

Well-Conditioned 관측기 설계 - A Linear Matrix Inequality Approach -

정 종 철* · 허건수†

(2003년 3월 17일 접수, 2004년 3월 5일 심사완료)

Design of the Well-Conditioned Observer - A Linear Matrix Inequality Approach -

Jongchul Jung and Kunsoo Huh

Key Words : Condition Number, Eigenvector Matrix(고유벡터 행렬), LMI(Linear Matrix Inequality), Well-Conditioned (성능이 강인한), Observer (관측기)

Abstract

In this paper, the well-conditioned observer for a stochastic system is designed so that the observer is less sensitive to the ill-conditioning factors in transient and steady-state observer performance. These factors include not only deterministic uncertainties such as unknown initial estimation error, round-off error, modeling error and sensing bias, but also stochastic uncertainties such as disturbance and sensor noise. In deterministic perspectives, a small value in the L_2 norm condition number of the observer eigenvector matrix guarantees robust estimation performance to the deterministic uncertainties. In stochastic viewpoints, the estimation variance represents the robustness to the stochastic uncertainties and its upper bound can be minimized by reducing the observer gain and increasing the decay rate. Both deterministic and stochastic issues are considered as a weighted sum with a LMI (Linear Matrix Inequality) formulation. The gain in the well-conditioned observer is optimally chosen by the optimization technique. Simulation examples are given to evaluate the estimation performance of the proposed observer.

1. 서 론

기계 감지 시스템의 성능은 관측기의 설계에 따라 크게 좌우된다. 대표적인 관측기로는 확정적인 시스템에서의 Luenberger 관측기⁽¹⁾와 확률적인 시스템에서의 칼만필터⁽²⁾를 들 수 있다. 그러나 이러한 관측기들은 불확실 요소가 존재한다면 과도상태 혹은 정상상태에서 큰 오차를 일으킬 수 있다. 이러한 불확실 요소를 분류하면 확정적인 요소로서 초기 추정오차, 라운드오프오차, 모델링오차와 센싱편차 등을 들 수 있으며, 확률적인 요소로는 외란과 센싱잡음 등이 있다. 따라서 기계감

지 시스템의 성능 향상을 위해서 이러한 요소에 민감하지 않은 강인한 관측기의 설계가 필요하다.

확정적 불확실 요소에 대한 관점에서 임의의 플랜트 섭동에 대한 강인한 극점배치기법,⁽³⁾ 고유구조 지정 방법,^(4,5) 강인한 외란관측기⁽⁶⁾ 및 강인한 PI 관측기⁽⁷⁾에 대한 연구가 진행되었다. 그러나 이러한 방법들은 플랜트 섭동 등의 제한된 불확실 요소에 대해서만 언급하고 있다. 최근, 확정적인 불확실 요소를 동시에 다루는 연구가 Huh and Stein⁽⁸⁻¹⁰⁾에 의해서 진행되었다. 그들은 확정적인 시스템에서 초기 추정오차, 라운드오프오차, 모델링오차와 센싱편차 등의 불확실 요소에 대한 관측기 성능의 영향을 정량적으로 해석하였고 관측기의 성능지표로서 L_2 -norm에 의한 관측기 고유벡터 행렬의 condition number를 선정하였다. 또한 이 성능지표를 최소화하는 설계 방법에 의해 확정적인 불확실 요소에 강인한 관측기를 설계하였다.

* 한양대학교 대학원 정밀기계공학과
† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : khuh2@hanyang.ac.kr
TEL : (02)2290-0437 FAX : (02)2295-4584

확률적인 불확실 요소 관점에서 칼만필터는 가우시안 노이즈의 불확실성에는 강인하지만⁽¹¹⁾ 확정적 불확실 요소가 존재한다면 추정 성능이 저하된다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 모델링오차나 외란이 존재하는 시스템에서 칼만필터의 강인성을 향상시키는 연구가 진행되었다. 그 대표적인 예가 mixed H_2/H_∞ 필터^(12,13)와 강인한 칼만필터^(14,15)이다. Mixed H_2/H_∞ 필터는 칼만필터와 H_∞ 필터의 trade-off 방식이며, Bernstein and Haddad⁽¹²⁾는 추정오차 분산의 상한값을 H_∞ -norm으로 제한하는 방식을 제안하였고, Chen and Zhou⁽¹³⁾는 두개의 연동된 algebraic Riccati 방정식에 의해 H_∞ 필터와 칼만필터의 trade-off 방식을 제안하였다. 추정오차의 분산의 상한값을 최소화시키는 강인한 칼만필터는 모델의 불확실성에 대한 칼만필터의 단점을 보완해주고 있다.^(14,15) 그러나 이러한 방법들은 제한적인 불확실 요소에 대해서만 다루지고 있으며 위에서 언급된 모든 불확실 요소에 대한 강인성을 보장하는 관측기에 대한 연구는 아직 없었다.

본 논문에서는 확률 시스템에서 확정적인 불확실 요소인 초기 추정오차, 라운드오프오차, 모델링오차와 센서편차, 그리고 확률적인 불확실 요소인 외란과 센서잡음 등의 모든 불확실 요소를 고려한 강인한 관측기를 설계하고자 한다. 이를 위하여 확률적인 불확실 요소가 존재할 때 추정오차 분산의 상한값을 최소화시키는 설계 요소와 확정적인 불확실 요소에 대한 영향을 최소화시키는 설계 요소를 선정하고 이를 최소화시키는 관측기 설계 방법을 제시한다. 첫째, 추정오차의 분산의 상한값을 최소화시키기 위한 설계 요소로서 관측기 게인의 크기와 수렴속도를 제시하였다. 즉, 관측기 게인의 크기를 최소화하고 수렴속도를 최대화 시키는 최적화 문제의 해를 구함으로써 확률적인 불확실 요소에 강인한 관측기를 설계할 수 있다. 둘째, 확정적인 불확실 요소에 대한 강인성을 보장하는 설계 요소로서 관측기 고유벡터 행렬의 L_2 -norm condition number를 제시하였다. 또한 이 두가지 관점의 trade-off를 통한 다목적 함수의 최적화 문제로서 확률 시스템에서의 well-conditioned (성능이 강인한) 관측기의 설계 방법을 제시하였다. 이를 위하여 LMI 기반의 Lyapunov의 안정성 조건⁽¹⁶⁾에 기반한 최적화 방법을 제시하였다. 본 논문에서 제시하는 관측기 설계 방법은 위에서 언급한 불확실 요소가 존재하는 선형 확률 시불변 시스템에서 관측기의 추정 성능을 크게 개선시킬 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서 well-conditioned (성능이 강인한) 관측기를 위한 설계 요소를 선정하였고 3장에서 관측기의 설계방법을

제시하였다. 4장에서는 예제를 통하여 설계된 방법을 검증하였고 5장에서 결론을 맺었다.

2. 관측기 설계 요소

2.1 관측기 설계

다음의 시불변 선형 확률 시스템을 가정한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w \\ y &= Cx + v \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x \in R^n$ 는 상태변수, $u \in R^m$ 는 입력변수, $y \in R^p$ 는 측정변수이다. w 와 v 는 상호 독립적인 영평균 백색잡음이며 상호분산은 각각 $Q \in R^{n \times n}$ 와 $R \in R^{p \times p}$ 이다. 시스템 (C, A) 는 관측가능하다고 가정한다. 관측기는 식 (2)와 같이 설계될 수 있다.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \quad (2)$$

여기서 L 은 관측기 게인이다. 식 (1)에서 식 (2)를 빼면 다음의 오차방정식을 구할 수 있다.

$$\dot{e} = (A - LC)e + w - Lv \quad (3)$$

여기서 $e = x - \hat{x}$ 이다.

2.2 확률적 관점의 설계 요소

확률적 불확실 요소에 강인한 관측기를 설계하기 위해 추정오차 분산의 상한값으로부터 그 설계 요소를 찾고자 한다. 정상상태에서 정상상태 오차의 상호분산 X 를 정의한다.

$$X = E[e(\infty)e(\infty)^T] \quad (4)$$

여기서 E 는 평균을 의미한다. 식 (3)의 오차방정식의 행렬 $A-LC$ 가 안정하게 설계된다면 상호분산 X 는 다음의 Lyapunov 방정식을 만족한다.

$$(A - LC)X + X(A - LC)^T + Q + LRL^T = 0 \quad (5)$$

식 (5)의 Lyapunov 방정식의 해는 다음의 controllability grammian으로 표현 가능하다.

$$X = \int_0^\infty e^{(A-LC)t} (Q + LRL^T) e^{(A-LC)^T t} dt \quad (6)$$

식 (6)은 정상상태 오차의 상호분산이며 분산은 다음과 같이 유도되는데

$$\begin{aligned} tr(X) &= tr \left(\int_0^\infty e^{(A-LC)t} (Q + LRL^T) e^{(A-LC)^T t} dt \right) \\ &= \int_0^\infty tr \left(e^{(A-LC)t} (Q + LRL^T) e^{(A-LC)^T t} \right) dt \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 tr 은 *trace*이며 그 특성, $tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$, 을 이용하면 식 (7)은 식 (8)과 같다.

$$tr(X) = tr\left((Q + LRL^T) \int_0^\infty e^{(A-LC)^T t} e^{(A-LC)t} dt\right) \quad (8)$$

여기서 다음 식과 같이 적분함수 H 를 정의하면

$$H = \int_0^\infty e^{(A-LC)^T t} e^{(A-LC)t} dt. \quad (9)$$

식 (9)는 observability grammian의 한 형태이므로 다음의 Lyapunov 방정식으로 표현 가능하다.

$$(A-LC)^T H + H(A-LC) = -I \quad (10)$$

여기서 I 는 단위행렬이다. 식 (10)과 같이 우변에서 단위행렬을 가질때 Lyapunov 방정식의 행렬 $A-LC$ 는 최대 수렴속도를 가지므로, 오차방정식의 행렬 $A-LC$ 의 최대 수렴속도를 α 라고 정의하면 식 (10)으로부터 다음의 관계식을 유도할 수 있다.⁽¹⁷⁾

$$\alpha = \frac{2}{\lambda_{\max}(H)} \quad (11)$$

여기서 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 는 최대 고유값이다. 식 (9)와 (11)을 이용하면 식 (8)의 정상상태 오차의 분산의 상한값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} tr(X) &= tr((Q + LRL^T)H) \\ &\leq tr(Q + LRL^T) \cdot \lambda_{\max}(H) \\ &= \frac{2}{\alpha} \cdot [tr(Q) + tr(RL^T L)] \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)에서 볼 수 있듯이 정상상태 오차의 분산의 상한값은 L 과 α 의 함수이며 이를 최소화하기 위하여 α 를 최대화하거나 L 의 크기를 최소화하면 된다. 그러나 이 두 관계가 서로 의존적이므로 적절한 trade-off가 필요하다. 오차의 분산을 최소화시키는 의미와 그 상한값을 최소화시키는 의미가 같지는 않지만 상한값을 최소화시키는 것에 의해서 분산의 크기를 보장할 수 있다.

2.3 확정적 관점의 설계 요소

확정적 불확실 요소 관점에서 관측기 추정 성능에 대한 불확실 요소의 영향이 추정오차의 상한값으로 표현될 수 있으며 이 상한값에 근거하여 각각의 불확실 요소에 대한 영향을 줄이기 위한 성능지표가 제시되었다.⁽⁸⁾ 성능지표가 크다는 것이 관측기가 항상 ill-conditioned (성능이 강인하지 못한) 되었다는 것을 의미하지는 않지만 성능지표가 큰 값을 갖는 관측기는 초기 추정오차, 라운드오

프오차, 모델링오차 또는 센서편차 등에 의해 큰 오차를 수반할 수 있다. 이러한 요소에 강인한 관측기를 설계하기 위하여 제시된 성능 주지표는 관측기 행렬의 고유벡터 행렬의 L_2 -norm에 근거한 condition number이며 다음과 같이 정의된다.⁽⁸⁾

$$\kappa_2(V) = \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2 \quad (13)$$

$$(A-LC)V = V\Lambda \quad (14)$$

여기서 V 는 고유벡터 행렬이며 Λ 는 고유값들로 구성된 대각행렬이다.⁽¹⁸⁾ 따라서 식 (13)으로 정의되는 설계 인자를 최소화시키는 것에 의해 well-conditioned 관측기를 설계할 수 있다.

3. Well-conditioned 관측기 설계

2장에서 언급된 설계 요소를 바탕으로 확률적인 시스템에서 불확실 요소에 강인한 관측기를 설계하는 방법을 제시하고자 한다. 설계 요소에 해당되는 목적함수는 다음과 같다.

- (1) 관측기 게인의 최소화
- (2) 수렴속도의 최대화
- (3) 고유벡터 행렬의 condition number의 최소화

(1)과 (2)의 목적함수는 확률적 불확실 요소에 대한 추정오차의 분산의 상한값을 최소화시켜 주며 (3)은 확정적 불확실 요소에 대한 강인성을 보장해준다. Lyapunov의 안정성 조건을 바탕으로 한 LMI 형태의 구속조건을 포함하는 다목적 함수의 최적화 문제를 구성하여 well-conditioned 관측기를 설계하는 방법을 제시하고자 한다.

3.1 안정성 조건

식 (3)의 오차방정식의 안정성을 위한 관측기 게인의 존재의 충분조건은 Lyapunov 안정성 해석을 통해 다음의 LMI 형태로 표현될 수 있다.^(16, 19)

Theorem 1. 다음 식 (15)를 만족하는 $P>0$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$ 가 존재한다면 식 (3)의 오차방정식을 안정화시키는 게인 L 이 존재하며 식 (16)과 같다.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T C & P & -\frac{1}{2} C^T \\ P & -\tau_1 \delta_1 I & 0 \\ -\frac{1}{2} C & 0 & -\tau_2 \delta_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

$$L = \frac{1}{2} P^{-1} C^T \quad (16)$$

Proof: 안정성 해석을 위해 식 (17)과 같은 Lyapunov 함수를 정의한다.

$$V(t) = e^T(t)Pe(t) \quad (17)$$

여기서 $V(t)$ 는 Lyapunov 함수이며 P 는 양한정 (positive definite) 행렬이다. 오차방정식의 안정성을 위한 충분조건은 Lyapunov 함수의 시간에 대한 미분값이 음한정함수 조건을 만족해야 한다. 즉, $\dot{V}(t) < 0$ 을 만족해야 하며 식 (3)을 이용하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$e^T((A-LC)^T P + P(A-LC))e + w^T Pe + e^T Pw - v^T L^T Pe - e^T PLv < 0 \quad (18)$$

식 (17)과 식 (18)을 만족하는 P 가 존재한다면 식 (3)의 오차방정식은 안정하다. $S=L^T P$ 라 정의하고 식 (18)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$e^T(A^T P + PA - C^T S - S^T C)e + w^T Pe + e^T Pw - v^T Se - e^T S^T v < 0 \quad (19)$$

식 (19)는 식 (20)의 LMI 형태로 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} e \\ w \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T S - S^T C & P & -S^T \\ & P & 0 \\ & -S & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ w \\ v \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

노이즈 w 와 v 의 크기에 대한 제한을 위해 식 (21)을 만족하는 δ_1 과 δ_2 가 존재한다고 가정한다. 이는 제한된 출력을 얻기 위해 필요한 조건이다.

$$w^T w \leq \delta_1, \quad v^T v \leq \delta_2 \quad (21)$$

식 (20)과 식 (21)은 S-procedure⁽¹⁹⁾을 이용하여 식 (22)와 같은 하나의 LMI 형태로 결합될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} e \\ w \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T S - S^T C & P & -S^T \\ & P & -\tau_1 \delta_1 I \\ & -S & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ w \\ v \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

여기서 $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$ 이다. 또한 Finsler's lemma⁽¹⁹⁾를 이용하여 변수 S 를 제거할 수 있다. 만약 변수 P 와 S 가 서로 독립변수라면 다음 관계가 성립한다.⁽¹⁷⁾

$$G(P) + U(P)S + S^T U(P)^T < 0 \Leftrightarrow \exists \sigma > 0 \ni G(P) - \sigma U(P)U(P)^T < 0 \quad (23)$$

여기서 G 와 U 는 P 에 의존하는 행렬이며 σ 는 상수이다. 식 (23)을 이용하여 식 (22)의 행렬에서 변수 S 를 다음과 같이 제거할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - \sigma C^T C & P & -\frac{\sigma}{2} C^T \\ & P & 0 \\ -\frac{\sigma}{2} C & 0 & -\tau_2 \delta_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

이때, 관측기 게인은 다음과 같다.

$$L = \frac{\sigma}{2} P^{-1} C^T \quad (25)$$

식 (24)는 변수 P, τ_1, τ_2 에 대한 LMI 형태이며 윗 식에서 σ 를 1로 일반화시킬 수 있다. \square

3.2 게인 크기의 최소화

식 (12)에서 보여지는 것처럼 관측기 게인의 크기를 줄이는 것에 의해 추정오차 분산의 상한값을 줄일 수 있다. Theorem 1에서 알 수 있듯이 관측기 게인은 행렬 P 의 역행렬에 의존하므로 P 의 최소 고유값을 최대화하는 것은 관측기 게인의 최대 특이값을 줄이는 것과 같은 결과를 가져온다. 따라서 게인의 크기를 최소화하는 문제는 Corollary 1과 같이 P 의 최소 고유값의 최대화 문제로 풀 수 있다.⁽¹⁶⁾

Corollary 1. 다음 식 (26)의 LMI 형태의 구속조건을 만족하는 convex 최적화 문제의 해가 존재한다면 식 (3)의 오차방정식을 안정화시키고 최소의 크기를 갖는 관측기 게인 L 이 존재한다.

Maximize t

subject to $P = P^T > tI, \tau_1, \tau_2 \geq 0$

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T C & P & -\frac{1}{2} C^T \\ & P & 0 \\ -\frac{1}{2} C & 0 & -\tau_2 \delta_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (26)$$

Proof: 행렬 P 의 최소 고유값의 최대화 문제는 $P > tI$ 의 구속조건을 만족하는 변수 t 의 최대화 문제로 변환할 수 있다.⁽¹⁷⁾ 따라서 Theorem 1의 Lyapunov 안정성 조건에 의한 식 (15)의 LMI 구속조건을 추가하면 Corollary 1의 최적화 문제를 구성할 수 있다. 또한 목적함수와 구속조건 모두 convex이므로 global 최적값이 구해진다. \square

3.3 수렴속도의 최대화

관측기의 수렴속도는 식 (12)와 같이 추정오차 분산의 상한값과 관련이 있으며 수렴속도를 최대화하는 것에 의해 그 상한값을 최소화시킬 수 있

다. 일반적으로 수렴속도는 식 (27)을 만족하는 Lyapunov 함수로부터 정의되며

$$\dot{V}(t) \leq -2\alpha V(t) \quad (27)$$

식 (27)를 만족하는 가장 작은 α 로 정의된다.⁽¹⁹⁾ 관측기의 수렴속도를 최대화시키는 문제는 다음 Corollary 2를 통해서 풀 수 있다.

Corollary 2. 식 (28)의 최적화 문제의 해가 존재한다면 식 (3)의 오차방정식을 안정화시키고 그 수렴속도가 α 이상인 되도록 하는 관측기 게인 L 이 존재하며 게인은 식 (16)과 같다.

$$\text{Maximize } \alpha \quad (28)$$

$$\text{subject to } P = P^T > 0, \alpha > 0, \tau_1, \tau_2 \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T C + 2\alpha P & P & -\frac{1}{2} C^T \\ P & -\tau_1 \delta_1 I & 0 \\ -\frac{1}{2} C & 0 & -\tau_2 \delta_2 I \end{bmatrix} < 0$$

Proof: 식 (3)과 (17)을 이용하여 식 (27)의 부등식을 풀면 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$e^T ((A - LC)^T P + P(A - LC) + 2\alpha P)e + w^T P e + e^T P w - v^T L^T P e - e^T P L v \leq 0 \quad (29)$$

식 (29)를 Theorem 1의 증명 절차를 따라 유도하면 Corollary 2를 얻을 수 있다. 식 (28)도 convex 최적화 문제이므로 global 최적값을 구할 수 있다. \square

3.4 Condition number의 최소화

관측기 고유벡터 행렬의 L_2 -norm에 근거한 condition number를 최소화하는 문제는 Corollary 3과 같이 식 (3)의 오차방정식의 Lyapunov 안정성에 의한 구속조건을 갖는 고유벡터 행렬의 condition number의 최소화 문제로 구성할 수 있다.

Corollary 3. 식 (30)의 해가 존재한다면 식 (3)의 오차방정식을 안정화시키고 고유벡터 행렬의 condition number가 최소가 되게 하는 관측기 게인 L 이 존재하며 그 게인은 식 (16)과 같다.

$$\text{Minimize } \kappa_2(V)$$

$$\text{subject to } P = P^T > 0, \tau_1, \tau_2 \geq 0$$

$$(A - \frac{1}{2} P^{-1} C^T C) V - V \Lambda = 0 \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T C & P & -\frac{1}{2} C^T \\ P & -\tau_1 \delta_1 I & 0 \\ -\frac{1}{2} C & 0 & -\tau_2 \delta_2 I \end{bmatrix} < 0$$

Proof: Corollary 3은 Theorem 1의 구속조건에 고유벡터 행렬의 condition number의 등식을 추가하고 condition number $\kappa_2(V)$ 를 최소화시키는 목적함수로 선정하면 식 (30)을 얻을 수 있다. \square

식 (30)은 비선형 non-convex 문제이므로 global 최적값이 아닌 local 최적값이 구해진다. 즉, 초기값에 따라 최적값이 다르다. 그러나 이러한 최적값들은 같은 차수를 가지므로 크기가 비슷한 local 최적값 중에서 global 최적값을 찾는 것이 큰 의미가 없다. 따라서 local 최적값을 얻는 것에 의해 well-conditioned 관측기의 설계가 가능하다.

3.5 다목적함수의 최적화

위에서 언급한 관측기 설계의 세가지 목적함수를 푸는 최적화 문제를 고려하고자 한다. 세가지 목적함수는 그 성능에 있어서 서로 상충되는 면이 있으므로 이를 위한 trade-off가 필요하다. 가장 용이한 방법이 각각의 목적함수 별로 다른 가중치를 두는 것이다. 여기서는 식을 간단히 하기 위해서 수렴속도 α 를 고정시켜서 풀고자 한다. 즉, 관측기 게인의 크기를 최소화하는 문제와 condition number를 최소화 하는 문제를 결합하여 다음과 같이 다목적함수의 최적화 문제로 다시 구성한다.

Corollary 4. 고정된 α 에 대해 식 (31)의 해가 존재한다면 식 (3)의 오차방정식을 안정화시키고 관측기 게인의 크기와 고유벡터 행렬의 condition number를 동시에 최소화시키는 게인 L 이 존재하며 그 게인은 식 (16)과 같다.

$$\text{Minimize } \beta \kappa_2(V) / \kappa_2(V)^* - (1 - \beta) t / t^*$$

$$\text{subject to } P = P^T > I, \tau_1, \tau_2 \geq 0,$$

$$(A - \frac{1}{2} P^{-1} C^T C) V - V \Lambda = 0$$

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T C + 2\alpha P & P & -\frac{1}{2} C^T \\ P & -\tau_1 \delta_1 I & 0 \\ -\frac{1}{2} C & 0 & -\tau_2 \delta_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

Proof: Corollary 1, 2와 3의 구속조건을 통합하고 Corollary 1과 3의 목적함수를 weighting 방법에 의해서 선형 결합하면 Corollary 4의 목적함수와 구속조건을 얻을 수 있으며 이 문제의 해가 존재한다면 관측기 게인 L 이 얻어진다. 여기서 $0 \leq \beta \leq 1$ 이며 가중치이다. $\kappa_2(V)^*$ 와 t^* 는 각각의 목적함수의 정규화(normalization)를 위해 제시되는 값이다. \square

Corollary 4의 최적화 문제는 관측기 게인의 존

재를 위한 충분조건이며 식 (17)의 Lyapunov 함수가 존재하면 식 (31)의 해도 존재한다. 또한, non-convex의 목적함수를 가지므로 local 최적값이 구해진다.

4. 예 제

본 논문에서 제시하는 well-conditioned 관측기의 성능을 예제를 통해 검증하고자 한다. 3장에서 소개한 설계 방법에 따라 다목적함수의 최적화 문제를 풀 수 있다. 시뮬레이션 툴은 LMITOOL Ver. 2.1⁽²⁰⁾을 이용하였다. LMITOOL은 semidefinite programming에 의해 LMI 형태의 구속조건을 갖는 최적화 문제를 다루는 툴이다.

Example 1 : A second-order stochastic system

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

$$y = [1 \ 0]x + v$$

여기서 w 와 v 는 영평균 백색잡음이며 관측가능하다. 관측기 게인 L 과 condition number $\kappa_2(V)$ 를 최소화시키기 위해 식 (31)의 가중치 β 를 0.5로 선택하였으며 노이즈의 크기를 $\delta_1=10, \delta_2=10$ 으로 제한하였고 적절한 수렴속도를 위해 $\alpha=2$ 로 설정하였다.

불확실 요소에 대한 well-conditioned 관측기의 성능을 평가하기 위해 다음과 같은 불확실 요소가 존재한다고 가정한다.

- (a) 초기 추정오차: $e(0) = [0.05 \ 0.1]^T$
- (b) 모델링오차: 행렬 A 에서 10% 모델링오차
- (c) 센싱편차: 2% 출력 센싱편차
- (d) 확률노이즈 상호분산: $Q=0.1, R=0.02$

관측기의 성능 비교를 위해 다음과 같이 3가지 경우의 관측기가 설계되었다. 식 (31)의 최적화 문제를 풀어서 다음과 같이 well-conditioned 관측기 (Observer-1)를 설계하였다. 또한 임의의 극점배치 기법을 통하여 다음과 같이 condition number가 큰 경우(Observer-2)와 관측기 게인이 큰 경우(Observer-3)의 관측기를 설계하여 비교하였다.

Observer-1 : Well-conditioned 관측기

$$L = \begin{bmatrix} 3.0894 \\ 3.1018 \end{bmatrix}, \kappa_2(V) = 2.67, \lambda_{1,2} = -2.04 \pm j2.00$$

Observer-2 : Ill-conditioned 관측기

$$L = \begin{bmatrix} 3.01 \\ -0.99 \end{bmatrix}, \kappa_2(V) = 402, \lambda_{1,2} = -2, -2.01$$

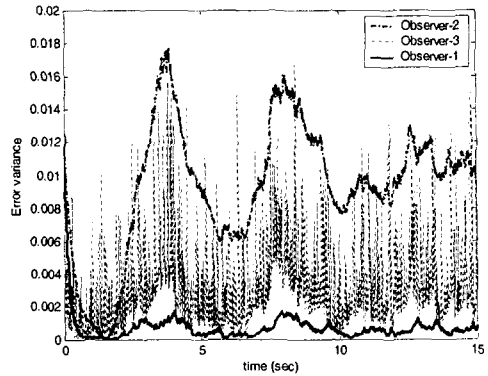


Fig. 1 Comparison of the error variances in example 1

Observer-3 : High gain 관측기

$$L = \begin{bmatrix} 51 \\ 47 \end{bmatrix}, \kappa_2(V) = 2.48, \lambda_{1,2} = -2, -50$$

각각의 관측기에 대한 오차분산을 Fig. 1에서 비교하였다. Observer-3은 확률적 노이즈에 대해 가장 민감하며 이로 인하여 큰 오차 분산을 갖는 것을 볼 수 있다. 또한, 확정적 불확실 요소에 대하여 Observer-2보다 Observer-1이 더 강인함을 볼 수 있다. 오차 분산의 정량적인 비교를 위해 평균값을 비교해보면 Observer-1은 Observer-2와 Observer-3에 비해서 각각 93%와 76% 감소하였다. 따라서 Observer-1인 well-conditioned 관측기가 확정적 불확실 요소와 확률적 불확실 요소에 대해 강인함을 알 수 있으며 본 논문에서 제안하는 관측기의 타당성을 확인할 수 있다.

Example 2 : A 4th-order spindle motor system⁽⁹⁾

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -22.5 & 250 & 0 & -2000 \\ -187.5 & -500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -60 & 6000 \\ 250 & 0 & -600 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + w$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0]x + v$$

여기서 w 와 v 는 white noise이다. 입력은 100V DC 전압이다. 개루프 고유값은 $\{-142.11, -384.38, -28.01 \pm j2026\}$ 이며 관측가능하다.

식 (31)의 다목적 함수에서 condition number와 관측기 게인의 비중을 $\beta=0.5$ 로 하였으며 노이즈의 제한값을 $\delta_1=\delta_2=100$ 으로 하였다. 최대 수렴속도는 $\alpha=40$ 으로 설정하였다. Table 1에서 두가지의 관측기를 비교하였다. Observer-4는 본 논문에서 제시하는 방법에 의해 설계된 관측기이며, Observer-5는

확정적 불확실 요소만을 고려하여 이에 강인하게 설계된 관측기이다. 즉, Observer-4는 확정적 및 확률적 불확실 요소를 모두 고려하였으며, Observer-5는 단지 확정적 불확실 요소만을 고려하여 관측기를 설계하였다. Table 1에서 볼 수 있는 것처럼, 두 관측기는 condition number에서는 비슷한 크기를 갖지만 계인의 크기에서는 Observer-5의 계인이 Observer-4의 계인보다 약 6배 크다.

본 논문에서 제안하는 관측기의 성능을 검증하기 위해 다음과 같은 불확실 요소가 존재한다고 가정하였다.

(a) 초기 추정오차:

$$e(0) = [0.731 \ 0.022 \ -0.775 \ 0.053]^T$$

(b) 모델링오차: 행렬 A 에서 0.5% 모델링오차

(c) 센싱편차: 5% 출력 센싱편차

(d) 확률노이즈 상호분산: $Q=0.1 \times I, R=0.01$

각각의 관측기에 대하여 Fig. 2에서 그 성능을 비교하였다. Fig. 2에서 보여지는 것처럼, Observer-4는 Observer-5에 비하여 상대적으로 작은 값의 관측기 계인을 가지기 때문에 확률적 불확실 요소의 영향을 덜 받으며 또한, 정상상태에서의 오차 분산의 크기를 비교해보면 평균적으로 약 84% 감소하였다. 이것은 본 논문에서 제안하는 관측기 설계 방법의 타당성을 검증하는 것이며 계인의 크기가 작은 관측기는 노이즈에 대해 강인하다는 것을 알 수 있다.

Example 3 : A 3rd-order Laser bonder system

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11.518 & 0 & 6.702 \\ 0 & -5.689 & -2.649 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.44 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

$$y = [1 \ 0 \ 0]x + v$$

여기서 w 와 v 는 영평균 백색잡음이다. 개루프의 고유값은 각각 $\{-0.6308, -1.0091 \pm j6.8813\}$ 이다. 적절한 수렴속도를 위해 시정수 1/3초를 요구한다고 가정한다.

본 논문에서 제안하는 well-conditioned 관측기와 확률시스템에서 일반적으로 사용되는 칼만필터와의 성능 비교를 통해 well-conditioned 관측기의 성능을 평가하고자 한다. Well-conditioned 관측기의 설계를 위해 식 (31)에서 $\beta=0.5, \delta_1=\delta_2=10$, 그리고 $\alpha=3$ 으로 설정하였다. 칼만필터의 설계에서는 적절한 시정수를 위해 $Q=0.1, R=1 \times 10^{-5}$ 로 설정하였다. 설계된 well-conditioned 관측기와 칼만필터의 계인과 그때의 condition number는 다음과 같다.

Table 1 Comparison of properties of the observers

	Observer-4	Observer-5 ⁽⁹⁾
Observer gain	$L = \begin{bmatrix} 29.264 \\ -0.5798 \\ -86.83 \\ -0.2075 \end{bmatrix}$	$L = \begin{bmatrix} 550 \\ 62.5 \\ 0 \\ 158.14 \end{bmatrix}$
Condition number	$\kappa_2(V)=3.73$	$\kappa_2(V)=3.32$

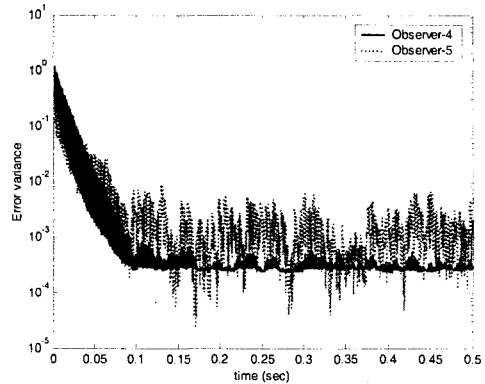


Fig. 2 Comparison of the error variances in example 2

Observer-6 : Well-conditioned observer

$$L = \begin{bmatrix} 6.5289 \\ 21.9228 \\ -18.3068 \end{bmatrix}, \kappa_2(V) = 7.3$$

Observer-7 : Kalman filter

$$L = \begin{bmatrix} 44.2557 \\ 975.2845 \\ -148.1096 \end{bmatrix}, \kappa_2(V) = 47$$

두 관측기의 성능 비교를 위해 다음과 같은 불확실성을 가정한다.

(a) 초기 추정오차: $e(0) = [1 \ 5 \ 5]^T$

(b) 모델링오차: 행렬 A 에서 약 8% 모델링오차

(c) 센싱편차: 2% 출력 센싱편차

(d) 확률노이즈 상호분산: $Q=0.1, R=0.01$

각각의 관측기에 대하여 Fig. 3에서 그 성능을 비교하였다. Well-conditioned 관측기인 Observer-6는 Kalman filter인 Observer-7에 비하여 정상상태에서의 오차 분산이 약 55% 감소하였다. 따라서, 시스템의 불확실성에 대하여 well-conditioned 관측기가 Kalman filter보다 더 강인함을 볼 수 있다.

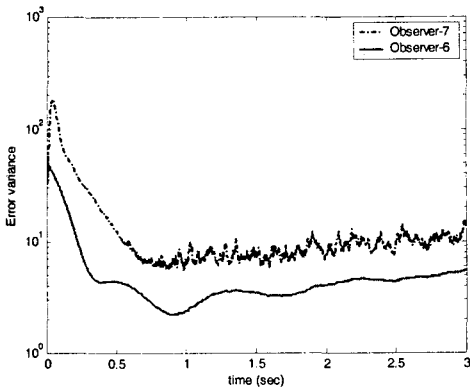


Fig. 3 Comparison of the error variances in example 3

5. 결론

확률 선형시스템에서 관측기 성능을 저하시키는 불확실 요소에 강인한 관측기를 설계하는 방법을 제시하였다. 즉, 확정적 불확실 요소인 초기 추정오차, 라운드오프오차, 모델링오차와 센싱편차, 그리고 확률적 불확실 요소인 외란과 센싱잡음에 강인한 관측기 설계 방법을 제시하였다. 이를 위하여 확률적 요소 관점에서 관측기 게인의 크기를 최소화시키고 수렴속도를 최대화시키는 설계 방법을 제안하였으며 확정적 요소 관점에서 관측기 행렬의 고유벡터 행렬의 condition number를 최소화시키는 설계 방법을 제시하였다. 관측기 설계를 위하여 Lyapunov 안정성 조건에 의한 LMI 형태의 구속조건을 포함하는 다목적 함수를 갖는 최적화 문제를 구성하였다. 결론적으로 본 논문에서 제안된 well-conditioned 관측기는 확률적인 선형 시스템에서 여러가지 불확실 요소에 대한 추정 성능의 강인성을 보장해주며 그 성능을 개선시켜준다.

후 기

이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음. (KRF-2002-041-D00037)

참고문헌

- (1) Luenberger, D. G., 1966, "Observers for Multi-variable Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 11, pp. 190~197.
- (2) Kalman, R. E. and Bucy, R. S., 1969, "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," *Trans. of the ASME Series D: J. of Basic Engineering*, Vol. 83, No. 3, pp. 95~108.
- (3) Bhattacharyya, S. P., 1976, "The Structure of Robust Observers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 21, pp. 581~588.
- (4) Shen, L. C. and Hsu, P. L., 1998, "Robust Design of Fault Isolation Observers," *Automatica*, Vol. 34, No. 11, pp. 1421~1429.
- (5) Patton, R. J. and Chen, J., 1997, "Observer-Based Fault Detection and Isolation: Robustness and Applications," *Control Engineering Practice*, Vol. 5, No. 5, pp. 671~682.
- (6) Kim, J.-S. and Oh, J.-H., 1996, "A Robust Disturbance Observer for Uncertain Linear Systems," *Trans. of the KSME, A*, Vol. 20, No. 9, pp. 2731~2743.
- (7) Shafai, B. and Carrol, R. L., 1985, "Design of Proportional-Integral Observer for Linear Time-Varying Multivariable Systems," *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 597~599.
- (8) Huh, K. and Stein, J. L., 1994, "A Quantitative Performance Index for Observer-Based Monitoring Systems," *Trans. of the ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 116, pp. 487~497.
- (9) Huh, K. and Stein, J. L., 1995, "Well-Conditioned Observer Design for Observer-Based Monitoring Systems," *Trans. of the ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 117, pp. 592~599.
- (10) Kwak, B. K. and Huh, K., 1997, "Discrete-time Robust Observer Design for Two-output Systems," *Trans. of the KSME, A*, Vol. 21, No. 4, pp. 625~633.
- (11) Sasa, S., 1998, "Robustness of a Kalman Filter Against Uncertainties of Noise Covariances," *Proc. of the American Control Conference*, pp. 2344~2348.
- (12) Bernstein D. S. and Haddad, W. M., 1989, "Steady-state Kalman filtering with an H_∞ error bound," *Systems and Control Letters*, Vol. 12, pp. 9~16.
- (13) Chen, X. and Zhou, K., 2002, " H_∞ Gaussian Filter on Infinite Time Horizon," *IEEE Trans. on Circuits and Systems I*, Vol. 49, No. 5, pp. 674~679.
- (14) Xia, L. and Soh, Y. C., 1994, "Robust Kalman filtering for uncertain systems," *Systems and Control Letters*, Vol. 22, pp. 123~129.
- (15) Shaked, U., Xie, L. and Soh, Y. C., 2001, "New Approaches to Robust Minimum Variance Filter Design," *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 49, No. 11, pp. 2620~2629.
- (16) Howell, A. and Hedrick, J. K., 2002, "Nonlinear Observer Design via Convex Optimization," *Proc. of the American Control Conference*, pp. 2088~2093.
- (17) Slotine, J. J. E. and Li, W., 1991, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, Inc..
- (18) Golub, G. H. and Van Loan, C. F., 1996, *Matrix Computations*, 3rd Ed., The Johns Hopkins University Press.
- (19) Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V., 1994, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM.
- (20) El Ghaoui, L., Delebeque, F. and Nikoukhah, R., 1999, *LMITool Ver. 2.1*, available via anonymous ftp to ftp.ensta.fr, directory pub/elghaoui/lmitool-2.1.