

순환주기나 빈번한 작은 이동이 발생하는 공정관리를 위한 Z-CUSUM 관리도

강해운[†] · 강창욱 · 백재원
한양대학교 산업공학과

The Z-CUSUM Control Chart for the Process with Recurring Cycles or Frequent Small Shifts

Hae Woon Kang[†] · Chang Wook Kang · Jae Won Paik
Dept. of Industrial Engineering, Hanyang University

Key Words : recurring cycle, small shifts, Z-CUSUM control chart

Abstract

CUSUM control charts are widely used to monitor processes with small shifts. CUSUM control charts are, however, less effective in detecting for recurring cycles or frequent small shifts in the processes.

With Shewhart control charts, we have applied the variety of run rules to check the stability of process in addition to the situations that some points fall outside the control limits. In this paper, we propose the Z-CUSUM control chart for monitoring the process with recurring cycles or frequent small shifts by use of the zone concept as like the Shewhart control charts.

1. 서론

일반적으로 CUSUM 관리도는 작은 이동 (small shifts)이 자주 발생하는 공정들이나 자기 상관성이 존재하는 공정들에서 자주 이용된다. 그 이유는 CUSUM 관리도는 Shewhart 관리도처럼 각 샘플들의 값을 타점하여 공

정을 관리하지 않고 목표 값에서부터 관측 값까지의 편차들의 누적 합을 이용하여 공정을 관리하기 때문이다.

따라서, Shewhart 관리도에 비하여 작은 이동을 빠르게 감지할 수 있고, 또한 자기 상관성이 존재하는 공정에서도 이를 빠르게 감지할 수 있게 된다. 실제 산업 현장의 공정들에서 관리도를 적용할 경우 공정의 상

[†] 교신저자 kanghn@seaq.hanyang.ac.kr

태를 가장 잘 파악하고, 관리하기 위해서는 Shewhart 관리도와 CUSUM (또는 EWMA), 기타 등 여러 관리도를 동시에 사용함으로써 각 관리도의 장·단점을 최대한 활용하여 공정을 관리하는 것이다. 그러나 이러한 공정들에서 공정의 장·단점을 파악하여 적절한 여러 관리도를 동시에 이용하여 공정을 파악하고 관리한다는 것은 비용·시간·노동 등 여러 측면에서 현실적으로 많은 문제점을 갖게 된다.

따라서, 공정에 가장 적합한 관리도를 사용하면서 기타 관리도들의 장점을 어느 정도 보완해 줄 수 있다면 가장 효율적으로 공정을 관리하는 방법이 될 수 있을 것이다. 본 연구는 기존의 CUSUM 관리도의 문제점 및 이를 보완해 줄 수 있는 새로운 관리도를 제시하는데 그 목적이 있으며, 본 논문에서 제안하는 CUSUM 관리도를 MINITAB 을 이용하여 예시한다.

2. CUSUM 관리도와 연구 흐름

2.1 CUSUM 관리도

CUSUM 관리도(Page, 1954)는 공정 평균의 작은 이동(small shifts)에 민감한 관리도로서 널리 알려져 있다.

2.1.1 C_i 통계량에 대한 이해

일반적으로 CUSUM 관리도에 타점되는 통계량은 다음과 같다.

$$C_i^+ = \text{Max}[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+] \quad (1)$$

$$C_i^- = \text{Max}[0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-] \quad (2)$$

여기서, $C_0^+ = C_0^- = 0$, K (reference value) = $\frac{\delta}{2}\sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}$ 이다.

CUSUM 관리도의 판정은 위 식 (1)과 식 (2)의 값이 H (decision interval)값을 넘게 되면 공정에 이상이 있다고 판정을 하게 된다.

일반적으로 H 값은 표준편차의 5배인

$$H = 5\sigma, k = \frac{1}{2}\delta \text{를 사용하고 있으며, } h = 4$$

또는 5, $k = \frac{1}{2}$ 일 경우 좋은 수행도를 보

이는 것으로 알려져 있다[Hawkins, 1993].

CUSUM 관리도에서 사용되는 통계량(식 (1), (2))은 C_i 통계량에 K (reference value)를 첨가하여 구성한 것으로 C_i 통계량은 다음과 같다.

$$C_i = \sum_{j=1}^i (\bar{X}_j - \mu_0), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Montgomery(2001)는 위의 식 (3)의 C_i 통계량은 평균이 0을 갖는 랜덤 보행(random walk)을 한다고 하였다.

C_i 통계량이 랜덤보행을 하기 때문에 CUSUM 관리도는 통계량의 정규성에 대한 가정이 필요 없으며, CUSUM 관리도의 좀 더 정확한 ARL 및 수행도를 계산 및 비교하기 위한 수리적 모델에 관한 연구가 그 동안 꾸준히 이루어져 왔다.

Shewhart 관리도의 런 규칙들은 각 데이터의 정규성 가정 하에 각 영역 발생 확률 값을 이용하여 수리적 확률 계산에 의하여 런 규칙들을 제안하였으나 CUSUM 관리도

를 위한 런 규칙들을 C_i 통계량의 사용으로 인한 수리적 확률 방법에 의하여 제안하는데 어려운 문제점이 발생한다.

2.2 CUSUM 관리도의 연구 흐름

CUSUM 관리도에 관한 연구가 1954년 Page에 의하여 처음으로 제안된 후 Page(1961, 1962), Ewan(1963)등에 의하여 꾸준히 연구가 수행되었으며, Woodall(1986)은 CUSUM 관리도의 연구 흐름을 다음과 같이 크게 네 분야로 분류하였다.

2.2.1 CUSUM 관리도의 민감도에 관한 연구

CUSUM 관리도는 Shewhart 관리도에 비하여 공정 평균의 작은 이동에 민감한 반면에 Shewhart 관리도는 CUSUM 관리도에 비하여 공정 평균의 큰 이동에 좀 더 민감한 장점을 가진 것으로 널리 알려져 있다.

Gibra(1975), Woodall (1985), Lucas(1982), Waldmann(1996), Lu and Reynolds(2001), Atienza, Tang and Ang(2002) 등에 의하여 CUSUM 관리도의 민감도 및 민감도 향상에 관한 연구가 수행되어졌다.

2.2.2 수정된 V-Masks에 관한 연구

Ewan(1963)은 공정 평균에서 큰 이동의 발생시 CUSUM 관리도의 민감도를 향상시키기 위한 방법을 처음 제안하였으며 이후 Lucas (1973), Bissell(1979), Rowlands(1982)에 의하여 연구가 수행되어졌다.

2.2.3 수리적 모델에 관한 연구

CUSUM 관리도의 큰 장점은 통계량의 정규성에 관한 가정이 필요가 없다. 따라서 CUSUM 관리도의 좀 더 근사한 run-length 분포를 구하기 위한 연구가 Johnson&Leone (1962), Brook&Evans (1972), Lucas & Crosier (1982a), Woodall (1983,1984), Yashchin (1985), Hawkins (1992), Gan(1993), Luceno (1999), Luceno and Puig-pey(2000,2002)에 의하여 수행되었으며, 이러한 연구 발전에 마코브체인(Markov chain)의 접근 방법은 큰 영향을 주었다.

2.2.4 경제적 설계 모델에 관한 연구

CUSUM 관리도의 경제적 설계에 관한 연구가 Taylor(1968)에 의하여 처음으로 제안된 이후 Goel and Wu(1973), Chiu (1974), Rahim and Lashkari(1982), Abdellatif and EI-Shabrawy(1996) 등에 의하여 지속적으로 연구되었다. 현재의 주된 연구 흐름은 민감도 및 민감도 향상에 관한 연구 및 수리적 모델에 관한 연구가 주류를 이루고 있다.

3. 이상원인에 의한 패턴의 발생

많은 공정들에서 우연원인 외에 산발적으로 이상원인이 발생한다. 이러한 이상원인은 관리도에서 적절하게 관리 및 감지되지 못하는 경우가 많이 발생한다.

따라서, 이상원인을 적절하고 효율적으로 관리도에서 파악하는 것이 관리도의 사용 목적이다. 이러한 이상원인의 패턴 종류에는 여러 가지가 존재한다.

Dale H. Besterfield(2001)은 패턴의 종류를 간략하게 5가지로 분류하였다.

- A . 순환 주기(Recurring cycles)
- B . 두 개의 모집단(Two Populations)
- C . 공정수준의 변화 또는 도약 (Change or Jump in level)
- D. 공정수준의 추세 또는 일정한 변화 (Trend or steady change in level)
- E . 실수(Error or Mistakes)

위에서 제시한 다섯 가지 패턴 종류 중 D 패턴의 경우는 CUSUM 관리도에서 모두 정상적으로 감지되는 패턴이며, B, E 패턴의 경우 주로 패턴 발생의 원인이 공급자(supplier)나 장비(equipment), 재료(material)에 의한 패턴 발생의 원인인 경우가 대부분이다[Besterfield, 2001].

따라서, 본 논문에서는 CUSUM 관리도에서 패턴을 인식하지 못하는 경우가 발생할 수 있는 A 와 C 패턴의 이상 원인에 초점을 맞추고 있다. Dale H. Besterfield(2001)은 패턴의 종류와 함께 원인에 대하여 다음과 같이 언급하고 있다.

가. 순환주기(Recurring cycles) 발생

순환주기가 발생하는 경우, Shewhart 관리도들의 대표적인 관리도인 \bar{X} 관리도에서는 다음과 같은 이상원인에 의해 발생된다. (순환 주기가 발생하는 몇몇 예시들)

- A . 수입 자재 및 재료의 계절적인 효과들
- B . 습기 및 온도의 순환적인 효과들
- C . 화학적, 물리적, 기계적인 주 단위별, 일 단위별 효과들

D . 작업자의 주기적인 교대 및 순환

순환주기가 발생하게 되면 대체적으로 일정한 주기를 가지고 순환을 하게 된다.

나. 공정수준의 변화 또는 도약 (Change or Jump in level)

공정수준의 변화 또는 도약이 발생하는 경우, Shewhart 관리도의 대표적인 관리도인

\bar{X} 관리도에서는 다음과 같은 이상원인에 의해 발생하게 된다.

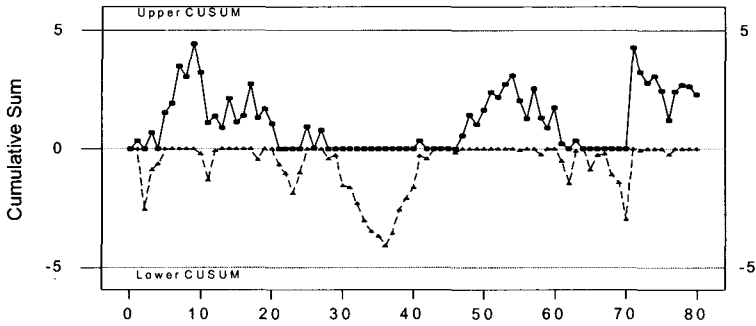
- A . 공정의 설정(process setting)에서의 고의적 또는 우연적 변화 발생
- B . 비 숙련자 또는 새로운 작업자 (operator)
- C . 원 재료에서의 차이
- D . 기계적 부분에서의 작은 오류 발생
- E . 공정에서의 이동 발생

3.1 패턴 발생 시 CUSUM 관리도의 문제점

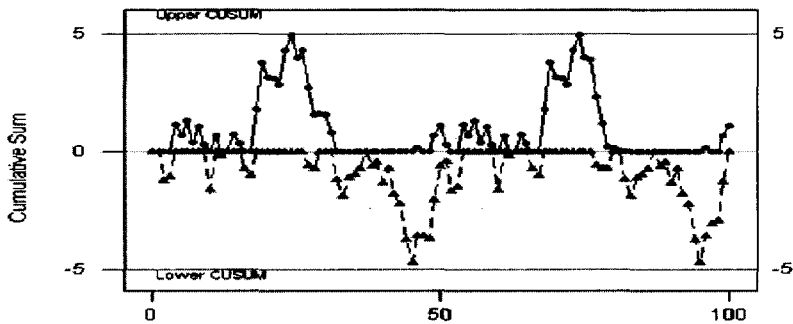
3.1.1 빈번한 작은 이동(small shift)의 발생

위 <그림 1>은 20개의 다른 공정 평균을 갖는 빈번한 작은 이동을 모의실험을 이용하여 임의로 발생시킨 경우의 CUSUM 관리도 예시이다. ($h = 5, k = 1/2$)

CUSUM 관리도는 한번의 작은 이동이 발생하였을 경우 지속적으로 공정 평균에서 이동된 값들이 누적되어 공정에서의 이상을 감지하지만 <그림 1>에서와 같이 빈번한 작은 이동이 발생할 경우 CUSUM 관리도가 제대로 감지하지 못하는 현상이 발생할



<그림 1> 빈번한 작은 이동이 발생한 CUSUM 관리도의 예



<그림 2> 순환주기가 발생한 CUSUM 관리도의 예

수 있게 된다.

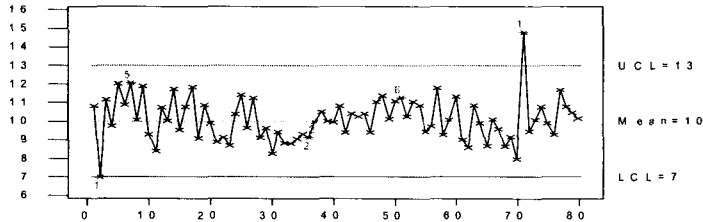
3.1.2 순환주기의 발생

위 <그림 2>는 패턴의 한 종류인 순환주기가 발생하였을 경우의 CUSUM 관리도의 예시이다. ($h = 5, k = 1/2$)

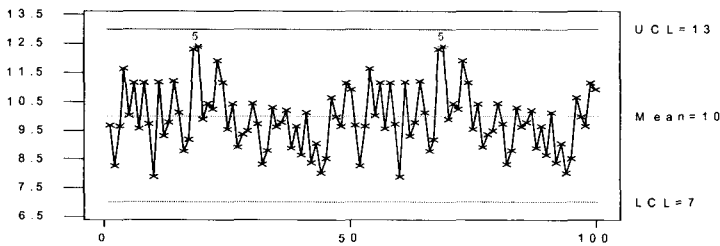
빈번한 작은 이동의 발생에서와 동일한

방법으로 모의실험을 수행하였을 경우 CUSUM 관리도가 순환주기를 감지하지 못하는 현상이 발생할 수 있게 된다.

위에서 언급한 순환주기 패턴의 발생 시 CUSUM 관리도가 제대로 이를 감지하지 못하는 현상이 발생하게 되는 원인은 CUSUM 관리도가 공정에서 발생된 작은 이동을 누적하여 관리한계선 밖에서 타점되



<그림 3> 빈번한 작은 이동이 발생한 \bar{X} 관리도의 런 규칙들 적용 예



<그림 4> 순환주기가 발생한 \bar{X} 관리도의 런 규칙들 적용 예

기 이전에 또 다른 공정 평균으로의 이동으로 인해 CUSUM 관리도에 타점 될 통계량이 영향을 받기 때문이다.

4. Shewhart \bar{X} 관리도의 특정 패턴 발생 시 문제 해결

Shewhart 관리도의 대표적인 관리도인 \bar{X} 관리도에서는 이러한 패턴 발생에 대한 감지하지 못하는 단점을 보완하기 위하여 Western Electric Handbook(1956)에서는 패턴 인식 및 작은 이동 감지를 목적으로 하는 런 규칙들(Runs Rules)을 제안하였다.

이렇게 제안된 런 규칙들은 관리도에 영역(zone) 개념 적용으로 영역 규칙들로도 불린다. 이 후 Deming(1982), Nelson(1984) 등에 의하여 지속적인 런 규칙들에 관한 연구가 진행되었다.

Champ and Woodall(1987)은 Western Electric Handbook(1956)에서 제안된 런 규칙들로 인하여 Shewhart 관리도가 관리 안정 상태(In-control)일 경우 ARL이 기존의 370.4에서 91.25로 짧아지기 때문에 런 규칙들을 적용시키는데 공정에 대한 많은 관찰과 주의가 필요함을 언급하고 있다. 하지만 이러한 단점에도 불구하고 패턴이 발생 하였을 경우 이를 감지하는데 좋은 수행도를 보이기

때문에 실제 현장에서 많이 적용되고 있다.

<그림 3>과 <그림 4>에서 보는 바와 같이 앞에서 제시한 예에서 빈번한 작은 이동의 발생 및 순환주기가 발생하였을 경우 \bar{X} 관리도에서 런 규칙들의 적용으로 인하여 패턴에 발생을 감지하는 수행도가 향상됨을 확인할 수 있다.

적용된 런 규칙들은 MINITAB에서 제공되는 8가지의 런 규칙들이며, 아래의 <표 1>를 통하여 확인할 수 있다.

이러한 런 규칙들에 의하여 감지된 (관리도 상에 표시된 숫자) 점들을 일반적으로 경고(Waring)으로 표현한다.

위 <그림 3>에서 빈번한 작은 이동이 발생하였을 경우 \bar{X} 관리도 상에서 70번째 데이터가 관리한계선 밖으로 타점되어 이상 신호가 발생하는 반면에 런 규칙들을 적용할 경우에는 6번째 점에서 MINITAB에서 적용된 5번째 규칙에 의하여 경고가 발생됨을 볼 수 있다.

위 <그림 4>에서도 순환주기가 발생하였을 경우 \bar{X} 관리도에서는 아무런 이상 신호가 발생하지 않는 반면 런 규칙들에 의하여 18번째 점에서 MINITAB에서 적용된 5번째

규칙에 의하여 경고가 발생함을 볼 수 있다.

5. Z-CUSUM 관리도의 설계

5.1 Z-CUSUM 관리도의 개념

CUSUM 관리도는 일반적으로 공정 평균의 작은 이동이 발생하였을 경우 민감한 관리도로 알려져 있다. 하지만 앞에서 제시한 특정 패턴이 발생하였을 경우 Shewhart 관리도에서처럼 수행도가 낮아짐을 알 수 있었다. Shewhart 관리도에서는 적용시 주의가 필요하다는 전제가 있기는 하지만 런 규칙 검정(Run Rules Test)을 Shewhart 관리도에 적용하여 이러한 문제점들을 해결하고 있는 반면에 CUSUM 관리도에서는 이러한 문제점들이 여전히 존재한다.

Z-CUSUM 관리도에서는 이러한 CUSUM 관리도의 특정 패턴 인식에 대한 문제점을 보완하기 위하여 Shewhart 관리도에서 적용하고 있는 런 규칙들(Zone Rules이라고도 한다)의 개념을 도입하였다.

이와 같이 기존의 CUSUM 관리도에 런

<표 1> MINITAB에서 Shewhart 관리도에 적용된 8가지의 런 규칙들

구분	런 규칙	구분	런 규칙
1	중심선으로부터 3σ 관리한계선 밖으로 한 점이 발생 되었을 경우	2	중심선으로부터 동일 측면에서 한 열에서 9점이 발생 되었을 경우
3	한 열에서 6점이 연속적으로 증가하거나 감소한 경우	4	상향과 하향을 변경해가면서 한 열에서 14점이 발생 되었을 경우
5	중심선으로부터 2σ 이상의 영역 밖으로 3점 중 2점이 발생 되었을 경우	6	중심선으로부터 1σ 영역 밖으로 5개점 중 4점이 발생 되었을 경우
7	중심선으로부터 1σ 영역 안에 15 점이 발생 되었을 경우	8	중심선으로부터 1σ 영역 밖으로 한 열에서 8점이 발생 되었을 경우

규칙들의 개념을 결합하여 특정 패턴 발생에 대한 수행도를 향상시킨 새로운 관리도를 Z-CUSUM 관리도라고 한다.

5.2 Z-CUSUM 관리도의 Run Rules의 개발

일반적으로 Shewhart 관리도에서 적용된 런 규칙들은 각각의 규칙들의 확률 값(p)을 기준으로 제안되었다.

$$ARL = \frac{1}{p} \quad (4)$$

(p : 관리한계선 밖으로 어떠한 점이 발생될 확률)

Shewhart 관리도의 ARL인 370.4를 기준으로 확률 값이 0.0027이하로 발생할 경우를 런 규칙들로 제안하였다.

그러나 CUSUM 관리도에서는 Shewhart 관리도에서와 같은 확률 값 계산에 의한 런 규칙들을 제안하는데 큰 어려움이 있다.

따라서, 현재 이러한 수리적 모형의 적용의 어려움을 해결하기 위한 방법으로 여러 방법론이 존재하며 모의실험 방법도 하나의 방법으로 사용되고 있다.

이러한 다양한 모의실험을 통하여 CUSUM 관리도에 적합한 런 규칙들을 찾을 수 있으며, 이를 통해 근사된 확률 값을 얻을 수 있게 된다.

이러한 근사된 확률 값은 모의실험에 의하여 계산된 확률 값이므로 작은 오차가 존재하게 된다.

또한 논문에서 제안한 런 규칙들(규칙2와 3)은 CUSUM 관리도의 특정 패턴 인식 문제를 보완할 런 규칙들을 제안하기 위한 것으로, \bar{X} 관리도의 런 규칙들 중 연구대상인 CUSUM 관리도의 특정 패턴과 관

련된 부분들을 중심으로 고안하였다.

5.3 Z-CUSUM 관리도의 영역(Zone) 설정

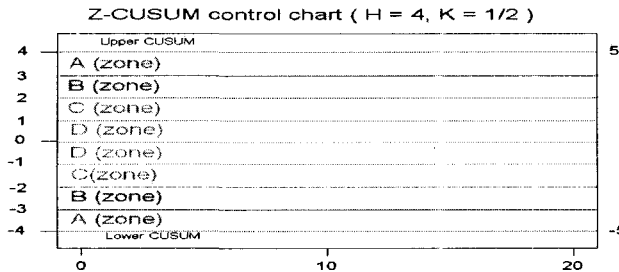
Shewhart 관리도에서 $\pm 3\sigma$ 로 관리도를 관리할 경우, 각 영역을 1σ 의 3 부분(A, B, C Zones)을 영역으로 설정하고 있는 반면에 Z-CUSUM 관리도에서는 4 부분(A, B, C, D Zones)을 영역으로 설정하고 있다. 4 부분으로 영역을 설정한 이유는

첫째, 4 부분으로 설정함으로써 인해 $h = 4$ (각 부분의 영역 크기 : 1) 또는 5(각 부분의 영역 크기 : 1.25) 일 경우, 관리도에 쉽게 각 부분의 영역을 표시 및 설정할 수 있다.

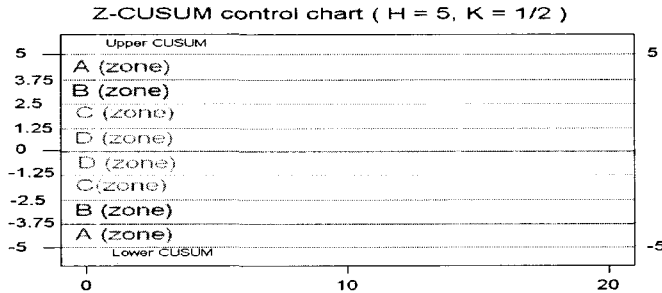
둘째, CUSUM 관리도를 위한 런 규칙들 개발에 있어서 다양한 모의실험 결과 개발의 편리성과 수행도 측면에서 큰 차이가 없었으며, 영역의 수를 최소화하도록 설정하였다.

위 2.1.1절에서 언급했던 바와 같이 일반적으로 $h = 4$ 또는 5, $k = \frac{1}{2}$ 일 경우, 좋은 수행도를 보인다. 따라서 CUSUM 관리도에서는 h 와 k 의 매개변수(parameter)로 일반적으로 $h = 4$ 또는 5, $k = \frac{1}{2}$ 이 사용이 되고 있다.

$h = 4$ 또는 5일 경우 (단, $k = 1/2$)의 영역 설정 방법은 다음의 <그림 5>와 <그림 6> 과 같다. 본 논문의 다음 절에서 제안하는 Z-CUSUM 관리도를 위한 런 규칙들을 이후 Z-Runs Rules로 표현하도록 한다. 본 논문에서 제안하는 Z-Runs Rules는 기본적으로 $h = 4$ 또는 $h = 5$, $k = 1/2$,



<그림 5> $h = 4, k = 1/2$ 일 경우의 Z-CUSUM 관리도의 영역 설정



<그림 6> $h = 5, k = 1/2$ 일 경우의 Z-CUSUM 관리도의 영역 설정

<표 2> 중심선의 한 쪽 영역에 연속적인 샘플이 발생 할 평균 확률 ($h = 4$ 또는 $5, k = 1/2$)

	중심선의 한 쪽 영역(Zone)에 연속적인 샘플 수							
샘플 수	13	14	15	16	17	18	19	20
확률	0.0075	0.0061	0.00497	0.00406	0.0033	0.00278	0.00228	0.00192

을 기준으로 제안되었다.

각 Z-Runs Rules의 ARL_0 판단 기준은 아래와 같다.

(가). $h = 4$ 일 경우 $p = 0.00595$

(나). $h = 5$ 일 경우 $p = 0.00215$

Shewhart 관리도에서는 Shewhart 관리도

의 ARL_0 가 370.4 이므로 위 식 (4)에 의하여 계산된 확률 값($p = 0.0027$)을 기준으로 판단하였으며, 이와 동일한 방법으로 $h = 4$ 일 경우, CUSUM 관리도 ARL_0 가 168 이므로(참조 <표 6>) Z-CUSUM 관리도는 위 식 (4)에 의하여 계산된 확률 값($p = 0.00595$)

<표 3> 중심선의 한 쪽 영역에 연속적으로 샘플의 증가 또는 감소가 발생 할 평균 확률
($h = 4$ 또는 $5, k = 1/2$)

샘플 수	연속적 샘플의 증가 (Upper)			연속적 샘플의 감소 (Lower)		
	4	5	6	4	5	6
확률	0.00617349	0.00212198	0.0006075	0.00620529	0.00201717	0.00059448

<표 4> 각 영역에 처음으로 타점 될 평균 확률 ($k=1/2$)

영역	Upper Z-CUSUM				Lower Z-CUSUM			
	D	C	B	A	D	C	B	A
$h = 4$	0.7842	0.1958	0.0193	0.0007	0.7849	0.1952	0.0192	0.0007
$h = 5$	0.86929	0.126324	0.004349	0.000037	0.86969	0.1260	0.004274	0.00003627

<표 5> 한쪽 영역에서 반대쪽 영역으로 타점 될 평균 확률 ($k=1/2$)

반대 영역	D 영역				C 영역				B 영역				A 영역			
	D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B	A
$h=4$	0.5482	0.1515	0.0396	0.0098	0.1233	0.0704	0.0097	0.00107	0	0.0103	0.002385	0.00016	0	0.00628	0.00121	0.0000779
$h=5$	0.662	0.103	0.0039	0.000039	0.159	0.0460	0.00220	0.000033	0.0087	0.0125	0.00059	0.000014	0	0.00149	0.00017	0.000004

를 기준으로 판단하였다.

$h = 5$ 일 경우, CUSUM 관리도 ARL_0 가 465 이므로 Z-CUSUM 관리도는 위 식 (4)에 의하여 계산된 확률 값($p = 0.00215$)을 기준으로 판단하고, 다양한 모의실험 결과를 통해 얻어진 근사적 확률 값과 비교 후 런 규칙들을 제안하였다.

이와 같이 CUSUM 관리도에 영역 개념을 적용하여 새롭게 제안한 관리도인 Z-CUSUM 관리도가 갖는 특징적인 장점들은 간략히 다음과 같다.

첫째, 이미 Shewhart 관리도들에서 영역의

개념이 사용되고 있으므로 새롭게 제안하는 Z-CUSUM 관리도에 대하여 이해하기 쉽고, 현장에서 새로운 관리도에 대한 부가적인 부담이나 개념의 이해가 필요 없다.

둘째, 기존의 CUSUM 관리도에 적용하기 때문에 관리도 사용이 편리하다.

셋째, 기존의 CUSUM 관리도에 추가적인 계산식이나 수식 또는 매개 변수 등의 추가 없이 CUSUM 관리도에 영역을 그리는 것만으로 간편하게 특정 패턴에 대한 수행도를 향상시킬 수 있다.

5.4 모의실험 수행 결과를 이용한 Z-Runs Rules 제안

5.4.1 모의실험 수행 결과

모의실험은 랜덤한 정규분포 표본(10억개의 표본)을 연속적으로 발생하여 이 표본을 이용, CUSUM 관리도의 계산 과정과 동일한 과정 및 방법으로 다양한 모의실험을 수행하였다. ($X \sim N(0, 1)$, $k = 1/2$, $h = 4$ 또는 5 , 실험횟수 : 10,000회)

본 논문에서 제안하는 런 규칙들의 1~3 규칙들은 Shewhart 관리도의 런 규칙들을 응용하여 제안되었으며, 4~5 규칙들은 다양한 모의실험을 통한 발견적(heuristic) 해법을 이용하여 제안하였다. 이렇게 모의실험을 통해 얻어진 결과들을 이용하여 새롭게 제안된 Z-Runs Rules 들은 다음과 같다.

① 위의 <표 2>에서 알 수 있듯이 중심선의 한쪽 영역에서 $h = 4$ 일 경우, 위 판단 기

준(가)에 의하여 표본 15개, $h = 5$ 일 경우

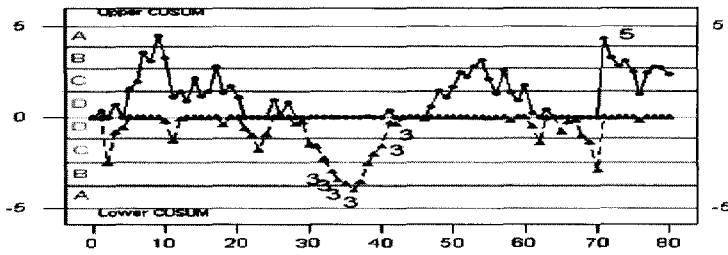
위에서 제시한 판단기준 (나)에 의하여 표본 20개가 연속적으로 발생 할 평균 확률 값이 각 판단 기준 확률 값 이하 중 가장 큰 발생 확률임을 알 수 있다.

② 위의 <표 3>에서 알 수 있듯이 중심선의 한 쪽 영역에서 $h = 4$ 일 경우, 판단 기준 (가)과 $h = 5$ 일 경우 판단기준 (나)에 의하여 모두 표본 5개 이상이 연속적으로 증가 또는 감소 현상이 발생 할 평균 확률 값이 판단 기준 확률 값 이하 중 가장 큰 발생 확률임을 알 수 있다.

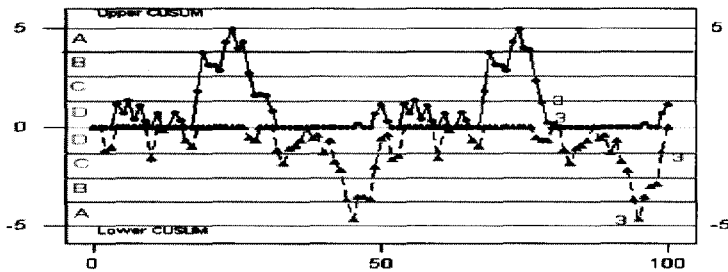
③ 위의 <표 4>에서 알 수 있듯이 각 영역에 처음으로 표본이 타점 될 평균 확률 값(p)은 $h = 4$ 일 경우, 판단 기준 (가)과 $h = 5$ 일 경우 판단기준 (나)에 의하여 모두 영역 A에 처음으로 타점될 확률 값이 각 판단 기준 확률 값 이하 중 가장 큰 발생 확률임을 알 수 있다. (단, $C_i^+ & C_i^- = 0$ and C_{i+1}^+ (or C_{i+1}^-)가 타점 될 경우)

<표 6> Z-CUSUM 관리도를 위한 Z-Runs Rules ($h=4$ 또는 5 , $k = 1/2$)

규칙	<ol style="list-style-type: none"> 1. 관리한계선 밖으로 점이 발생되었을 경우 2. 한쪽 영역에 연속적인 ($h=4 : 15$개), ($h=5 : 20$개) 이상의 점이 발생되었을 경우 3. 한 쪽 영역에 연속적으로 5개 이상의 점의 증가 또는 감소가 발생되었을 경우 4. A 영역(zone)에 첫 번째 점이 발생되었을 경우 ($h = 4$ 또는 5일 경우) ($C_i^+ & C_i^- = 0$ and C_{i+1}^+ (or $C_{i+1}^-) > 0$ 인 경우) 5. 한쪽 영역(Zone)에서 반대쪽 영역으로 점이 발생 되었을 경우 ($h = 4$ 일 경우 : C 영역-\rightarrow A, B-\rightarrow D or A , A-\rightarrow D or B or A) ($h = 5$ 일 경우 : D 영역-\rightarrow A, C-\rightarrow A, B-\rightarrow B or A, A-\rightarrow D or C or B or A)
----	---



<그림 7> 빈번한 작은 이동이 발생한 Z-CUSUM 관리도의 Z-Runs Rules 적용 예 ($h=5$)



<그림 8> 순환주기가 발생한 Z-CUSUM 관리도의 Z-Runs Rules 적용 예 ($h=5$)

④ 위의 <표 5>에서 한 쪽 영역에서 타점된 후 반대쪽 영역으로 타점 될 때 $h = 4$ 일 경우, 각 영역의 확률 값이 판단 기준 (가) 확률 값보다 크지 않는 경우는 C→A, B→D, B→D or B or A, A→D or B or A 이다.

또한 위 경우의 모든 확률 값의 합은 0.0049로 기준 값의 확률 값 이하임을 알 수 있다.

$h = 5$ 일 경우, 각 영역의 확률 값이 판단 기준 (나)의 확률 값보다 크지 않는 경우는 D→A, C→A, B→ B or A, A→D or C or B or A 이다.

또한 위의 경우 모든 확률 값의 합은 0.0023로 기준을 조금 초과하지만 ARL에 크게 영향을 미치지 않는 근사 값을 알 수 있다.

5.4.2 Z-CUSUM 관리도를 위한 Z-Runs Rules 제안

5.4.1절에서 언급한 모의실험의 수행 결과를 이용하여, 본 논문에서 새롭게 제안하는 5가지 Z-Runs Rules는 다음과 같다.

Z-Runs Rules의 첫 번째 규칙은 Shewhart 관리도에서 일반적으로 적용되는 규칙(rule)과 동일하며, 이 외의 추가적인 네 가지 규칙들(Rules)은 4.4.1.절의 <표 2>~<표 5>의 모의실험 수행 결과의 근사 확률 값(p)을 이용하여 새롭게 제안하는 런 규칙들이다.

5.5 Z-Runs Rules를 이용한 Z-CUSUM 관리도의 적용 예

<그림 3>과 <그림 7>, <그림 4>와 <그림 8>에서 두 이상 원인에 의한 특정 패턴 발생 시 수행도 비교 예시를 통해 \bar{X} 관리도와 Z-CUSUM 관리도의 수행도를 비교해 볼 수 있다.

<그림 4>와 <그림 8>에서는 순환 주기 발생 시, 아래에서 보이는 바와 같이 런 규칙 검정을 적용한 \bar{X} 관리도처럼 특정 패턴을 감지 할 수 있다. 다시 말하면 순환주기가 발생하였을 경우에 있어서 <그림 2>에서 보듯이 기존 CUSUM 관리도에서는 이상원인에 의한 특정한 패턴에 대한 수행도가 현저히 저하되는 것을 확인 할 수 있다.

그러나, Shewhart 관리도에서는 이러한 특정 패턴에 대한 수행도 향상을 위하여 Shewhart 런 규칙들을 적용하여 수행도가 향상이 되는 것을 <그림 4>를 통하여 알 수 있다.

또한, 이러한 CUSUM 관리도의 특정 패턴에 대한 문제점을 보완한 Z-CUSUM 관리도의 런 규칙들인 Z-Runs Rules들을 이용한 Z-CUSUM 관리도의 수행도는 <그림 8>에서 보는 바와 같이 CUSUM 관리도에 비하여 수행도가 향상되는 것을 알 수 있다.

<그림 3>와 <그림 7>에서는 빈번한 변화를 갖는 작은 이동의 발생 시, 순환주기 발생과 동일하게 Shewhart 런 규칙 검정(runs rules testing)을 적용한 Shewhart 관리도처럼 Z-CUSUM 관리도가 특정 패턴을 감지하여 수행도가 향상됨을 알 수 있다.

다시 말하면 빈번한 변화를 갖는 작은 이동의 발생 시, CUSUM 관리도에서는 이러한 패턴의 발생에 대하여 수행도가 낮아지는 반면에 <그림 3>의 Shewhart 런 규칙 검정을 적용한 Shewhart 관리도에서는 이를 감지하여 수행도가 향상되어지는 것을 알 수 있다.

또한, Z-CUSUM 관리도에 적용하기 위한 새

로운 런 규칙들인 Z-Runs Rules를 이용한 Z-CUSUM 관리도의 수행도는 <그림 7>에서 보는 바와 같이 CUSUM 관리도에 비하여 수행도가 향상되는 것을 알 수 있다.

6. CUSUM 관리도와 Z-CUSUM 관리도의 수행도 비교

6.1 순환주기 발생 시 수행도 비교

이제까지 CUSUM 관리도가 특정 패턴 발생 시 패턴 발생의 문제점이 있음을 지적하였으며, 이를 해결하기 위하여 Z-Runs Rules를 이용한 Z-CUSUM 관리도를 제안하였다.

순환주기 발생 시 CUSUM 관리도와 Z-Run Rules를 적용한 Z-CUSUM 관리도의 수행도를 비교하기 위한 모의실험을 수행하였으며, 수행 결과는 아래의 <표 7>, <표 8> 과 같다.

순환주기의 발생 시 ARL을 비교하기 위하여 다음 3가지 경우를 고려하여 ARL을 측정하였다.

1. Cycle 중심의 목표치로부터의 공정 변화량 (Mean Shift) : ($0.2\sigma \sim 2.0\sigma$)
2. 주기 : (20 ~ 1000)
3. 진폭 : ($0.5\sigma \sim 2.0\sigma$)

위 3가지 경우를 고려하여 ARL을 측정 시, 위 <표 7>은 $h = 4$ 일 경우의 측정 결과이며, <표 8>은 $h = 5$ 일 경우의 측정 결과이다.

<표 7>과 <표 8>에서의 감지율이란 모의실험을 통해 임의의 순환 주기를 발생 시켰을 경우에 이를 감지할 능력을 말한다. 위 <표 7>과 <표 8>에서, 감지율(%)은 100번의 순환주기 발

<표 7> $h = 4$ 일 경우, CUSUM 관리도와 Z-CUSUM 관리도의 ARL 비교 (2)

공정 변화량(σ) 주기		1.0				1.5				2.0			
		진폭($k\sigma$)				진폭($k\sigma$)				진폭($k\sigma$)			
		0.5	1.0	1.5	2.0	0.5	1.0	1.5	2.0	0.5	1.0	1.5	2.0
20	CUSUM	8.939	8.23	7.69	7.26	4.68	4.792	4.76	4.73	3.28	3.33	3.395	3.413
	감지율(%)	93.36	93.6	95.69	96.27	100	99.98	99.96	99.9	100	100	100	100
	Z-CUSUM	8.94	8.25	7.72	7.28	4.68	4.792	4.76	4.73	3.28	3.33	3.395	3.413
	감지율(%)	93.42	93.77	95.91	96.43	100	99.98	99.96	99.9	100	100	100	100
50	CUSUM	8.79	8.46	7.6	7.51	4.708	4.751	4.781	4.702	3.268	3.35	3.40	3.439
	감지율(%)	99.99	99.99	100	99.99	100	100	100	100	100	100	100	100
	Z-CUSUM	8.66	8.32	7.52	7.46	4.707	4.75	4.78	4.701	3.268	3.35	3.40	3.439
	감지율(%)	100	100	100	99.99	100	100	100	100	100	100	100	100
80	CUSUM	8.74	8.43	8.0	7.56	4.70	4.75	4.762	4.71	3.266	3.33	3.395	3.384
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	Z-CUSUM	8.62	8.29	7.9	7.50	4.70	4.75	4.761	4.705	3.266	3.33	3.395	3.383
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
100	CUSUM	8.71	8.33	7.88	7.50	4.66	4.752	4.725	4.722	3.270	3.35	3.40	3.382
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	Z-CUSUM	8.60	8.21	7.81	7.45	4.66	4.751	4.724	4.72	3.270	3.35	3.40	3.382
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
300	CUSUM	8.71	8.40	8.0	7.44	4.70	4.751	4.767	4.72	3.266	3.355	3.39	3.383
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	Z-CUSUM	8.57	8.26	7.91	7.39	4.70	4.75	4.766	4.717	3.266	3.355	3.39	3.383
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
500	CUSUM	8.71	8.47	7.98	7.49	4.701	4.753	4.724	4.727	3.271	3.357	3.406	3.402
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	Z-CUSUM	8.59	8.33	7.90	7.44	4.701	4.752	4.723	4.726	3.271	3.357	3.406	3.402
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
1000	CUSUM	8.66	8.37	8.88	7.50	4.72	4.739	4.736	4.749	3.265	3.358	3.39	3.43
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	Z-CUSUM	8.54	8.24	8.83	7.46	4.72	4.739	4.735	4.747	3.265	3.358	3.39	3.43
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

생을 감지할 총 비율이다. 즉 감지율 10%의 의미는 총 100회의 발생된 순환주기를 10회만을 감지하였음을 뜻한다. 또한 표의 ARL은 순환주기를 감지하였을 경우만을 대상으로 계산하였다. 따라서, <표 7>과 <표 8>에서 CUSUM 관리

도와 Z-CUSUM 관리도의 수행도를 비교하기 위해서는 먼저 CUSUM 관리도와 Z-CUSUM 관리도의 감지율을 먼저 비교한 후 감지율이 동일할 경우 다음으로 ARL을 비교해야 한다. 예를 들면 위 <표 7>에서 공정 변화량이 0.2

<표 8> $h = 5$ 일 경우, CUSUM 관리도와 Z-CUSUM 관리도의 ARL 비교 (1)

공정 변화량(σ) 주기		0.2				0.4				0.6				0.8			
		진폭($k\sigma$)				진폭($k\sigma$)				진폭($k\sigma$)				진폭($k\sigma$)			
		0.5	1.0	1.5	2.0	0.5	1.0	1.5	2.0	0.5	1.0	1.5	2.0	0.5	1.0	1.5	2.0
20	CUSUM	51.55	29.9	16.92	14.75	15.47	23.17	14.90	12.68	13.4	15.31	12.08	11.31	12.50	11.46	10.70	10.97
	감지율(%)	0.31	7.6	23.92	42.07	1.71	15.92	36.46	52.0	11.66	35.22	53.34	67.05	41.65	62.82	73.2	80.26
	Z-CUSUM	19.71	16.6	14.65	13.31	14.38	14.0	13.00	12.30	13.4	12.74	11.82	11.05	12.50	11.44	10.67	10.16
	감지율(%)	0.33	7.6	23.92	42.07	1.71	15.92	36.46	52.0	11.66	35.22	53.34	67.05	41.65	62.82	73.2	80.26
50	CUSUM	31.76	29.04	26.78	23.31	30.14	26.58	23.21	20.49	26.34	21.55	18.47	16.39	17.05	15.22	13.64	12.50
	감지율(%)	0.9	20.63	51.5	75.27	14.82	51.28	74.63	87.0	67.07	85.3	93.02	96.67	98.37	98.6	98.93	99.31
	Z-CUSUM	35.83	31.1	27.61	23.66	32.53	27.64	23.60	20.55	25.14	21.43	18.34	16.28	15.78	14.75	13.44	12.39
	감지율(%)	5.29	27.64	55.79	77.57	40.92	63.09	79.06	88.53	89.6	91.71	94.87	97.27	99.31	99.5	99.33	99.45
80	CUSUM	48.50	42.85	37.03	30.49	43.86	36.43	29.69	24.14	32.6	25.16	20.07	17.30	16.90	15.24	13.62	12.52
	감지율(%)	2.07	32.73	68.5	89.69	28.18	72.55	90.25	96.64	90.22	96.64	98.91	99.59	100	99.98	99.95	99.99
	Z-CUSUM	49.42	44.15	37.47	30.34	42.19	35.33	28.98	23.81	26.3	23.18	19.33	17.01	15.65	14.48	13.32	12.33
	감지율(%)	11.62	44.84	73.48	91.17	66.9	84.21	93.45	97.34	99.02	98.89	99.41	99.72	100	100	99.98	99.99
100	CUSUM	54.35	50.13	42.53	32.78	51.6	41.59	32.61	25.61	34.22	25.78	20.79	17.59	16.67	15.2	13.82	12.54
	감지율(%)	2.81	39.34	76.97	94.41	37.26	80.84	95.01	98.69	95.8	98.83	99.67	99.83	100	100	99.99	100
	Z-CUSUM	60.15	51.08	42.12	32.40	47.17	38.95	31.14	25.05	26.09	22.90	19.75	17.15	15.52	14.52	13.48	12.37
	감지율(%)	15.21	52.92	81.71	95.44	77.99	90.98	96.75	99.04	99.8	99.75	99.88	99.94	100	100	100	100
300	CUSUM	151.1	116.8	66.65	38.99	116.6	102.4	36.66	26.19	35.77	26.56	21.21	17.47	16.65	15.12	13.72	12.45
	감지율(%)	9.02	79.09	99.17	99.97	81.67	100	99.99	99.99	100	100	100	100	100	100	100	100
	Z-CUSUM	143.8	102.9	60.30	37.46	65.1	49.19	33.35	25.29	25.71	23.24	20.01	17.10	15.51	14.41	13.35	12.27
	감지율(%)	45.6	91.42	99.61	99.98	99.49	100	100	99.99	100	100	100	100	100	100	100	100
500	CUSUM	252.2	156.2	69.11	38.93	148.7	60.22	36.98	26.35	35.88	26.17	20.91	17.70	16.78	15.22	13.55	12.47
	감지율(%)	15.2	93.41	99.93	100	94.68	99.99	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	Z-CUSUM	219.4	121.2	61.79	37.36	64.5	45.84	33.61	25.47	25.69	22.99	19.75	17.24	15.62	14.52	13.24	12.29
	감지율(%)	65.34	98.31	99.97	100	99.99	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
1000	CUSUM	473.5	187.3	70.02	38.98	172	60.29	36.79	26.06	35.86	26.15	20.98	17.59	16.63	15.21	13.89	12.34
	감지율(%)	27.87	99.53	100	100	99.77	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	Z-CUSUM	340.7	128.2	62.99	37.27	64.7	45.84	33.50	25.19	25.64	22.84	19.79	17.14	15.54	14.48	13.48	12.22
	감지율(%)	88.33	99.96	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

이고 진폭이 1.0, 주기가 20인 경우의 CUSUM 관리도의 ARL은 15.01인 반면에 Z-CUSUM 관리도의 ARL은 15.73이다.

따라서, CUSUM 관리도의 ARL이 Z-CUSUM 관리도의 ARL보다 크지만 Z-CUSUM 관리도의

순환주기 감지율이 93.77%로 CUSUM 관리도의 감지율이 93.6%보다 높기 때문에 이러한 경우 Z-CUSUM 관리도가 좋은 수행도를 보인다고 말할 수 있으며 위의 <표 7>과 아래의 <표 8>을 통하여 이를 확인 할 수 있다.

<표 8> $h = 5$ 일 경우, CUSUM 관리도와 Z-CUSUM 관리도의 ARL 비교 (2)

공정 변화량(σ) 주기		1.0				1.5				2.0			
		진폭($k\sigma$)				진폭($k\sigma$)				진폭($k\sigma$)			
		0.5	1.0	1.5	2.0	0.5	1.0	1.5	2.0	0.5	1.0	1.5	2.0
20	CUSUM	10.87	9.76	9.21	8.78	5.71	5.84	5.85	5.84	3.94	4.0	4.02	4.089
	감지율(%)	80.62	85.35	88.86	90.67	100	99.92	99.68	99.49	100	100	100	100
	Z-CUSUM	10.87	9.76	9.21	8.74	5.71	5.84	5.85	5.84	3.94	4.0	4.02	4.089
	감지율(%)	80.62	85.35	88.86	90.67	100	99.92	99.68	99.49	100	100	100	100
50	CUSUM	10.76	10.42	10.04	9.48	5.71	5.752	5.765	5.72	3.94	3.99	4.03	4.085
	감지율(%)	100	99.95	99.98	99.98	100	100	100	100	100	100	100	100
	Z-CUSUM	10.66	10.27	9.93	9.42	5.71	5.751	5.75	5.72	3.94	3.99	4.03	4.085
	감지율(%)	100	99.98	99.98	99.98	100	100	100	100	100	100	100	100
80	CUSUM	10.75	10.33	10.11	9.44	5.71	5.75	5.76	5.68	3.94	3.99	4.026	4.087
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	Z-CUSUM	10.65	10.22	10.02	9.39	5.71	5.75	5.76	5.68	3.94	3.99	4.026	4.087
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
100	CUSUM	10.73	10.42	9.83	9.38	5.67	5.70	5.75	5.67	3.945	3.99	4.029	4.085
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	Z-CUSUM	10.64	10.29	9.77	9.32	5.67	5.70	5.75	5.67	3.945	3.99	4.029	4.085
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
300	CUSUM	10.72	10.36	9.94	9.52	5.66	5.75	5.76	5.68	3.94	4.0	4.02	4.085
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	Z-CUSUM	10.63	10.25	9.87	9.44	5.66	5.75	5.76	5.68	3.94	4.0	4.02	4.085
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
500	CUSUM	10.67	10.39	9.95	9.39	5.68	5.71	5.75	5.66	3.94	4.0	4.02	4.085
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	Z-CUSUM	10.60	10.29	9.85	9.35	5.68	5.71	5.75	5.66	3.94	4.0	4.02	4.085
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
1000	CUSUM	10.70	10.34	9.93	9.37	5.68	5.7	5.75	5.65	3.935	4.0	4.03	4.085
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	Z-CUSUM	10.62	10.24	9.82	9.32	5.68	5.7	5.75	5.65	3.935	4.0	4.03	4.085
	감지율(%)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

1. Z-CUSUM 관리도의 감지율 \geq CUSUM 관리도의 감지율
2. Z-CUSUM 관리도의 ARL \leq CUSUM 관리도의 ARL (단, Z-CUSUM 관리도의 감지율 \geq CUSUM 관리도의 감지율인 경우)

이러한 결과를 바탕으로 $h = 4$ 인 경우와 $h = 5$ 일 경우 모두 Z-CUSUM 관리도의 수행도가 CUSUM 관리도의 수행도보다 우수함을 알 수 있다. 또한 $h = 4$ 인 경우에 $h = 5$ 인 경우에 비하여 감지 확률 및 ARL의 결과 값이 우수함

을 알 수 있다.

특히, 공정 변화량이 1.0σ 이하인 경우 수행도가 CUSUM 관리도에 비하여 좋으며, 공정 변화량이 클수록 두 관리도의 수행도가 서로 비슷해짐을 알 수 있다. 이는 공정 변화량이 크면 ARL이 짧아져 Z-Runs Rules를 적용하기 힘들어지기 때문이다.

6.2 빈번한 작은 이동(small shifts)의 발생 시 ARL 비교

6.1절에서 순환주기 발생 시 수행도의 비교를 하였다. 본 절에서는 빈번한 작은 이동(small shifts)이 발생하였을 경우 CUSUM 관리도와 Z-CUSUM 관리도를 비교하기 위하여 모의실험을 실시하였으며, 실험 결과는 아래의 <표 9>와 같다. 관리 상태를 $H_0: \mu = \mu_0$ 라 하고, 이상상태를 H_1 으로 정의하였을 경우 공정 평균 변화량($k\sigma$), 진폭($k\sigma$), 발생 샘플 수를 고려하여 H_1 을 정의한다면

$$H_1: \mu_1 = \mu_0 \pm k\sigma \text{ (공정 변화량),}$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 \pm k\sigma \text{ (진폭),}$$

발생 샘플 수 : N (단, $N > 0$)

으로 정의 할 수 있다.

여기서 빈번한 작은 이동이란 공정 변화량 및 발생 개수가 작은 경우로 본 실험에서는 빈번한 작은 이동의 다양한 변화의 패턴을 고려하기 위하여 다음의 3가지 경우를 고려하였다.

1. Cycle 중심의 목표치로부터의 작은 변화량 (mean shift) : ($0.0\sigma \sim 0.5\sigma$)
2. 발생 샘플 수 : ($20 \sim 50$)
3. 진폭 : ($0.5\sigma \sim 1.5\sigma$)

이를 바탕으로 측정된 ARL은 <표 9>이며, Z-CUSUM 관리도의 수행도가 $h = 4$ 또는 $h = 5$ 인 모든 경우에서 CUSUM 관리도에 비하여 수행도가 우수함을 알 수 있다.

<표 9 > CUSUM 관리도와 Z-CUSUM 관리도의 ARL 비교

		공정 평균의 변화량($k\sigma$) : $0.0\sigma \sim 0.5\sigma$						
		$h = 4$			$h = 5$			
진폭	샘플수	최소	0.5	1.0	0.5	0.5	1.0	
		최대	1.0	1.5	1.0	1.5	1.5	
20	30	CUSUM	111.6	66.90	45.25	205.3	116.0	77.76
		Z-CUSUM	71.69	52.08	39.60	119.8	86.24	65.86
20	40	CUSUM	112.6	67.95	45.56	202.7	116.05	77.96
		Z-CUSUM	71.88	52.66	39.73	118.3	85.95	67.96
20	50	CUSUM	113.9	68.37	46.42	201.5	116.96	78.72
		Z-CUSUM	73.05	53.29	40.51	120.4	85.91	66.33
30	40	CUSUM	112.8	68.79	46.13	201.6	117.05	77.78
		Z-CUSUM	72.63	53.78	40.08	118.0	86.65	65.42
30	50	CUSUM	114.6	68.58	45.81	200.2	117.2	78.30
		Z-CUSUM	74.07	53.26	39.73	118.2	87.6	66.47
40	50	CUSUM	114.6	69.86	46.10	202.5	116.2	79.96
		Z-CUSUM	74.89	54.21	40.09	120.0	86.23	67.67

빈번한 작은 이동이 발생하였을 경우, 6.1절에서 고려한 패턴의 감지율은 실험 결과 모두 100%였기 때문에 별도로 표시하지 않고, ARL만을 표시하였다.

6.3 한번의 Shift 발생 시 ARL 비교

2.1.1.절에서 언급한 바와 같이 Hawkins (1993)는 일반적으로 CUSUM 관리도에서 $h = 4$ 또는 $h = 5$ 이고, $k = \frac{1}{2}$ 일 경우, 좋은 수행도를 보인다고 하였다.

Montgomery(2001)는 CUSUM 관리도에 관한 ARL($k = 1/2$ 이고, $h = 4$ 또는 5일 경우)을 연구하였으며, CUSUM 관리도의 ARL은 아래의 <표 10>에 포함된 CUSUM 관리도의 ARL이며 Z-CUSUM 관리도의 ARL과 CUSUM 관리도의 ARL 비교는 아래의 <표 10> 과 같다.

아래의 <표 10>에서 Z-CUSUM 관리도와 CUSUM 관리도의 동일한 매개변수를 비교해 보면 $h = 4$ 또는 $h = 5$ 일 경우, ARL_0 에서는 CUSUM 관리도에 비하여 ARL이 짧아지지만 ARL_δ 에서는 CUSUM 관리도에 비하여 Z-CUSUM 관리도가 좋은 수행도를 보임을 알 수 있다.

평균 이동이 1.0 이하의 작은 이동이 발생하였을 경우에는 동일한 매개변수를 갖는 CUSUM 관리도에 비하여 ARL이 훨씬 짧아지는 것을 확인 할 수 있다. 또한, $h = 5$ 일 경우 Z-CUSUM 관리도의 ARL_δ 은 $h = 4$ 일 경우의 CUSUM 관리도 ARL과 비슷한 수행도를 보임을 알 수 있으며, ARL_0 에서는 $h = 4$ 인 CUSUM 관리도보다 좋은 ARL을 갖는 것을 확인 할 수 있다. 그러나 Champ and Woodall(1987)의 연구 결과에서 지적한 바와 같이 Z-CUSUM 관리도를 공정에 적용시킬 경우에 각별한 주의가 필요하다.

그러나 실제 공정에서는 다양한 패턴들이 존재하는 것이 현실이고, Shewhart 관리도에 런 규칙들을 적용하여 공정의 패턴을 감지하는데 많은 이용이 되고 있다는 사실에 비추어 볼 때, Z-CUSUM 관리도 또한 큰 의미를 갖는다고 할 수 있다.

<표 10> CUSUM 관리도와 Z-CUSUM 관리도의 ARL 비교
($k = 1/2$ 이고 $h = 4$ 또는 $h = 5$)

공정평균의 변화량(σ)	Z-CUSUM ($h=4$)	CUSUM ($h=4$)	Z-CUSUM ($h=5$)	CUSUM ($h=5$)
0.0	102.3	168	176.73	465
0.25	52.16	74.2	70.5	139
0.5	21.28	26.2	28.23	38.0
0.75	12.81	13.3	15.4	17.0
1.0	8.25	8.38	10.32	10.4
1.50	4.28	4.75	5.55	5.75
2.0	2.99	3.34	3.99	4.01
2.50	2.35	2.62	3.09	3.11
3.0	2.08	2.19	2.53	2.57
4.0	1.71	1.71	2.01	2.01

<표 11>은 Z-CUSUM 관리도와 Shewhart 관리도의 수행도를 비교한 것이다.

Champ and Woodall(1987)은 Runs Rules를 적용한 Shewhart 관리도의 ARL을 측정하였으며, <표 11>의 Shewhart-Runs Rules의 ARL과 같다.

Shewhart 관리도에 런 규칙들을 적용하였을 경우와 Z-CUSUM 관리도의 전체적인 수행도는 비슷한 수행도를 보임을 알 수 있으며, Shewhart 관리도에 런 규칙들을 적용하였을 경우에 비하여 ARL_0 에서는 $h = 5$ 일 경우의 Z-CUSUM 관리도의 수행도가, ARL_1 에서는 $h = 4$ 일 경우의 Z-CUSUM 관리도의 수행도가 더 우수함을 확인을 할 수 있다.

<표 11> Shewhart 관리도와 Z-CUSUM 관리도의 ARL 비교
($k = 1/2$ 이고 $h = 4$ 또는 $h = 5$)

공정평균의 변화량(σ)	Z-CUSUM ($h=4$)	Z-CUSUM ($h=5$)	Shewhart (3σ)	Shewhart -Runs Rules
0.0	102.3	176.73	370.40	91.75
0.2	59.04	92.65	308.43	66.80
0.4	29.66	41.15	200.08	36.61
0.6	15.85	21.95	119.67	20.90
0.8	10.37	13.38	71.55	12.25
1.0	8.25	10.32	43.89	9.22
1.2	5.6	7.35	27.82	6.89
1.4	4.45	6.01	18.25	5.41
1.6	3.56	4.93	12.38	4.41
1.8	3.99	4.23	8.69	3.68
2.0	3.09	3.99	6.30	3.13
3.0	2.08	2.53	2.15	1.67

7. 결론

실제 현장에서 Shewhart 관리도와 함께 CUSUM 관리도가 많이 사용되고 있다.

따라서, 현재까지 CUSUM 관리도에 관한 연구 및 논문이 발표되고 있으며 수행도를 높이기 위한 다양한 관리도와의 결합을 이용한 연구가 계속되어지고 있다.

본 논문에서는 기존의 CUSUM 관리도에서 몇몇 이상 원인에 의한 특정 패턴이 발생하였을 경우문제점 및 문제 해결을 위한 연구를 하였다.

순환주기가 발생하거나 빈번한 변화를 갖는 작은 이동 발생 시 기존 CUSUM 관리도에서는 이러한 이상원인에 의한 순환주기가 빈번한 작

은 이동의 패턴을 제대로 감지하지 못하는 단점이 있었다. 따라서, 이러한 이상원인에 의한 패턴 감지 능력을 향상시킬 수 있는 새로운 관리도인 Z-CUSUM 관리도를 제안하였다.

또한 본 논문에서 제안한 Z-Runs Rules에 대해서는 추가적인 런 규칙들에 관한 지속적인 연구 및 개발이 필요하다.

참고문헌

- [1] Abdellatif M. A. and EI-Shabrawy A. Z.(1996), "The economic design of cumulative sum charts used to maintain current control of non-normal process means", *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 31, pp. 783-790.
- [2] Besterfield, D. H.(2001), *Quality Control*, Prentice Hall, pp. 179-206.
- [3] Bissell, A. F.(1979), "A Semi-parabolic Mask for Cusum Charts", *The Statistician*, Vol. 28, pp. 1-7.
- [4] Champ, C. W. and Woodall, W. H. (1987), "Exact Results for Shewhart Control Charts with Supplementary Run Rules", *Technometrics*, Vol. 29, pp. 393-399.
- [5] Chiu, W. K.(1974), "The Economic Design of CUSUM Charts for Controlling Nomal Means", *Applied Statistics*, Vol. 23, pp. 420-433.
- [6] Deming, W. E.(1982), *Quality, Productivity, and Competitive Position* Massa chusetts Institute of Technology.
- [7] Ewan, W. D.(1963), "When and How to Use CUSUM Charts", *Technometrics*, Vol. 5, pp. 1-22.

- [8] Gan, F. F.(1993), "The Run Length Distribution of a Cumulative Sum Control Chart", *Journal of Quality Technology*, Vol. 25, pp. 205-215.
- [9] Gibra, I. N.(1975), "Recent Developments in Control Chart Techniques", *Journal of Quality Technology*, Vol. 7, pp. 183-192.
- [10] Goel, A. L. and Wu, S. M. (1973), "Economically Optimum Design of CUSUM Charts", *Management Science*, Vol. 19, pp. 1271-1282.
- [11] Hawkins, D. M.(1992), "A Fast Accurate Approximation for Average Run Lengths of CUSUM Control Charts", *Journal of Quality Technology*, Vol.24. pp. 37-43.
- [12] Hawkins, D. M.(1993), "Cumulative Sum Control Charting: An Underutilized SPC Tool", *Quality Engineering*, Vol.25. pp. 463-477.
- [13] Johnson, N. L. and Leone, F. C.(1962), "Cumulative Sum Control Charts: Mathematical Principles Applied to Construction and Use", *Industrial Quality Control*, Vol. 18, pp. 15-21.
- [14] Lu, C. W. and Reynolds, M. R.(2001), "CUSUM charts for monitoring an autocorrelated process", *Journal of Quality Technology*, Vol. 33, pp. 316-335.
- [15] Lucas, J. M(1973), "A Modified 'V' Mask Control Schemes", *Technometrics*, Vol. 15, pp. 833-847.
- [16] Lucas, J. M.(1982), "Combined Shewhart-CUSUM Quality Control Schemes", *Journal of Quality Technology*, Vol. 14, pp. 51-59.
- [17] Lucas, J. M. and Crosier, R. B. (1982), "Fast Initial Response for CUSUM Quality Control Schemes", *Technometrics*, Vol. 24, pp. 199-205.
- [18] Luceno, A.(1999), "Average Run Lengths and Run Length Probability Distributions for Cuscore Charts to Control Normal Mean", *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. 32, pp. 177-195.
- [19] Luceno, A. and Puig-Pey, J.(2000), "Evaluation of the Run Length Probability Distribution for CUSUM Charts: Assessing Chart Performance", *Technometrics*, Vol. 42, pp. 411-416.
- [20] Luceno, A. and Puig-Pey, J.(2000a), "Computing the Run Length Probability Distribution for CUSUM Charts", *Journal of Quality Technology*, Vol. 34, pp. 209-214.
- [21] Montgomery, D. C.(2001), *INTRODUCTION TO STATISTICAL QUALITY CONTROL*, Wiley, pp. 166-177 & pp. 406-430.
- [22] Atienza, O. O., Tang, L.C. and Ang, B. W.(2002), "A CUSUM scheme for autocorrelated observations", *Journal of Quality Technology*, Vol. 34, pp. 187-200.
- [23] Nelson, L S..(1984), "The Shewhart Control Chart-Tests for Special Causes", *Journal of Quality Technology*, Vol. 14, pp. 237-239.
- [24] Page, E. S.(1961), "Cumulative Sum Charts", *Technometrics*, Vol. 3, pp. 1-10.

- [25] Page, E. S.(1962), "Cumulative Sum Schemes Using Gauging", *Technometrics*, Vol. 4, pp. 97-109.
- [26] Rahim E. S. and Lashkari R. S. (1982), "An Economic Design of cusum Charts to Control Non-Normal Process Means", *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 6, pp. 1-18.
- [27] Rowlands, R. J., Nix, A. B., Abdollian, M. A. and Kemp, K. W.(1982), "Snub-nosed V-mask Control Schemes", *The Statistician*, Vol. 31, pp. 133-142.
- [28] Taylor, H. M.(1968), "The Economic Design of Cumulative Sum Control Charts", *Technometrics*, Vol. 10, pp. 479-488.
- [29] Waldmann, K. H.(1996), "Design of double CUSUM quality control schemes", *European Journal of Operational Research*, Vol. 95, pp. 641-648.
- [30] Woodall, W. H.(1983), "The Distribution of the Run Length of One-sided CUSUM Procedures for Continuous Random Variables", *Technometrics*, Vol. 25, pp. 295-301.
- [31] Woodall, W. H.(1984), "One the Markov Chain Approach to the Two-sided CUSUM Procedure", *Technometrics*, Vol. 26, pp. 41-46.
- [32] Woodall, W. H.(1985), "The Statistical Design of Quality Control Charts", *The Statistician*, Vol. 34, pp. 155-160.
- [33] Woodall, W. H.(1986), "The Design of CUSUM Quality Control Charts", *Journal of Quality Technology*, Vol. 18, pp. 99-102.
- [34] Yshchin, E.(1985), "One the Markov Chain Approach to the Two-sided CUSUM Procedure", *Technometrics*, Vol. 26, pp. 41-46.
-