

서브디비전의 다중해상도 기능을 이용한 곡면의 모델링과 유한요소 해석

Generation of Subdivision Surface and First-order Shear Deformable Shell Element Based on Loop Subdivision Surface

조 맹 효† 김 형 길* 서 흥 석**
Cho, Maeng-Hyo Kim, Hyung-Gil Suh, Hong-Suk
(논문접수일 : 2003년 9월 8일 ; 심사종료일 : 2004년 5월 31일)

요 지

본 연구에서는 서브디비전 방법 중 루프 서브디비전 방법을 이용하여 초기의 데이터 값으로부터 몇 번의 서브디비전 과정을 거쳤을 때, 초기 데이터 점이 극한곡면 위에 있도록 곡면 재생성 방법을 구현하였으며, n번 서브디비전을 수행한 곡면의 정확도를 곡률과 좌표값의 상대오차로 평가하였다. 또한 쉘의 전단변형을 표현할 수 있는 일차 전단변형 루프 서브디비전 유한요소를 개발하였다. 새롭게 개발된 요소는 한 개의 절점에서 6개의 자유도를 가지고 전단 변형효과를 포함하는 일반화된 요소인데, 기저함수로 4차 박스-스플라인함수가 사용되었다. 평가 수치예제를 통해 서브디비전 쉘 요소의 성능을 평가/검증하였다. 본 연구에서 개발된 서브디비전 요소는 다중해상도 해석과 기하학적 모델링에 널리 사용될 수 있다.

핵심용어 : 루프삼각요소, 표본점, 초기 조정점, 수렴점, 가상일원리, 유한요소해석

Abstract

In the present study, Loop scheme is applied to generate smooth surfaces. To be consistent with the limit points of target surface, the initial sampling points are properly rearranged. The pointwise errors of curvature and position in the sequence of subdivision process are evaluated in the Loop subdivision scheme. A first-order shear deformable Loop subdivision triangular element which can handle transverse shear deformation of moderately thick shell are developed. The developed element is more general than the previous one based on classical shell theory, since the new one includes the effect of transverse shear deformation and has standard six degrees of freedom per node. The quartic box spline function is used as interpolation basis function. Numerical examples for the benchmark static shell problems are analyzed to assess the performance of the developed subdivision shell element and locking trouble.

keywords : *loop-subdivision triangular element, sampling points, initial control vertices, limiting points, virtual work principle, finite element analysis*

1. 서 론

현재 널리 사용되고 있는 CAD(Computer Aided Design)의 CAGD(Computer Aided Geometric Design)와 CAE(Computer Aided Engineering) 기술, 최적설

계기술 등은 각각 독자적으로 태동되고 발전되어 독립적인 학문분야로 인지되어 왔다. 그러나 최근에 이르러 모델링, 해석, 설계 그리고 더 넓게는 생산공정까지 함께 모사할 수 있는 통합 시뮬레이션 개발기술이 제품 개발의 효율성과 생산 비용의 절감, 생산 시간의 절약 등을 위해 필요하

† 책임저자, 정회원 · 서울대학교 기계항공공학부 부교수
전화: 02-880-1693 ; Fax: 02-886-1693
E-mail: mhcho@snu.ac.kr

* 포스코 열연기술개발팀

** 현대자동차 파워트레인연구소 수동변속기설계팀

• 이 논문에 대한 토론을 2004년 9월 30일까지 본 학회에 보내주
시면 2004년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

다는 인식이 확대되고 있다. 그러므로 최근에는 다루고자 하는 대상의 범위와 기술의 깊이를 달리하면서 통합 시뮬레이션 개발기술에 노력이 경주되고 있다.

그러나 통합화 기술의 근본적인 문제점은 CAGD 모델링 기술과 CAE 기술, 최적설계 기술들이 서로 다른 환경에서 개발되어 왔다는 데 있다. 그래서 그 통합 기술도 진정한 통합이라기보다는 입출력에 관여하는 데이터 파일들의 표준화와 데이터들의 효율적인 관리가 통합 프로그램의 근간이 되어 왔다. 또한 독립적으로 개발되어온 상용 프로그램들이 각 분야에서 쓰이고 있어 전통적인 모델링, 해석, 설계의 순차적 흐름에 따라 모델링의 결과를 입력데이터로 하여 해석을 수행하고 해석을 반복하여 설계를 결정하는 초창기의 제품설계 방법에는 큰 문제가 없었다. 그러나 제품의 기능화와 정밀화가 요구되면서 형상변경이 필요하고 설계목적함수 변경에 따라 설계 과정의 반복 사이클이 필요한 상황이나 해석결과로부터 모델링을 변경해야 하는 통합적인 상황에서는 각 소프트웨어들의 폐쇄성과 개발환경의 상이성 때문에 통합기술의 구현이 쉽지 않다. 그러므로 독립적인 소프트웨어에 가능한 한 공통성을 부여하고 개발 환경을 동일하게 맞추어 통합 모델링-해석-설계 기술의 구현이 절실히 요구된다고 하겠다. 그러므로 본 연구에서는 곡면 구조물에 초점을 맞춰 곡면 구조물의 모델링, 해석, 설계를 통합하기 위하여 subdivision 곡면의 공통 환경에서 4차의 box-spline을 이용한 삼각 격자법을 구현하였다.

최근 Cirak 등은 Loop의 subdivision 기법을 이용하여 곡면을 생성하고 이 곡면의 해석을 위한 고전 쉘 이론을 정립하여 곡면의 해석과 기하학적인 모델링을 연동하였다.¹⁾ 또한 이 방법론을 비선형 탄성셀로 확장하였으며,²⁾ 곡면의 형상 설계로의 확장성을 보였다.³⁾

그러나 이 방법론은 고전 쉘 이론에 기초하였으므로 두꺼운 쉘 구조물이나 샌드위치 복합재료 적층 쉘과 같이 횡전단 변형이 심한 쉘 구조물에는 적용할 수 없고 얇은 등방성 탄성 물체의 곡면에만 적용이 가능하므로 그 적용 범위에 한계가 있다. 그러므로 횡전단 변형효과를 고려한 일차 전단 변형 쉘 이론에 기초한 subdivision 유한요소가 일반적인 곡면 구조물의 변형을 기술하기 위한 표준해석 도구로서 필요하다. 치수와 크기가 정확해야 하는 기계공학의 모델에 적용하기 위한 subdivision geometric scheme을 확보하기 위해서는 재분할을 통해 얻어지는 극한점이 처음에 주어진 곡면의 데이터 점들과 일치하도록 하는 기술적인 문제를 해결해야 한다.

이런 견지에서 보면 최근에 대동한 subdivision technology는 다중 해상도를 최대한으로 활용하기 위한 방법론의 일반화와 adaptive 해석을 위해 많은 연구가 수행되어야 할 분야이다. 특히 다중해상도(multi-resolution) 기능이 있는

subdivision 기법은 형상 최적화 문제에서도 효과적으로 적용될 수 있으므로 다중 해상도 기능과 adaptive refinement 기법을 효과적으로 구현하는 문제가 연구되어야 한다.

쉘 유한요소는 지난 30여 년간 지속적으로 개발되어 왔으며 아직도 많은 연구가 이루어지고 있는 분야이다. 쉘은 곡률을 가지는 얇은 구조물로서 형상이 복잡하여 해석적인 방법으로는 쉘 문제를 해석하는데 한계가 있다. 유한요소법은 다양한 기하학적 형상, 경계조건, 하중조건에 대해서 일반적으로 적용할 수 있는 도구이므로 쉘 문제의 수치해석에 적합하다. 쉘 요소의 요소경계에서 기술기의 연속조건을 만족시켜야 하는 번거로움 때문에 고전 쉘 이론에 근거한 유한요소는 널리 쓰이지 않고 있고, 변위의 연속 조건만 만족시키면 되는 Mindlin/Reissner 타입의 쉘 요소는 잠김(locking) 현상이라는 수치 문제로 그 적용이 제한적이었다. 최근 20여 년간의 쉘 요소 개발에 대한 연구는 잠김(locking) 현상을 방지하고 안정적인 선형/비선형 쉘 요소를 개발하는데 초점이 맞추어져 왔다. 또한 Ahmad⁴⁾ 등이 degenerated shell 요소를 제안한 이래 곡률을 따르는 일반 곡선 좌표계를 사용하지 않고 직교 좌표계를 사용하여 쉘을 해석하는 것이 가능해졌으므로 그 편이성 때문에 degenerated shell 요소의 개발이 그 주종을 이루고 있다. 그러나 degenerated shell 요소는 요소 내에서의 기하학적인 쉘의 형상을 근사를 통해 보간하므로 비록 많은 수의 요소를 사용하게 되면 그 해석에서 오차가 줄어들게 되나 실제 복잡한 형상의 쉘을 효율적으로 해석하는 데는 한계가 있다. 그러므로 정확한 기하학적인 형상을 고려한 쉘 이론에 근거한 유한요소의 개발이 Simo 등에 의해 수행되었다.^{5),6)}

본 연구에서는 고전 쉘 이론에 기초한 모델의 한계를 극복하기 위해 횡전단 변형효과를 고려한 일차 전단 변형 쉘 이론에 기초한 subdivision 유한요소를 개발하여 일반적인 곡면 구조물의 변형을 해석하는 도구를 확립함과 아울러 subdivision 기법인 Loop 방법에 의해 곡면을 구현하는 기술과 구현되는 곡면의 치수와 크기의 정확성을 위해서 재분할을 통해 얻어지는 데이터의 극한값이 처음에 주어진 곡면의 데이터 점들과 일치해야 하는 기술적인 문제들을 해결하고 Loop subdivision 기법에서 6각형 regular 메쉬를 다루는 문제를 해결 하는데 중점을 두었다. 또한 여러 가지 수치예제에 대해 uniform mesh와 distorted mesh에 대한 해석결과를 제시하고자 한다.

2. Subdivision

2.1 Subdivision의 개념과 종류

Subdivision은 주어진 간단한 메쉬에 새로운 점을 추

가함으로써 물체를 좀더 부드럽게 보이게 하는 방법이며, 국지적으로 계산이 되고 subdivision rule에 의해서 새로운 점을 생성한다. 그래서 일반적으로 subdivision은 부드러운 곡면을 표현하기 위해 사용되어지고 있다. 그러나 subdivision은 각각의 재분할 단계마다 4배로 증가하는 많은 양의 데이터를 다뤄야 한다는 단점이 있다. 더욱 자세한 subdivision 곡면 구현에 대한 정보는 참고문헌(1), (7), (8)에서 얻을 수 있다.

그림 1은 현재 가장 널리 쓰이고 있는 Loop 방법³⁾과 Catmull-Clark 방법⁹⁾으로 구성된 곡면 형상을 나타낸다. Loop 방법은 데이터 점들을 삼각화를 통해 삼각격자들의 조합으로 곡면을 구성하고 재분할에 의해 부드러운 곡면을 얻는 방법이며, Catmull-Clark 방법은 사각 메쉬의 재분할을 통해 곡면을 생성하는 방법이다.

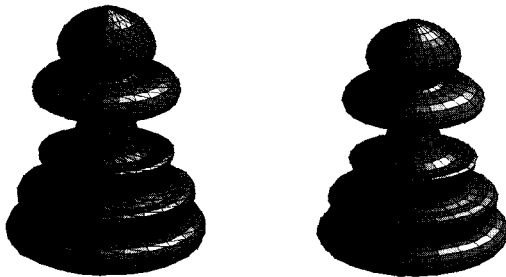


그림 1 Loop(왼쪽)과 Catmull-Clark(오른쪽) subdivision 방법

이와 달리 보간법을 이용하는 기법으로는 Butterfly 방법¹⁰⁾과 Doo-Sabin 방법¹¹⁾ 등이 있다. 보간법과 근사법에 의한 subdivision 방법에 대한 개념은 그림 2에 주어졌다. 이 중에서 근사법에 의해서 더욱 부드러운 곡면이 얻어지기 때문에 근사법에 기초한 방법이 선호되고 있다. 그러나 해석이나 설계를 위해 주어졌 있는 대상의 치수와 크기가 분명한 경우에는 치수와 크기를 고려하여 처음부터 재분할을 수행할 때, 한 번 생성한 조정점의 위치가 계속 바뀌어야 하므로 근사법은 치수가 정해져있는 대상을 나타내는데 적용하기가 용이하지 않다.

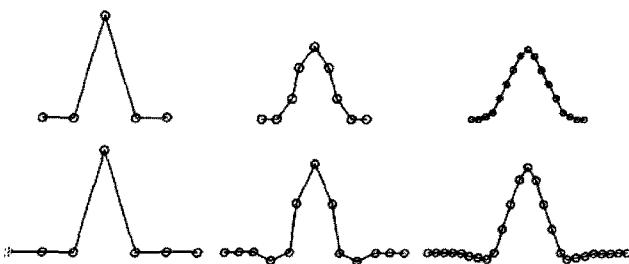


그림 2 근사법(위)과 보간법(아래)

2.2 Loop subdivision 방법

Loop subdivision 방법을 적용할 때에는 6개의 삼각형이 모여서 이루어진 6각형 모양이 기본이 된다.

그림3은 Loop subdivision 방법에 의해 한번의 subdivision 단계를 거친 다음에 새로운 점의 생성과 기존 점의 위치가 이동되는 것을 보여주고 있다.

그림3에서 보여지는 $P_0^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0, P_4^0, P_5^0, P_6^0$ 는 6각형을 이루는 각 점의 정보를 가지고 있다. P_i^j 에서 j 는 subdivision이 이루어진 횟수를 나타내고, i 는 하나의 6각형 안에서 7개점이 이루는 순서를 말해준다.

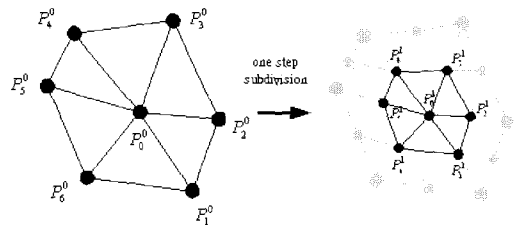


그림 3 Loop subdivision 방법

Subdivision을 수행하는 과정에서는 크게 두 가지의 단계가 수행된다. 그림4의 왼쪽 그림은 기존에 있는 6개의 주위 점들을 이용하여 각 점의 가중치를 부여하여 육각형의 중심점을 재조정하는 단계이며 오른쪽 그림은 주위의 4개의 점을 이용하여 각 점에 대한 가중치를 고려하여 새로운 점을 생성하여 육각형 메쉬 안에 삽입되는 단계이다. 각 단계마다 그림4에서 보이는 것처럼 각각의 node에 대한 가중치를 고려하여 기존의 점이 재조정 되어지고, 새로운 점이 생성되게 된다.

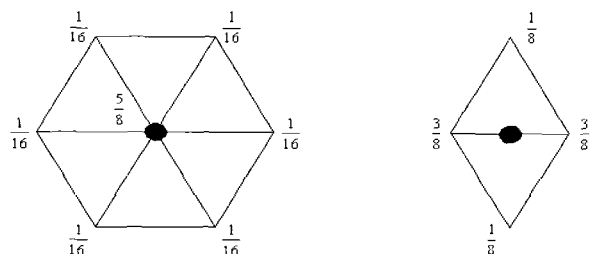


그림 4 Loop subdivision 방법에서 기존 점의 위치조정(왼쪽)과 새로운 점의 생성(오른쪽)

2.3 Subdivision 방법에 의한 정확한 곡면 구현

보간법은 부드러운 곡면을 제공하지 않기 때문에 단점

이 있는 반면 근사법은 생성된 조정점의 위치가 재분할 과정에서 변한다는 어려움이 있다. 그러나 재분할을 통한 조정점이 결국은 하나의 극한점으로 수렴한다는 수학적 성질이 있으므로 이를 이용하면 몇 차례의 subdivision을 통해서 기계공학에서 필요한 치수와 크기가 고정된 모델로 수렴해 가는 모델링 기법을 확립할 수 있다. 이것은 처음 얻게 되는 실제 데이터 값을 극한점으로 보고 극한점의 각각에 대한 초기 데이터 값을 구하여 몇 번의 subdivision 과정을 통해 초기의 데이터 값들이 실제 데이터 값(극한점)으로 수렴해 가는 것을 확인하는 과정으로 이루어지는 기법이다.

그리고 이러한 모델링 기법을 바탕으로 하면 subdivision을 하고자 하는 초기의 곡면에서 몇 개의 조정점을 선택하여 이동시켜 주어진 데이터 값을 변형시킨 후, subdivision 과정을 통하여 우리가 원하는 형상의 곡면을 인위적으로 만들어 나갈 수도 있다.

$$X^{k+1} = SX^k \tag{1}$$

$$X^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} S^k X^0 \tag{2}$$

식(1), (2)에서 X 는 좌표값의 열 벡터를 나타내며, S 는 subdivision matrix를 나타낸다. 식(2)에서 초기의 데이터 값에서 출발하여 무한번 서브디비전을 수행하면 초기 데이터 값이 극한값으로 수렴해감을 알 수 있다.

$$S = RAL \tag{3}$$

여기서, R 은 right eigenvector, L 은 left eigenvector, Λ 는 eigenvalues이다.

$$S^\infty = RA^\infty L \tag{4}$$

$$S^\infty = L_0 \tag{5}$$

$$R_0 = \{1, 1, 1, \dots, 1\}$$

그리고 S 행렬은 식(3)으로 표현이 가능하고, S 행렬을 무한번 연산하였을 때, 식(4)으로 표현이 가능하기 때문에 (5)식을 얻어 낼 수가 있다. 따라서 식(2)와 (5)를 결합한 후 곡면 위에서 정의된 전체 데이터 점에 대해 적용하여 식(6)을 구성할 수 있고 식(6)을 풀면 초기 vertex의 위치를 (7)과 같이 구할 수 있다.

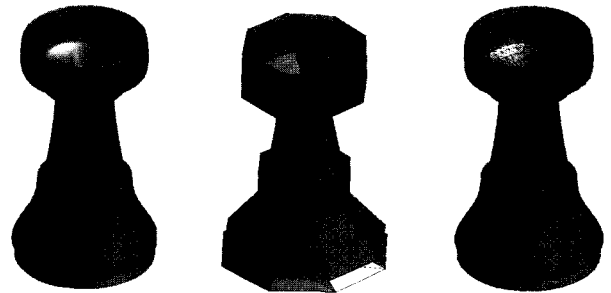
$$\{UX_i^\infty\} = [UL_0]^{-1} \{UX_i^0\} \tag{6}$$

$$\{UX_i^\infty\} = [UL_0]^{-1} \{UX_i^0\} \tag{7}$$

여기서, 기호 U 는 전체 $[L_0]$ 행렬을 조합하는 과정에서 사용하는 조합기호이다.

초기에 얻게 되는 실제 데이터 값(극한점)에서 subdivision을 계속하면 샘플링 데이터 값에 수렴하게 되는 초기 값을 구할 수 있게 됨으로써 본 연구에서 목적하였던 정확한 곡면을 모델링하는 기법 구현이 가능하게 된다. 그리고 구하여진 초기 데이터 값으로부터 몇 번의 subdivision 과정을 수행하였을 때, 초기 데이터 값이 실제 데이터 값으로 수렴해 가는 여부는 곡률과 좌표 값의 상대 오차를 계산하여 확인하여 볼 수 있다.

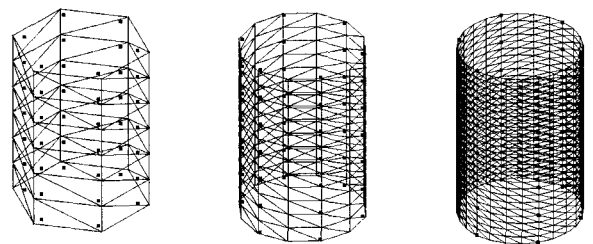
그림 5에서 첫 번째 그림은 극한점을 가지고 구현한 메쉬이고, 두 번째 그림은 앞의 식들을 가지고 연산을 통하여 초기의 데이터 값을 얻어 구현한 메쉬이다. 그리고 세 번째 그림은 초기 메쉬에서 몇 번의 subdivision 과정을 거쳤을 때, 얻어지게 되는 메쉬를 나타낸다.



limit mesh initial mesh subdivision mesh

그림 5 subdivision 과정을 거친 bottle mesh

그림 6은 실제 초기 데이터 값에서 몇 번의 subdivision 과정을 거쳐서 원하는 곡면을 구현 하였을 때, 구현된 곡면이 실제 데이터 값에 어느 정도 수렴 하는지를 알아보기 위해 실린더 곡면을 구현하였다. 여기서 점들은 대응되는 극한점을 나타낸다.



initial mesh 1st subdivision 2nd subdivision

그림 6 실린더의 subdivision 과정

그림 7과 8은 모델링되는 근사 곡면이 실제 데이터 값에 수렴할 때, 실린더에서 실제 데이터 값에 대응되는 극한점과 주변 점들의 곡률(curvature)과 좌표의 오차를 보여준다.

그림 7과 8에서는 Uniform subdivision을 통해 실린더의 곡률과 좌표점의 오차가 급격하게 줄어드는 것을 알 수 있는데 6회 정도의 subdivision 과정을 거치면 곡률과 좌표점의 상대오차가 10^{-4} 정도에 도달함을 알 수 있다. 따라서 그림7과 8은 정확한 치수를 요구하는 CAD/CAE에 Loop subdivision 이 적용될 수 있는 가능성을 보여주는 결과이다.

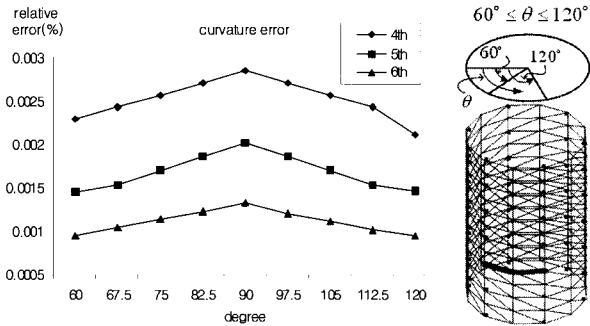


그림 7 Subdivision의 수행에 따른 실린더 곡률의 상대오차 변화

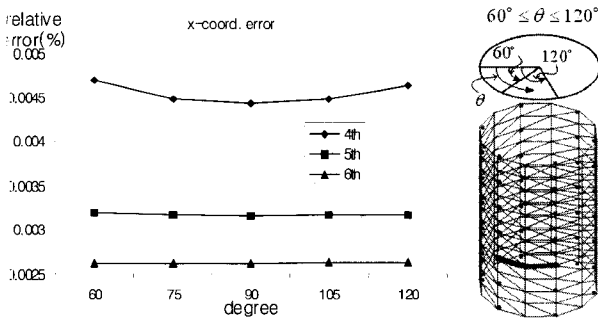


그림 8 Subdivision의 수행에 따른 실린더 좌표값의 상대오차 변화

3. 일차 전단변형 쉘 이론과 유한요소화

곡면 쉘의 변형을 해석하는 것은 구조물의 강성, 강도, 안정성 등을 평가하는데 기본이 된다. 본 연구의 해석 부분에서는 유한요소법을 사용하여 쉘의 변형을 해석한다. 1차 전단변형 이론에 입각한 기하학적으로 정확한 쉘 이론에 기초하여 4차 box-spline 함수를 기저함수로 하는 쉘 유한요소를 정식화하고 구현하였다. 그림 9는 box-spline 이 정의되는 삼각형 패치를 나타낸다.

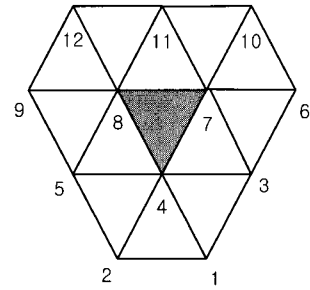


그림 9 A patch for box spline

Loop 곡면의 표현식은 다음과 같다.

$$\bar{X}(\theta^1, \theta^2) = \sum_{i=1}^{12} N^i(\theta^1, \theta^2) \bar{X}_i \quad (8)$$

선형 탄성 한계 내에서 변형을 미소변형으로 가정한다. 정식화를 위한 변형 전 (\bar{R})과 변형 후 (\bar{R}')의 위치 벡터는 아래식과 같고 그림10에 표시되어 있다.

$$\bar{R}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}_3(\theta^1, \theta^2) \quad (9)$$

$$\bar{R}'(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{r}'(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}'_3(\theta^1, \theta^2) \quad (10)$$

여기서 $\frac{-h}{2} \# \theta^3$ 이다.

곡면의 면내 접선 벡터와 수직 벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{a}_\alpha = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta^\alpha} = \bar{r}_{,\alpha} \quad \bar{a}_3 = \frac{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2}{|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2|} \quad (11)$$

쉘의 내부 점에서의 위치 벡터는 변형 전에 \bar{g}_α 로 변형 후에는 \bar{g}'_α 로 주어진다.

$$\bar{g}_\alpha = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \theta^\alpha} = \bar{r}_{,\alpha}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}_{3,\alpha}(\theta^1, \theta^2) \quad (12)$$

$$\bar{g}'_\alpha = \frac{\partial \bar{R}'}{\partial \theta^\alpha} = \bar{r}'_{,\alpha}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}'_{3,\alpha}(\theta^1, \theta^2) \quad (13)$$

$$\bar{g}_3 = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \theta^3} = \bar{a}_3, \quad \bar{g}'_3 = \frac{\partial \bar{R}'}{\partial \theta^3} = \bar{a}'_3 \quad (14)$$

변위장은 1차 전단변형 이론에서 3개의 병진 변위 (\bar{u}_k)와 3개의 회전 변위 ($\bar{\phi}_k$)로 기술된다.

$$\vec{u} = \vec{u}_1 \vec{e}_1 + \vec{u}_2 \vec{e}_2 + \vec{u}_3 \vec{e}_3 \quad (15)$$

$$\vec{\phi} = \hat{\phi}_1 \vec{e}_1 + \hat{\phi}_2 \vec{e}_2 + \hat{\phi}_3 \vec{e}_3 \quad (16)$$

여기서 \vec{e}_i 는 전체 직교좌표계의 단위벡터이다.

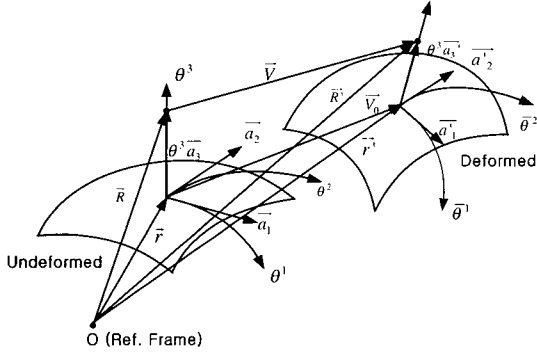


그림 10 Shell 이론의 변위장

가상일원리를 이용하여 정식화 과정을 수행한다.

가상일원리에서 내부에너지, 인장에너지, 굽힘에너지, 전단에너지로 나누어진다.

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \tau^{ij} \delta E_{ij} dv \quad (17) \\ &= \int_V \tau^{\alpha\beta} \delta E_{\alpha\beta} dv + \int_V \tau^{3\beta} \delta \gamma_{3\beta} dv \\ &= \int_V \tau^{\alpha\beta} (\delta \epsilon_{\alpha\beta} + \theta^3 \delta \omega_{\alpha\beta}) dv + \int_V \tau^{3\beta} \delta \gamma_{3\beta} dv \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} B^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta} \delta \epsilon_{\alpha\beta} d\Omega}_{\text{membrane}} + \underbrace{\int_{\Omega} B^{\alpha\beta\gamma\delta} \omega_{\gamma\delta} \delta \omega_{\alpha\beta} d\Omega}_{\text{bending}} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Omega} B^{3\alpha 3\beta} \gamma_{3\beta} \delta \gamma_{3\alpha} d\Omega}_{\text{shear}} \end{aligned}$$

변형률은 인장($\epsilon_{\alpha\beta}$), 굽힘($\omega_{\alpha\beta}$), 전단($\gamma_{\alpha\beta}$) 전단변형률로 기술되어진다.

병진변위와 회전변위는 box-spline을 사용하여 다음과 같이 절점변수로 표시된다.

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{12} N_i(\vec{u})_i, \quad \vec{\phi} = \sum_{i=1}^{12} N_i(\vec{\phi})_i \quad (18)$$

인장변형률은 다음과 같다.

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\vec{a}_{\alpha} \cdot \vec{u}_{,\beta} + \vec{a}_{\beta} \cdot \vec{u}_{,\alpha}) \quad (19)$$

$$\{\epsilon_{\alpha\beta}\} = [B]_{memb} \{d\}^e \quad (20)$$

굽힘변형률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} &= -(b'_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) \\ &= -\vec{\phi}_{,\beta} \cdot \vec{a}_{\alpha} - \vec{u}_{,\alpha} \cdot \vec{a}_{3,\beta} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\{\omega_{\alpha\beta}\} = [B]_{bend} \{d\}^e \quad (22)$$

횡전단변형률의 표현식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha} &= \vec{a}_{\alpha} \cdot \vec{\phi} + \vec{u}_{,\alpha} \cdot \vec{a}_3 \\ &= \vec{a}_{\alpha} \cdot (\hat{\phi}_1 \vec{e}_1 + \hat{\phi}_2 \vec{e}_2 + \hat{\phi}_3 \vec{e}_3) \\ &\quad + \vec{a}_3 \cdot (\hat{u}_{1,\alpha} \vec{e}_1 + \hat{u}_{2,\alpha} \vec{e}_2 + \hat{u}_{3,\alpha} \vec{e}_3) \\ &= \hat{u}_{1,\alpha} (\vec{e}_1 \cdot \vec{a}_3) + \hat{u}_{2,\alpha} (\vec{e}_2 \cdot \vec{a}_3) + \hat{u}_{3,\alpha} (\vec{e}_3 \cdot \vec{a}_3) \\ &\quad + \hat{\phi}_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{a}_{\alpha}) + \hat{\phi}_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{a}_{\alpha}) + \hat{\phi}_3 (\vec{e}_3 \cdot \vec{a}_{\alpha}) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\{\gamma_{\alpha}\} = [B]_{shear} \{d\}^e \quad (24)$$

위 식을 바탕으로 각 요소에 대한 요소강성행렬을 구할 수 있다. box-spline함수의 미분을 포함하는 $[B]_{memb}$, $[B]_{bend}$, $[B]_{shear}$ 의 구체적인 수식은 지면관계상 생략한다. 각각의 요소의 강성행렬을 구할 때 쉘의 두께가 얇아짐에 따라 발생하는 쉘의 잠김 현상을 감안하여 전단변형강성행렬 가우스 적분의 경우는 1점 적분을, 인장강성행렬 가우스 적분의 경우는 1점 적분을, 굽힘강성행렬 가우스 적분의 경우는 3점 적분을 사용하였다. 적분점의 수에 대한 표시는 다음과 같다.

$$131 \begin{cases} 1 \text{ point integral for membrane part} \\ 3 \text{ points integral for bending part} \\ 1 \text{ point integral for shear part} \end{cases}$$

그러나 전체 직교좌표계의 절점자유도를 사용하는 경우에는 경계곡선을 따라서 주어지는 경계조건을 부여하기에 불편하다.(그림 11) 따라서 경계조건적용의 편리를 위하여 경계에서 변위성분을 국지접선 좌표계로 바꾸어주는 연산을 수행한다. 전역 좌표계의 전역강성행렬의 변환연산을 통하여 국지 좌표계의 국소강성행렬로 변환하고 경계면에서 정의된 접선 좌표계의 접선변위와 수직변위, 각 변위에 경계조건을 부여하여 해석을 수행한다. 절점 변위를 전역 직교좌표계에서 기술하면 임의형상의 메쉬에 대해 변위를 표시할 수 있으므로 국지 좌표계에서 전역 좌표계로 절점 변위를 변환한다.

$$\vec{d}_{Global} = \mathbf{A} \vec{d}_{local} \quad (25)$$

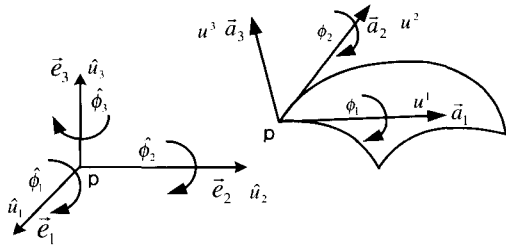


그림 11 국지좌표계와 전역좌표계에서의 변위

여기서 \bar{d} 는 전역 좌표계의 절점미지벡터, \bar{d}_{local} 는 국지 좌표계의 절점미지벡터이고 A 는 변환행렬이다. 전역, 국지 좌표계에서 표현된 절점 변위 벡터는 다음과 같다.

$$\bar{d}_{Global} = \hat{u}_1 \bar{e}_1 + \hat{u}_2 \bar{e}_2 + \hat{u}_3 \bar{e}_3 \quad (26)$$

$$\bar{d}_{local} = u^1 \bar{a}_1 + u^2 \bar{a}_2 + u^3 \bar{a}_3 \quad (27)$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{Bmatrix}}_{Global} = \begin{bmatrix} (\bar{e}_1 \cdot \bar{a}_1) & (\bar{e}_1 \cdot \bar{a}_2) & (\bar{e}_1 \cdot \bar{a}_3) \\ (\bar{e}_2 \cdot \bar{a}_1) & (\bar{e}_2 \cdot \bar{a}_2) & (\bar{e}_2 \cdot \bar{a}_3) \\ (\bar{e}_3 \cdot \bar{a}_1) & (\bar{e}_3 \cdot \bar{a}_2) & (\bar{e}_3 \cdot \bar{a}_3) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{Bmatrix}}_{Local}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \end{Bmatrix}}_{Global} = \begin{bmatrix} (\bar{e}_1 \cdot \bar{a}_1) & (\bar{e}_1 \cdot \bar{a}_2) \\ (\bar{e}_2 \cdot \bar{a}_1) & (\bar{e}_2 \cdot \bar{a}_2) \\ (\bar{e}_3 \cdot \bar{a}_1) & (\bar{e}_3 \cdot \bar{a}_2) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{Bmatrix}}_{Local}$$

전역 직교좌표계의 강성행렬 $K_G(72 \times 72)$ 은 식(28)을 통하여 국지접선 좌표계의 강성행렬 $K_L(60 \times 60)$ 로 변환된다.

$$K_L = A^T K_G A \quad (28)$$

한 요소에 12개의 절점이 있으므로 변환행렬 $A(72 \times 60)$ 는 12개의 A_i 로 구성된다. ($i=1,2,\dots,12$)

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{12} \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} (\bar{e}_1 \cdot \bar{a}_1) & (\bar{e}_1 \cdot \bar{a}_2) & (\bar{e}_1 \cdot \bar{a}_3) & 0 & 0 \\ (\bar{e}_2 \cdot \bar{a}_1) & (\bar{e}_2 \cdot \bar{a}_2) & (\bar{e}_2 \cdot \bar{a}_3) & 0 & 0 \\ (\bar{e}_3 \cdot \bar{a}_1) & (\bar{e}_3 \cdot \bar{a}_2) & (\bar{e}_3 \cdot \bar{a}_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\bar{e}_1 \cdot \bar{a}_1) & (\bar{e}_1 \cdot \bar{a}_2) \\ 0 & 0 & 0 & (\bar{e}_2 \cdot \bar{a}_1) & (\bar{e}_2 \cdot \bar{a}_2) \\ 0 & 0 & 0 & (\bar{e}_3 \cdot \bar{a}_1) & (\bar{e}_3 \cdot \bar{a}_2) \end{bmatrix}$$

4. 해석결과

현재까지 보고된 대표적인 benchmark문제들에 대표적인 대해 개발된 subdivision 요소의 성능을 시험하고 평가한다. 자세한 수치조건 및 하중조건들은 참고문헌¹²⁾에 주어져 있다.

4.1 원통형 셸에 집중하중이 가해지는 문제

그림 12에 원통셸을 subdivision하여 점차 높은 해상도로 모델링 해 나가는 과정을 도시하였다. 그림13에서는 균일메쉬에 대한 하중이 가해지는 지점의 변위수렴곡선을 도시하였다. 전체 실린더 모델을 사용하지 않고 1/8실린더 모델만을 사용하여 경계조건을 부여하여 해석하였다. 그림 13에서 요소의 수가 증가함에 따라 엄밀해에 수렴하는 것을 볼 수 있다. 그림 13에서 FSDLSE는 First-order Shear Deformable Loop Subdivision Element를 나타내며 하중이 가해지는 부분의 변위의 수렴성을 도시하였다. Cirak로 표시된 것은 고전 셸이론에 기초한 Cirak의 해석결과를 나타낸다. uniform subdivision을 수행해 나갈 때 각 단계에서 필요한 자유도수는 다음과 같다.

- 1st subdivision DOF : $(3 \times 6) \times 5 = 90$
- 2nd subdivision DOF : $(3 \times 6) \times 2^2 \times 5 = 360$
- 3rd subdivision DOF : $(3 \times 6) \times 2^4 \times 5 = 1440$
- 4th subdivision DOF : $(3 \times 6) \times 2^8 \times 5 = 5760$

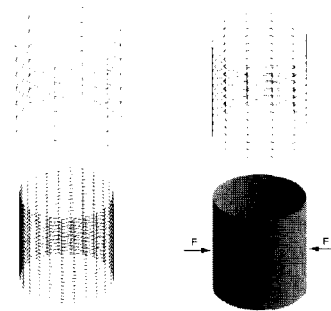


그림 12 Pinched Cylinder

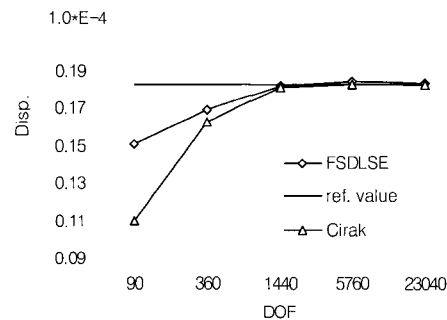


그림 13 1/8 Pinched Cylinder 변위수렴곡선

본 연구의 FSDLSE가 Cirak 등의 고전 쉘 요소보다. 이 예제에서 수렴성이 훨씬 뛰어난 것을 알 수 있다.

그림14와 그림15에서는 불균일 원통형 쉘의 기하형상과 변위수렴곡선을 나타내어 균일 메쉬의 수렴성과 비교하였다. 불균일 메쉬가 포함될 경우 수렴성이 같은 수의 균일 메쉬의 결과에 비해 떨어짐을 알 수 있다.

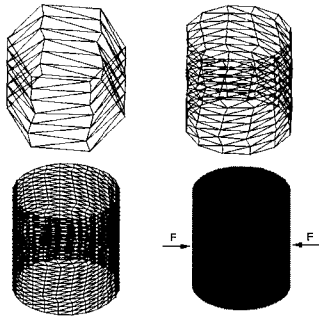


그림 14 Distorted Pinched Cylinder

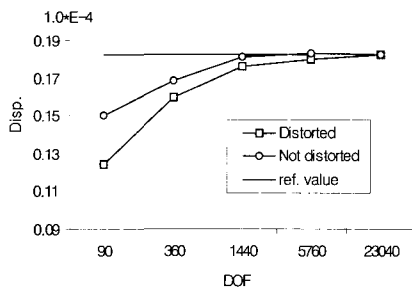


그림 15 Distorted Pinched Cylinder 변위수렴곡선

4.2 구형 쉘에 집중하중이 가해지는 문제

이 문제에 대한 기하형상은 그림16에 주어져있다. 균일 메쉬에 대한 요소의 해석결과와 수렴성은 그림17에 도시하였다. 그림17에서 FSDLSE는 First order Shear Deformable Loop Subdivision Element를, BD는 Bathe-Dvorkin을 나타내며 ST는 Stander et al(1989)를 나타내며 하중이 작용하는 부분의 변위 수렴성을 도시하였다. 전체모델을 사용하지 않고 1/4 hemisphere 모델만을 사용하여 해석을 수행하였다. 잘 알려진 BD와 ST에 비해 수렴성이 떨어지나 2560개의 자유도로는 거의 수렴한 결과를 보여준다.^{13),14)}

- 1st subdivision DOF: $(4 \times 8) \times 5 = 160$
- 2nd subdivision DOF: $(4 \times 8) \times 5 \times 2^2 = 640$
- 3rd subdivision DOF: $(4 \times 8) \times 5 \times 2^4 = 2560$
- 4th subdivision DOF: $(4 \times 8) \times 5 \times 2^8 = 10240$

그림 18과 그림 19에서는 불균일 hemisphere 메쉬의

기하학적 형상과 수렴성을 나타내었다. 요소의 수가 증가함에 따라 수렴하고 있으나 수렴속도는 균일메쉬보다 느리게 나타났다.

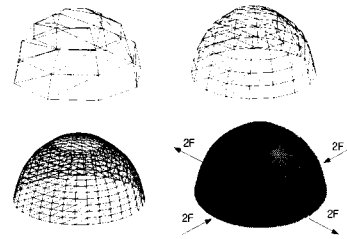


그림 16 Pinched hemisphere with 18 deg cutout

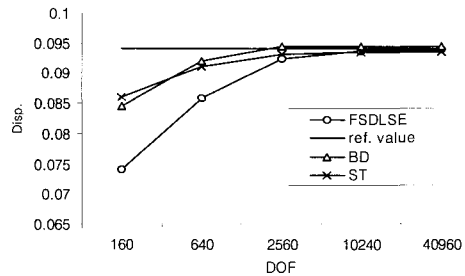


그림 17 Pinched hemisphere의 변위수렴 곡선

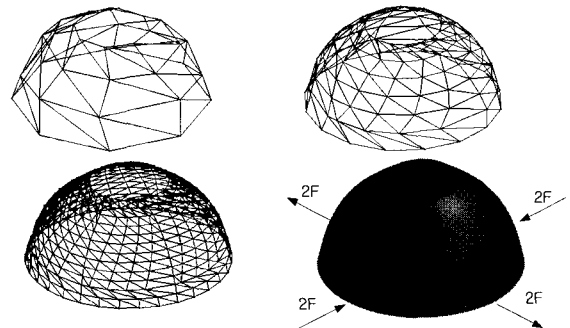


그림 18 Distorted pinched hemisphere with 18 deg cutout

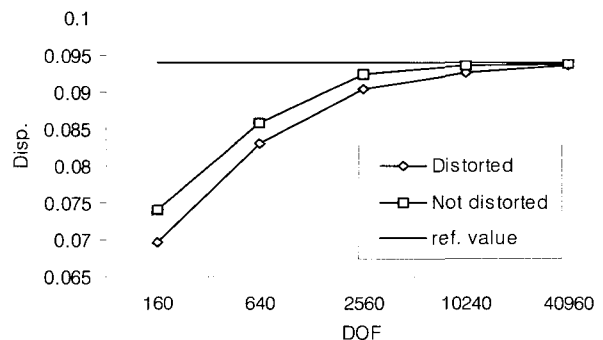


그림 19 Distorted pinched hemisphere 변위수렴곡선

그림 20에서 보여진 바와 같이 두께비가 작아짐에 따라

전단변형 강성행렬에 의한 잠김 현상이 나타남을 알 수 있다. 전단변형 강성행렬을 감차 적분함으로써 잠김 현상을 풀릴 수 있었다. 전단 변형부를 1점 적분함으로써 잠김 현상을 대폭 줄일 수 있다. 3점 적분도 잠김 현상을 감소시키나 1점 적분이 훨씬 효과적이었다.

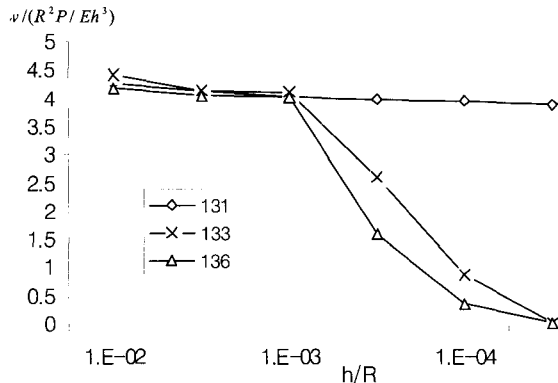


그림 20 Hemisphere의 두께비의 변화에 따른 수렴성

5. 결 론

본 연구에서는 Loop subdivision 방법에서 자유 곡면 위에 있는 데이터 값으로부터 곡면을 재구성하였을 때, 여러 종류의 곡면을 Loop subdivision 방법으로 구현하였고 6번 정도의 subdivision 과정을 거쳐서 생성된 곡면이 실제 데이터 값의 10^{-4} 의 오차 안으로 수렴된다는 것을 곡률(curvature)과 좌표값의 위치의 상대오차를 평가하여 알 수 있었다. 이러한 방법으로 적은 양의 데이터 값으로부터 부드러운 곡면을 가지는 원하는 형상의 데이터 값을 얻을 수 있게 된다. 그렇지만 곡면을 부드럽게 만들어 주는 서브디비전 과정에서 새로운 점이 생성되어서 삼입이 되어지더라도, 모델링 하는 곡면의 데이터 값들이 실제 데이터 값에 10^{-4} 의 오차 안으로 수렴하지 않는 경우를 볼 수 있었다. 이런 경우는 곡률의 변화가 심한 경우인데, 이럴 때에는, subdivision 과정을 수행하기 전에 얻게 되는 초기의 데이터 값의 개수를 곡률의 변화가 심한 부분에 증가시켜서 subdivision 과정을 수행하면 해결할 수 있다. 이와 같은 문제를 효과적으로 다루기 위해서는 앞에서도 언급하였듯이, adaptive refinement 기법이 요구되어지며, 이에 대한 연구는 현재 진행 중에 있다. 또한, 본 연구에서는 Loop 서브디비전 곡면을 이용한 쉘의 유한요소를 개발하였고 해석을 수행하여 해석 결과를 제시하였다. 횡전단 변형효과를 고려한 일차 전단 변형 쉘 이론에 기초한 subdivision 유한요소가 일반적인 곡면 구조물의 변형을 기술하기 위한 표준 subdivision 곡면 요소로 개발되었으

며 여러 가지 benchmark 문제에 대한 성능 평가를 수행하였고 만족할 만한 수렴성과 효율성을 보여주었다.

본 연구의 방법론은 고전 쉘 이론에 기초한 유한요소에 비해 C^0 조건만 요구되므로 구현하기 편리하며 경계조건을 부가하는데 특히 이득이 있다. 본 연구에서 개발된 Loop 서브디비전 쉘 요소는 다중해상도를 가지는 곡면의 해석과 설계에 필요한 강력한 도구가 될 것으로 기대한다.

후 기

이 논문은 2003년도 학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음. (KRF-2003-041-D00037)

참 고 문 헌

1. Cirak, F., Ortiz, M., Schröder, P., "Subdivision surface : a new paradigm for thin shell finite-element analysis," *International Journal Numerical Methods in Engineering*, Vol.47, 2000, pp.2039~2072
2. Cirak, F., Ortiz, M., Schröder, P., "Fully C^1 -conforming subdivision element for finite deformation thin-shell analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.51, 2001, pp.813~833
3. Cirak, F., Scott, M. J., Antonsson, E. K., Ortiz, M., Schröder, P., "Integrated modeling finite-element analysis and engineering design for thin shell structures using subdivision," *Computer Aided Design*, Vol.34, 2002, pp.137~148
4. Ahmad, S., Iron, B. and Zienkiewicz, O., "Analysis of thick and thin shell structures by curved elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.2, 1970, pp.419~451
5. Simo, J.C. and Fox, D.D., "On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parameterization," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.72, 1989, pp.267~304
6. Simo, J.C., Fox, D.D., and Rifai, S., "On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory; computational aspects" *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.73, 1989, pp.53~92
7. Zorin, D., Schröder, P., "Subdivision for modeling and animation," SIGGRAPH 2000 Course Note
8. Loop, C., "Smooth subdivision for surfaces based on triangles" Master's thesis, University of Utah, 1987

9. Catmull, E., Clark, J., "Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes" *Computer Aided Design*, Vol.10, No.6, 1978, pp.350~355
10. Dyn, N., Levin, D., Gregory, J., "A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control," *ACM Transaction on Graphics*, Vol.9, No.3, 1990, pp.160~169
11. Doo, D., Sabin, M. A., "Behavior of recursive subdivision surfaces near extraordinary points" *Computer Aided Design*, Vol.10, No.6, 1978, pp.356~360
12. Cho, M., Roh, H. Y. "Development of geometrically exact new shell elements based on general curvilinear coordinates" *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.56, No.1, 2003, pp.81~115
13. Stander, N., Matzenmiller, A., Ramm, E., "An assessment on assumed strain methods in rotation shell analysis." *Engineering Computations*, Vol.3, 1989, pp.58~66
14. Bathe, K. J., Dvorkin, E. N. "Formulation of general shell elements - The use of mixed interpolation of tensorial components." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.22, 1986, pp.697~722