\text{block diag}[L_1,\cdots,L_m]$$

으로 정한다.

정리 1과 정리 2로부터 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

정리 3 : 비선형 시스템 (1)에 대해서 정리 1의 모든 가정이 만족되고 시스템 (1)의 GNOCF (7)에 대해서 정리 2의 가정이 만족된다고 하자. 그러면 A_o+LC_o이 Hurwitz가 되도록 선정한 관측기 이득 $L\in R^{r\times m}$과 모든 유한한 $\|x(t)\|$, $\|u(t)\|$, $\forall t\geq 0$에 대해서 시스템 (35)는 비선형 시스템 (1)의 관측기이다.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}_o &= A_o\hat{z}_o+\gamma_o(y,u)+L(y-C_o\hat{z}_o)\\ \dot{\hat{z}}_{\bar{o}} &= A_{\bar{o}o}\hat{z}_o+f_{\bar{o}}(y,\hat{z}_{\bar{o}})+\gamma_{\bar{o}}(y,u)\\ \hat{x} &= T^{-1}(\hat{z})\end{aligned}\tag{35}$$

IV. 설계 예제

본 논문에서 제안한 비선형 관측기의 설계기법을 설명하기 위하여 (36)과 같은 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3\\ \dot{x}_2 &= x_1x_2+u+\sin(x_1x_3)u\\ \dot{x}_3 &= x_2\\ \dot{x}_4 &= -x_4-x_4^3+x_1x_3\\ y_1 &= x_1\\ y_2 &= x_3\end{aligned}\tag{36}$$

시스템 (36)에 대해서

$$\begin{aligned}s_0 &= \text{rank}\{dx_1,\ dx_3\}=2\\ s_1 &= \text{rank}\{dx_1,\ dx_3,\ dx_3,\ dx_2\}\\ &\quad-\text{rank}\{dx_1,\ dx_3\}\\ &=1\\ s_2 &= \text{rank}\{dx_1,\ dx_3,\ dx_2,\ dx_3,\ dx_2,dx_1x_2\}\\ &\quad-\text{rank}\{dx_1,\ dx_3,\ dx_3,dx_2\}\\ &=0\end{aligned}$$

이고, 마찬가지로 $s_3=0$임을 확인 할 수 있다. 따라서,

$$\begin{aligned}k_1 &= \text{card}\{s_i\geq 1{:}\,0\leq i\leq 3\}\\ &=2\\ k_2 &= \text{card}\{s_i\geq 2{:}\,0\leq i\leq 3\}\\ &=1\end{aligned}$$

을 알 수 있고, 첨언 1에 의하여 시스템 (36)는 관측 불가능함을 알 수 있다. 따라서, 기존의 비선형관측기 표준형을 이용한 연구결과인 [4][5][6]의 설계기법은 사용할 수 없다. 이제, 본 논문에서 제안한 일반화된 비선형 관측기 표준형을 이용하여 시스템 (36)의 관측기를 설계해 보자. (8)로부터

$$r=k_1+k_2=2+1=3$$

을 얻을 수 있다. 원래 주어진 상태로 (9)를 계산하면

$$\begin{aligned}&\text{rank}\{L_f^{j-1}(dh_i)\ :i=1,\cdots,m\ ;j=1,\cdots,k_i\}\\ &=\text{rank}\{dh_1,L_fdh_1,dh_2\}\\ &=\text{rank}\{dx_1,dx_3,dx_3\}\\ &=2<3\end{aligned}$$

이므로 (9)를 만족하지 않는다. 따라서, 출력을 재배열하여 $y_1=h_1=x_3$, $y_2=h_2=x_1$으로 정한 후, 다시 (9)를 계산하여 보면,

$$\begin{aligned}&\text{rank}\{L_f^{j-1}(dh_i)\ :i=1,\cdots,m\ ;j=1,\cdots,k_i\}\\ &=\text{rank}\{dh_1,L_fdh_1,dh_2\}\\ &=\text{rank}\{dx_3,dx_1,dx_2\}\\ &=3\end{aligned}$$

이므로 (9)를 만족함을 알 수 있다. 이제부터는 모든 계산을 $y_1=h_1=x_3$, $y_2=h_2=x_1$을 이용한다는 것에 주의하도록 하자. (13)으로부터

$$\begin{aligned}Q &=\{dh_1,dL_fh_1,dh_2\}=\{dx_3,dx_2,dx_1\}\\ Q_1 &=\{dh_1,dh_2,dL_fh_2\}=\{dx_3,dx_1,dx_3\}\\ &=\{dx_1,dx_3\}\end{aligned}$$

이므로

$$Q_1\cap Q=\{dx_1,dx_3\}=Q_1$$

이고 정리 1의 조건 (i)을 모든 영역에서 만족한다. 따라서, (10)에서 정의한 벡터장의 존재성이 보장되며, (10)으로부터 벡터장 τ_1과 τ_2가 만족해야 되는 식은

$$\begin{aligned}L_{\tau_1}h_1 &=0\\ L_{\tau_1}L_fh_1 &=1\\ L_{\tau_1}h_2 &=0\\ L_{\tau_1}L_fh_2 &=0\\ L_{\tau_2}h_1 &=0\\ L_{\tau_2}h_2 &=1\end{aligned}\tag{37}$$

이다. (37)을 만족하는 벡터장을

$$\begin{aligned}\tau_1 &=\frac{\partial}{\partial x_2}\\ \tau_2 &=\frac{\partial}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\end{aligned}$$

로 선택하면

$$ad_{-f}\tau_1=x_1\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}$$

임을 알 수 있고, (11)과 (12)에 의하여

$$
\begin{aligned}
X_1 &= X_{11} = \tau_1, \\
X_2 &= X_{12} = ad_{-f}\tau_1, \\
X_3 &= X_{21} = \tau_2
\end{aligned} \tag{38}
$$

이다. 이로부터, 정리 1의 조건 (ii)을 만족하도록 하기 위하여 X_4는

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} \tag{39}$$

로 선택한다. (38)과 (39)로부터 정리 1의 조건 (iii). (iv), (v), (vii)이 만족됨을 쉽게 확인할 수 있다. 마지막으로 $[f, X_4] = (1+3x_4^2)\frac{\partial}{\partial x_4}$ 이므로 정리 1의 조건 (vi)도 만족되어 시스템 (36)은 GNOCF로 변환 가능하다. 이 때 GNOCF로 변환시켜주는 상태변환 $z = T(x)$는 첨언 3.4로부터

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & x_1 & x_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -x_3 & 1 & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

을 만족해야 하므로

$$
\begin{aligned}
T(x) &= [\, z_1 \;\; z_2 \;\; z_3 \;\; z_4 \,]^T \\
&= [\, x_2 - x_1 x_3 \;\;\; x_3 \;\;\; x_1 \;\;\; x_4 \,]^T
\end{aligned} \tag{40}
$$

이고, 이를 이용하면 시스템 (36)은 새로운 좌표계에서

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -y_1^2 + [1 + \sin(y_1 y_2)]u \\
\dot{z}_2 &= z_1 + y_1 y_2 \\
\dot{z}_3 &= y_1 \\
\dot{z}_4 &= -z_4 - z_4^3 + y_1 y_2 \\
y_1 &= z_2 \\
y_2 &= z_3
\end{aligned} \tag{41}
$$

로 표현된다. (41)로부터

$$f_{\bar{o}}(y, z_{\bar{o}}) = -z_4 - z_4^3$$

이므로 $P_2 = 1$로 정하면

$$v^T P_2 [\, D_2 f_{\bar{o}}(y, z_{\bar{o}}) \,] v = (-1 - 3z_4^2) v^2 \le -v^2$$

이어서 정리 2의 가정이 만족된다.($k_0 = 1$). 따라서, 정리 3의 (35)에 의하여 시스템 (36)의 전역적 비선형 관측기는 다음과 같이 주어진다.

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &= [\;\; \hat{z}_3 \quad \hat{z}_1 + \hat{z}_2 \hat{z}_3 \quad \hat{z}_2 \quad \hat{z}_4 \,]^T \\
\dot{\hat{z}}_1 &= -y_1^2 + [1 + \sin(y_1 y_2)]u + l_1(y_1 - \hat{z}_2) \\
\dot{\hat{z}}_2 &= z_1 + y_1 y_2 + l_2(y_1 - \hat{z}_2) \\
\dot{\hat{z}}_3 &= y_1 + l_3(y_2 - \hat{z}_3) \\
\dot{\hat{z}}_4 &= -z_4 - z_4^3 + y_1 y_2 \\
y_1 &= z_2 \\
y_2 &= z_3
\end{aligned}
$$

여기서 관측기 이득 $L = [\, l_1 \;\; l_2 \;\; l_3 \,]^T$는 다항식 $s^2 + l_2 s + l_1$과 $s + l_3$가 Hurwitz가 되도록 선정한다.

V. 결론

본 논문에서는 일반화된 비선형 관측기 표준형을 이용한 다중출력 비선형 시스템의 관측기 설계기법을 제시하였다. 주어진 비선형 시스템이 제안된 일반화된 관측기 표준형으로 변환되기 위한 조건을 제시하였으며, 일반화된 관측기 표준형에 대해서 비선형 관측기가 존재할 조건을 리아프노프 함수와 유사한 조건으로 제시하였다. 또한 예제를 통하여 제안된 비선형 관측기의 설계방법을 자세히 소개하였다. 향후의 연구방향으로는 일반화된 관측기 표준형으로 변환되는 조건을 좀 더 완화하는 연구가 필요할 것으로 보인다.

참고문헌

[1] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer -Verlag, Berlin, 1989.

[2] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[3] A. J. Krener, and A. Isidori, "Linearization by output injection and nonlinear observers," *Systems and Control Letters*, vol. 3, pp. 47-52, 1983.

[4] A. J. Krener and W. Respondek, "Nonlinear observers with linearizable error dynamics," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 23, pp. 197-216, 1985.

[5] X. H. Xia and W. B. Gao, "Nolinear observer design by observer error linearization," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 27, pp. 199-216, 1989.

[6] J. Rudolph and M. Zeitz, "A block triangular nonlinear observer normal form," *Systems and Control Letters*, vol. 23, pp. 1-8, 1994.

[7] N. H. Jo, and J. H. Seo, "Input output linearization approach to state observer design for nonlinear systems,"*IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 45, pp. 2388-2393, 2000.

[8] N. H. Jo and J. H. Seo, "Observer design for nonlinear systems that are not uniformly observable," *Int. J. Contr.*, vol. 75, no. 5, pp. 369-380, 2002.

[9] R. Marino and P. Tomei, *Nonlinear Control Design* (Prentice Hall, London: 1995).

조 남 훈

1970년 3월 18일생. 1992년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 동대학원 석사(1994). 서울대 대학원 전기공학부 박사(2000). 2000년~2001년 서울대 자동화시스템공동연구소 연구원. 2001년~2002년 삼성전자 DVS사업부 책임연구원. 2002년~2004년 숭실대학교 전기제어시스템공학부 전임강사. 2004년~현재 숭실대학교 전기제어시스템공학부 조교수. 관심분야는 비선형 제어, 적응제어, 신호처리.