

## 임의의 구멍을 포함하는 B-Spline 곡면상에서의 자동 삼각 요소망 생성

김근호\*, 양현익\*\*

### Automatic Triangular Mesh Generation Over B-Spline Surfaces Including Arbitrary Holes

Kim, G.-H.\* and Yang, H.-I.\*\*

#### ABSTRACT

In the process of finite element analysis, mesh generation is tedious job which consumes tremendous time. Therefore, the automation of well shaped mesh generation from the minimal boundary input data is desirable to improve reliability and accuracy of the analysis and also to reduce the process time of the entire design process. The automation of triangular mesh generation has been relatively well treated due to its robustness and ease of handling when compared to rectangular element mesh generation. In this study, the offset method developed previously for generating plane rectangular element mesh has been corrected and modified to generate triangular element mesh on the B-spline surface having arbitrary holes. The result shows that the generated triangular mesh has the average aspect ratio over 0.9. The designed arbitrary surface shape has been interactively constructed by non-uniform B-spline theory for triangular mesh generation.

**Key words** : 요소망(Mesh), 오프셋(Offset), 삼각형 요소(Triangular Element)

#### 1. 서 론

오늘날 고도의 컴퓨터 기술 및 정보기술(IT)의 발달에 의하여 제품에 대한 생명 주기가 짧아지면서 신제품의 개발 및 생산에 대한 신속한 대응이 요구되어지고 있다. 따라서 컴퓨터를 이용한 기계 설계의 자동화는 기업 사활을 위하여 반드시 필요한 부분이며 제품 개발비의 절감에 필수적인 요인이 되어 왔다. 이에 부응하여 1970년대부터 기본 설계 후 제품의 응력과 변형률에 대한 검증 방법으로 주로 사용되어 지는 유한 요소 해석 과정의 자동화에 대한 많은 연구<sup>1)~3)</sup>가 진행되어 오고 있다. 유한 요소 생성은 사용자가 요소 형상에 대한 고도의 지식을 가지고 설계 대상물을 가장 적절하게 유한 요소화 하여야 하며, 이에 대하여 소모되는 시간은 전체 해석 과정의 30~40% 정도를 차지한다고 해도 과언이 아닌 정도로 중요한 과정이

다. 따라서, 유한 요소 생성의 자동화에 대한 연구는 현재 활발히 진행되고 있으며, 그 중에서 널리 알려진 절점 생성 방법으로는 Cavendish 절점 생성법<sup>2,3)</sup>, Lo의 절점 생성법<sup>4,5)</sup>, Shimada 절점 생성법<sup>6)</sup> 등으로서, 일부는 상용화되기도 하였으나 보다 효율적인 방법을 개발하기 위한 연구가 활발히 진행중이다.

곡면상에 유한 요소를 생성시키는 기존의 가장 보편적인 방법은 사상법을 이용하는 것이다. 이것은 곡면의 면적이 가장 크게 되는 2차원 평면으로 사상시켜 2차원 평면상에서 절점 및 요소망을 생성시킨 뒤 곡면상으로 역사상시키는 방법이다. 그러나 이 방법은 생성되는 곡면의 곡률 변화가 심한 경우 역사상할 때 삼각형의 세 변의 길이가 일정하지 않아 유한 요소 형상을 저하시키고, 곡률 변화가 큰 부분에서는 역사상 후에도 곡면 형상이 불규칙해 진다는 단점이 있기 때문에 비교적 곡률 변화가 작은 곡면에만 활용될 수 있다는 제약이 있다. 본 연구에서는 전술한 사상법에 근거하여 곡면상에서 삼각 요소를 생성하고자 하였으며, 이를 위해 균일한 사각요소 생성 알고리즘의 대표적인 방법 중의 하나인 외부 절점 오프셋(offset) 방법<sup>8)</sup>

\*한양대학교 공과대학원 기계설계학과  
\*\*한양대학교 공학대학 기계정보경영공학부 부교수  
- 논문투고일: 2003. 04. 15  
- 심사완료일: 2003. 12. 23

을 삼각 요소 생성에 맞게 수정 보완하여 균일한 삼각 요소가 곡면에 사상되도록 하였다. 전체적인 과정을 간략하게 서술하면, 먼저 해석 영역의 경계에서 절점을 오프셋(offset) 하고, 오프셋된 절점들 사이의 내부각 검사, 거리 검사, 교차 검사 등을 통하여 절점을 추가하거나 재구성하는 방법으로 절점을 생성하게 된다. 그리고 삼각 요소망이 생성될 곡면은 곡면의 표현 및 형상 변화를 민감하게 표시할 수 있는 B-Spline 곡면을 이용하였으며, 사상된 2차원 평면상에서 임의 형상의 구멍을 포함할 수 있도록 하여 범용성을 높였다.

또한, 설계대상물 곡면의 생성 및 표현, 균일한 절점의 생성, 생성된 절점을 이용한 삼각 요소의 생성을 수행할 수 있는 알고리즘은 사용자 환경을 고려한 소프트웨어 형식으로 구현하였으며, 곡면의 생성시 필요한 데이터를 입력하는 부분은 사용자가 B-Spline 곡면에 대한 기본적인 지식이 있다는 것을 전제로 하였다. 따라서, 생성된 곡면에 절점 및 요소 생성을 위해서 사용자는 단지 요소의 크기만 입력하면 되고, 시각적 검증을 위해 생성된 삼각 요소의 형상비 데이터 정보를 수치와 그래프로 볼 수 있도록 하였다.

## 2. 곡면의 생성 및 표현

### 2.1 B-Spline 곡면

#### 2.1.1 정의

B-spline 곡면은 매듭 벡터(knot vector)가 비균일(non-uniform)한 유리 곡면으로 일반화될 수 있다. B-spline 곡면은 다음과 같은 식 (3)으로 표현될 수 있다.

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,k}(u) M_{j,l}(v) P_{ij} \quad (1)$$

위의 식이  $k * l$  차(따라서 계수(order)는  $k+1, l+1$ )의 B-spline 곡면을 나타내는 식이다. 여기서,

$P_{ij}$  : 조정점으로 총  $(n+1) \times (m+1)$ 개

$N_{i,k}$  : 매개변수  $u$  방향으로의 기저함수

$M_{j,l}$  : 매개변수  $v$  방향으로의 기저함수

B-spline 곡면의 매듭 벡터는 다음 식과 같이 주어진다.

$$U = \{0, \dots, 0, \underbrace{u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}}_{\substack{1 \ 2 \ 3 \\ p+1}}, 1, \dots, 1\}$$

$$V = \{0, \dots, 0, \underbrace{v_{p+1}, \dots, v_{s-q-1}}_{\substack{1 \ 2 \ 3 \\ p+1}}, 1, \dots, 1\} \quad (2)$$

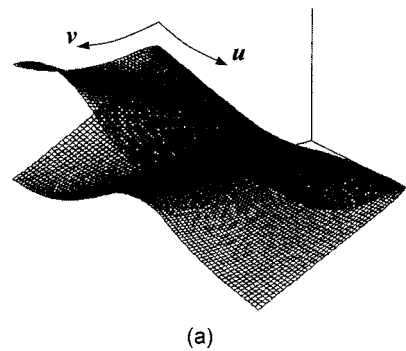
여기서,  $p$ 와  $q$ 는 차수로서  $p=n+k+1, q=m+l+1$ 의 관계를 만족해야 한다.

#### 2.1.2 특징

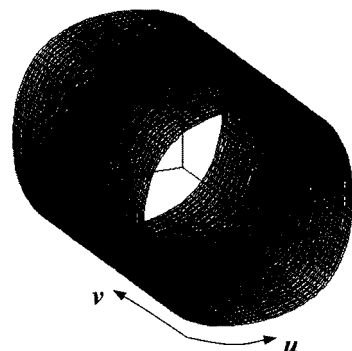
각 조정점이 0 또는 양의 값을 갖는다면 B-spline 곡면은 정의한 다각형 망의 최소 블록 집합 내부에 포함되고, 각 매개변수 방향으로의 최대 계수는 그 방향으로 정의한 조정점의 수보다 작으며, 매듭 값이 다수가 아니라면  $k+1, l+1$ 개 B-spline은 각 매개변수 방향으로 어느 곳에서나  $C^{k-1}, C^{l-1}$ 연속이다. 또 Bezier 곡면은 조정점을 이동하면 곡면 전체가 수정되나 B-spline 곡면은 같은 방법으로 곡면의 일부분만 수정이 가능하다. 그리고 차수(degree)는 조정점의 수와 항상 관계있는 것은 아니므로 새로운 조정점이 추가된다 하더라도 차수는 절대 변하지 않는다. 따라서 B-spline 곡면은 정확히 2차 곡면(quadratic surface)을 표현할 수 있다.

### 2.2 B-spline을 이용한 곡면 생성의 예

Fig. 1은 B-spline에 의해 생성된 곡면의 예이다. Fig. 1(a)는  $u$  방향의 차수( $p$ )가 2차,  $v$  방향의 차수( $q$ )



(a)



(b)

Fig. 1. Examples of B-spline surfaces.

가 2차이며, 다음과 같은 매듭벡터를 갖는 곡면이며,

$$U = V = \{0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1\} \quad (3)$$

Fig. 1(b)는  $u$  방향의 차수( $p$ )가 2차,  $v$  방향의 차수( $q$ )가 2차이고 아래와 같은 매듭벡터를 갖는 곡면이 된다.

$$U = \{0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1\} \quad (4)$$

$$V = \{0, 0, 0, 1/4, 2/4, 3/4, 1, 1, 1\} \quad (5)$$

### 3. 초기 절점 생성법

#### 3.1 기본 형상의 입력

기본 형상의 입력은 외부 경계일 때는 반시계 방향으로, 내부 경계일 때는 시계방향으로 아래의 그림과 같이 모서리를 정의해 준다.

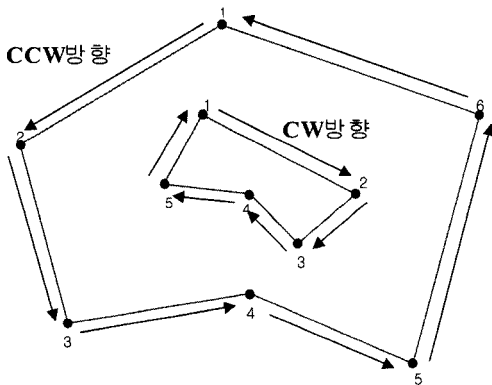


Fig. 2. Input data for initial boundaries.

#### 3.2 초기 경계선 상의 절점 생성법

절점을 생성할 때 경계선 상의 절점을 오프셋하여 내부 절점을 생성해 나가기 때문에 먼저 입력받은 형

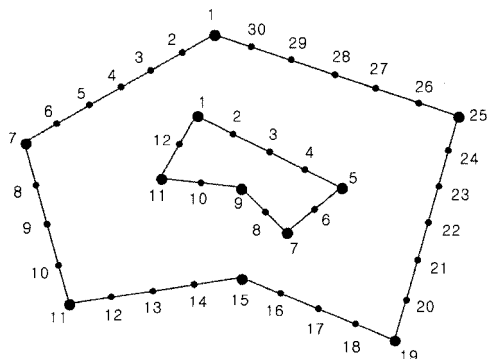


Fig. 3. Node generation on initial boundaries.

상의 경계선을 요소의 크기로 분할하여 절점을 생성시켜야 한다(식 (6)). 하지만 형상을 이루고 있는 경계선의 길이가 요소의 크기에 맞게 정수로 나누어지지 않으므로 식 (7)와 같이 각 경계선마다 분할크기를 구하고 여기서 구한 분할크기로 경계선 길이를 나누어 Fig. 3과 같이 초기 경계선 상에 절점을 생성시킨다.

$$m = \text{정수화}\left(\frac{l}{d}\right) \quad (6)$$

$$d' = \frac{l}{m} \quad (7)$$

여기서,  $d$ : 분할할 크기

$d$ : 초기 입력

$l$ : 경계 선분의 길이

정수화: 계산 결과의 소수점을 반올림하는 함수

### 4. 영역 내의 절점 생성

#### 4.1 용어 정리

Fig. 4에 내부 절점을 생성할 때 기준이 되는 세 절점  $N_{i-1}, N_i, N_{i+1}$  와 이 기준 절점을 제외한 절점들 중 절점 오프셋에 영향을 미치는 절점  $N_m$ 을 결정하여 적절한 위치의 새로운 절점을 생성시키는데 필요한 첨자들을 정의하고 하였다.

여기서,

$N_{i-1}, N_i, N_{i+1}$ : 내부 절점 오프셋시 기준이 되는

3개의 절점으로 각각 시작, 중심, 끝 절점

$\theta$ : 3개의 기준 절점이 이루는 내부각도

$N_m$ : 3절점 상에서 중심 절점으로부터 거리가 요소 길이의 2.3배보다 작고 내부각도 안에 있는 가장 가까운 기존 절점

$P_i, P_{i+1}$ : 오프셋에 의해 내부에 새로 생길 수 있는 절점

Len: 3절점 중 중심점과  $N_m$  사이의 길이

$d$ : 요소의 길이

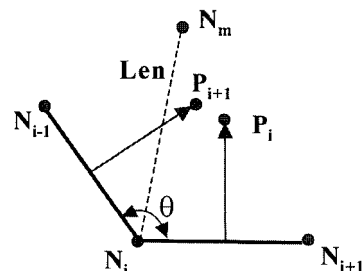


Fig. 4. Definition of symbols.

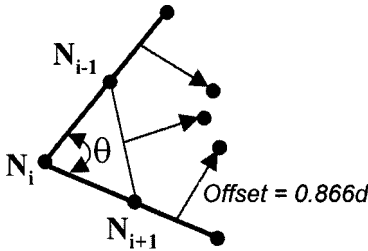
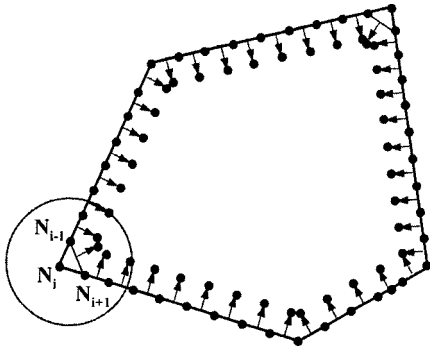


Fig. 5. Node offsetting.

4.2 내부 절점의 오프셋

4.2.1 내부 절점 오프셋

기본적으로 내부 절점은 Fig. 5와 같이 각 노드점의 중심점에서 일정거리 만큼을 오프셋 시켜 생성시키게 된다. 여기서 오프셋 크기는 생성된 절점에 의해 정삼각형이 생성되어질 수 있도록 다음과 같이 정의한다.

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{오프셋 크기}}{\frac{d}{2}}, \quad d \text{는 요소의 크기}$$

따라서, 오프셋 크기 = 0.866d (8)

4.2.2 꼭지점에서의 삼각 요소 생성 방법

삼각 요소를 생성할 때 꼭지점 부근에서는 절점을 오프셋 시키는 것보다는 꼭지점을 그대로 포함하는 요소가 되도록 절점을 생성시키는 것이 좋다. 본 연구에서는 꼭지점 각도 \$\theta\$가 95°이내이면 그 부분은 새로운 경계가 있는 것처럼 처리하도록 하였다. Fig. 6에서처럼 꼭지점이 \$N\_i\$이고 꼭지점 양쪽으로 95°의 각도를 이루는 절점 \$N\_{i-1}\$, \$N\_{i+1}\$이 있을 때 삼각 요소의 형상비(Aspect Ratio)가 약 0.68이 됨을 알 수 있다. 일반적으로 형상비가 0.7 정도이면 어느 정도 균형적인 요소라고 할 수 있으므로 95°를 기준으로 삼아도 타당함을 알 수 있다.

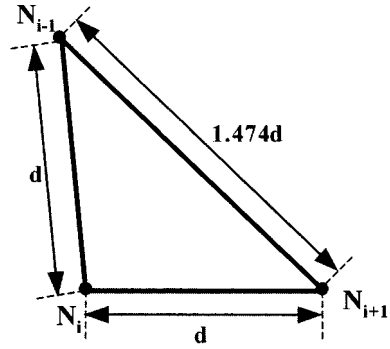


Fig. 6. Node generation at the typical convex boundary node.

$$\text{Aspect Ratio} = \left( \frac{\text{삼각형의 단변길이}}{\text{삼각형의 장변길이}} \right) \quad (9)$$

4.2.3 두 절점 사이의 거리가 0.7d 미만인 경우

Fig. 7과 같이 오프셋된 절점 사이의 거리가 0.7d 이하인 경우 두 절점 \$P\_i\$와 \$P\_{i+1}\$사이의 중심점을 새로운 절점으로 추가하고 기존 2개의 절점은 제거하도록 하였다.

$$\begin{aligned} \text{New\_Node}(x) &= \frac{P_{i+1}(x) - P_i(x)}{2} \\ \text{New\_Node}(y) &= \frac{P_{i+1}(y) - P_i(y)}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

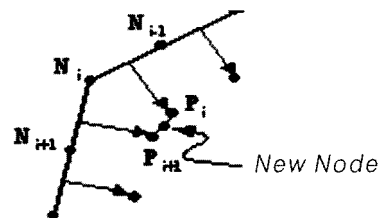
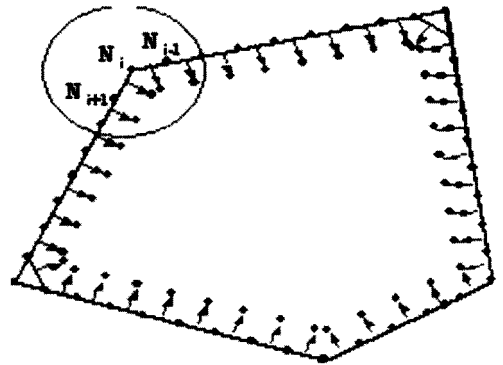


Fig. 7. Inner node generation in case of the distance between two nodes less than 0.7.

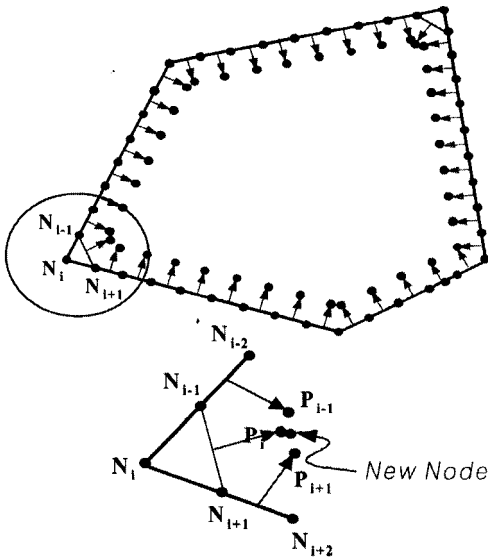


Fig. 8. Inner node generation in case of the distance among three nodes less than 1.3.

4.2.4 세 절점 사이의 거리가 1.3d 미만인 경우

볼록 형상(convex)에서 외부 경계 위의 절점들을 안쪽으로 오프셋하게 되면 오프셋 된 점들은 서로 가까워지기 때문에 일정 거리 안에 있는 세 절점을 하나의 절점으로 합쳐야 한다. Fig. 8에서 보듯이와 같이 오프셋에 의하여 3개의 노드가 인접하는 현상이 발생하게 되고, 세 절점의 길이의 합이 요소 길이의 1.3배보다 작은 경우 아래와 같은 삼각형의 내심 공식을 이용하여 새로운 노드를 생성하게 된다.

$$N(x) = \frac{|P_{i-1}(x)P_i(x)|P_{i+1}(x) + |P_i(x)P_{i+1}(x)|P_{i-1}(x) + |P_{i-1}(x)P_{i+1}(x)|P_i(x)}{|P_{i-1}(x)P_i(x) + |P_i(x)P_{i+1}(x) + |P_{i-1}(x)P_{i+1}(x)|}$$

$$N(y) = \frac{|P_{i-1}(y)P_i(y)|P_{i+1}(y) + |P_i(y)P_{i+1}(y)|P_{i-1}(y) + |P_{i-1}(y)P_{i+1}(y)|P_i(y)}{|P_{i-1}(y)P_i(y) + |P_i(y)P_{i+1}(y) + |P_{i-1}(y)P_{i+1}(y)|} \quad (11)$$

여기서,

$$|P_i(x)P_{i+1}(x)| = P_i(x) \text{ 와 } P_{i+1}(x) \text{ 사이의 거리}$$

4.2.5 1개의 절점이 추가되는 경우( $\theta < 300^\circ$ )

다음으로 오목형상(Nonconvex) 이면서 절점이 이루는 각도가  $300^\circ$  미만인 경우에는 Fig. 9에서와 같이 세 절점의 각도를 이등분 하는 방향으로 새로운 절점 1개를 추가한다.

4.2.6 2개의 절점이 추가되는 경우( $\theta \geq 300^\circ$ )

다음으로 오목형상이면서 절점이 이루는 각도가  $300^\circ$  이상인 경우에는 Fig. 10에서와 같이 세 절점이 이

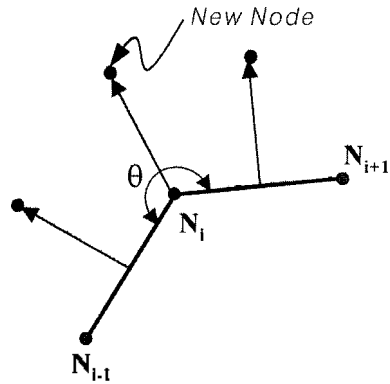


Fig. 9. Inner node generation in case of the one node is added.

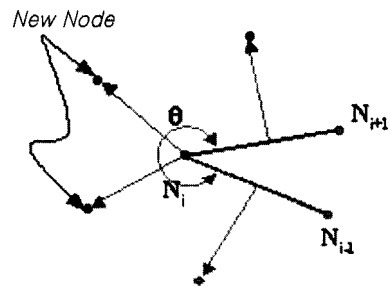


Fig. 10. Inner node generation in case of the two nodes are added.

루는 각의 중심부에서 새로 생성되는 두 노드점 사이의 각을  $60^\circ$ 가 되도록 오프셋 시켜 새로운 2개의 노드를 추가로 생성한다. 여기서 기준 각도로  $300^\circ$ 를 택하게 된 이유는  $60^\circ$ 를 뺀 값이  $240^\circ$  각을 이루고 이 각을 이등분하면  $120^\circ$ 가 되어 오프셋 된 절점과의 각도가  $60^\circ$ 를 이루게 되므로 이 각도를 기준으로 정하였다.

4.2.7  $\theta < 300^\circ$ 이고  $Len < 1.2d$ 인 경우

여기서  $Len$ 의 값이 요소 길이의 1.2배 보다 작은 경우에는 내부에 새로운 절점을 생성시켜 요소를 생성하게 되면 형상비가 0.6이하가 되어 좋지 못하므로 Fig. 11과 같이 절점  $N_i$ 와 절점  $N_m$ 이 그대로 연결될 수 있도록 기존 절점  $N_m$ 을 취하게 된다.

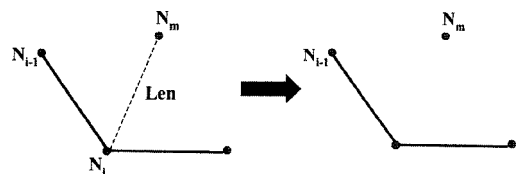


Fig. 11. Boundary node propagation.

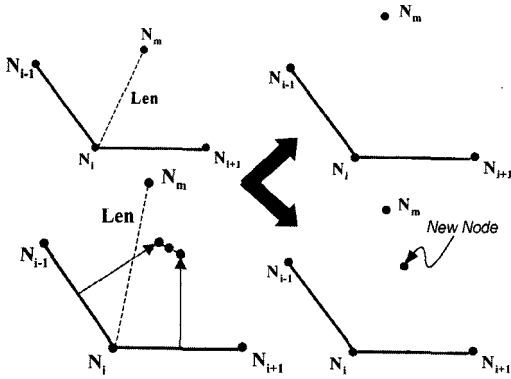


Fig. 12. Two possible cases of node generation(1).

4.2.8  $\theta < 300^\circ$ 이고  $Len > 1.2d$ 인 경우

다음과 같이 노드  $N_i$ 에서 내부 홀 경계선상의 절점  $N_m$ 과의 거리(Len)가 요소 길이의 1.2배보다 클 때 내부에 새로운 절점을 생성하는 경우와 생성하지 않는 두 가지 경우를 생각해볼 수 있다. 요소 생성 과정은 Fig. 12에서와 같이  $\Delta(N_{i-1}N_mN_i)$ 가 이루는 형상비와  $\Delta(N_iN_mN_{i+1})$ 가 이루는 형상비 중 0.7이상의 값이 존재한다면 새로운 노드를 생성시키지 않고, 만약 형상비가 0.7보다 큰 요소가 없다면 오프셋된 절점 1개를 추가시키게 된다.

4.2.9  $\theta \geq 300^\circ$ 이고  $Len > 1.2d$ 인 경우

다음으로 세 절점이 이루는 각도가  $300^\circ$  이상이고 노드  $N_i$ 에서 거리가 요소길이의 2.3배보다 작으며 내부 각도 안에 있는 가장 가까운 기존 절점(예를 들면 내부 홀 경계선상의 절점)  $N_m$ 과의 거리(Len)가 요소길이의 1.2배보다 큰 경우가 있다. 이 경우에도 마찬가지로

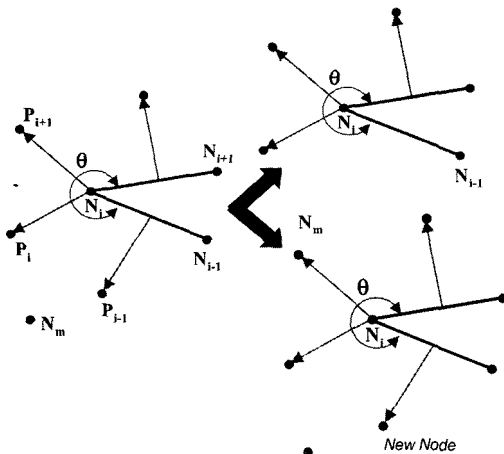


Fig. 13. Two possible cases of node generation(2).

가치로 Fig. 13과 같이 내부에 새로운 절점을 생성하는 경우와 생성하지 않는 두 가지 경우를 생각해볼 수 있다. 요소 생성 과정은  $\Delta(N_iP_iN_m)$ 가 이루는 형상비와  $\Delta(N_{i-1}N_mN_i)$ 가 이루는 형상비 중 작은 값과  $\Delta(N_{i-1}N_iP_i)$ 가 이루는 형상비 중 0.7이상의 존재하면 절점을 추가시키지 않고, 그렇지 않은 경우 절점을 추가시킨다.

Aspect(1)을  $\Delta(N_iP_iN_m)$ 와  $\Delta(N_{i-1}N_mN_i)$ 의 형상비 중 작은 값이라고 하고, Aspect(2)를  $\Delta(N_{i-1}N_iP_i)$ 의 형상비라고 할 때, 요소 생성 과정을 알고리즘으로 표현하면 다음과 같다.

If (Aspect(1) > 0.7 or Aspect(2) > 0.7) then

절점  $P_{i-1}$  제거

Else

절점  $P_{i-1}$  추가

End If

4.3 요소 생성의 종결

외부 경계의 절점을 오프셋하여 새로운 절점을 생

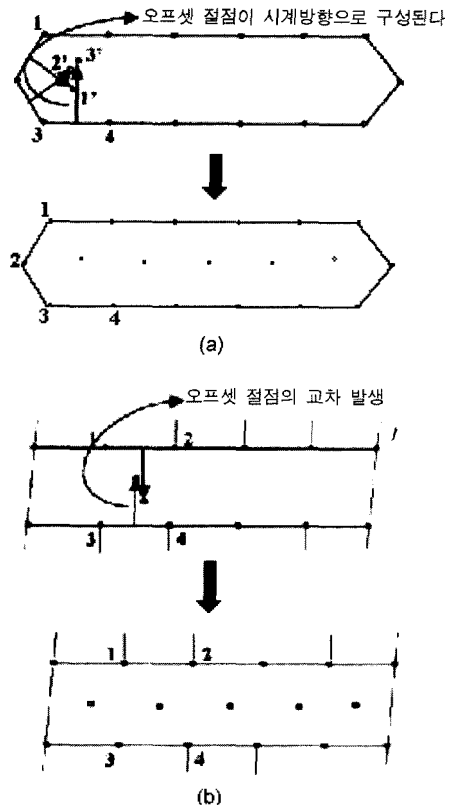


Fig. 14. Completion cases of node generation.

성하고 거리 검사, 교차 검사를 통해서 다시 절점의 위치가 조정되어진 후, 조정되어진 절점이 반시계방향이나 시계방향으로 형성되어지는 경우와 오프셋된 절점의 X 또는 Y 좌표값의 차가 음수일 때, 즉 두 절점이 교차하게 되면 다음 Fig. 14의 (a) 또는 (b)와 같이 요소 생성을 종결할 수 있다.

### 5. 사상법을 이용한 절점의 투영

2차원 평면상에서 절점을 생성한 후 곡면상에 절점을 투영 시키는 단계이다. 먼저 곡면의 면적이 최대가 되도록 2차원 평면상에 투영되어지는 매개평면(parametric plane)을 표시하고, 이 평면 내에서 구멍을 사용자가 입력하여 임의의 구멍 형상을 포함할 수 있게 한다. Fig. 15에서 보는 바와 같이 곡면의 4개의 꼭지점이 매개 평면상에서 투영된 절점으로 표시되어지고, 이 평면상에 2차원 절점들이 생성된다. 평면에 생성된 절점들을 곡면에 투영시키기 위하여 매개변수  $u, v$ 의 값을  $x, y$ 좌표값을 이용하여 계산한다. 3D 공간상의 곡면을 이루는 4개의 꼭지점을 2차원 평면으로 사상시키면 그림과 같이  $u, v$  값이 최소 0에서 1까지인 사각형 형상을 그릴 수 있다. 여기서 곡면을 이루고 있는 4개의 꼭지점은 각각 매개 평면상의 꼭지점과 대응되고 곡면상의 좌측 하단에 있는 점이 기준점(0,0)이 된다. 이 점을 기준으로 나머지 점들의 길이값을 구하고, 매개평면 상에서 생성된 각 절점들의 좌표값을 전체 길이값으로 나누면 각 절점들의 매개변수값을 얻어낼 수 있다. 이렇게 얻어낸 0부터 1까지의 매개 변수 값을 다시 B-spline 곡면식을 이용하여 계산하게 되면 곡면상에 각 절점을 역사상 시킬 수 있게 된다. 본 연구에서는 구멍이 포함된 B-spline 곡면에 대한 입력방법으로서 2차원 매개 변수 평면상에서 사용자가 마우스를 이용하여 임의의 Line과 Circle 형상을 입력할 수 있도록 하였고, 상기에 설명된 방법으로 매개 변수를 구하게 된다. 즉, 2차원 매개 변수 평면상에서 생성시킨 구멍을 곡면 상으로 사상시키게

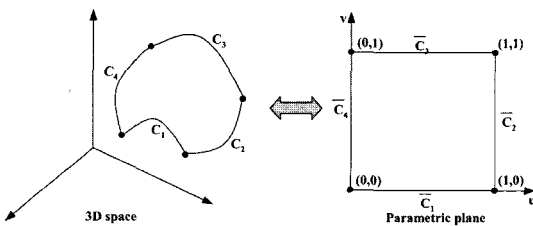


Fig. 15. Projection mapping method.

되고, 곡면의 곡률에 따라 구멍의 형상은 다르게 보이게 된다.

## 6. 삼각화 알고리즘

### 6.1 Delaunay-Watson의 삼각화 알고리즘

본 연구에서는 등변형의 삼각형 요소망을 생성하기 위하여 Delaunay-Watson의 요소 생성 알고리즘을 수정하여 사용하였다. Delaunay-Watson의 요소 생성 알고리즘은 주어진 점의 집합으로 형성할 수 있는 삼각형의 집합 중 가장 등변형에 가까운 삼각형 집합을 생성하는 장점이 있다. 따라서 등변형의 형상이 바람직한 유한요소를 생성하기 위해 가장 널리 사용되는 방법이다.

2차원의 경우, Delaunay-Watson<sup>5)</sup>의 요소 생성 알고리즘의 기본개념은 볼체의 내부에 생성된 절점들 중 Fig. 16과 같이 일직선상에 있지 않은 세 개의 점으로 구성된 삼각형에서 그 삼각형을 이루는 절점들로 이루어진 외접원 내에 다른 절점이 포함되어 있지 않으면 그 세 점은 Delaunay 삼각형의 조건을 만족하여 요소를 생성하는 방법을 말한다.

### 6.2 수정된 Delaunay-Watson의 삼각화 알고리즘

Delaunay-Watson의 삼각화 알고리즘은 등변형의 삼각형 요소망을 생성할 수 있는 장점을 지니고 있으나 Fig. 17에서와 같이 대상물체의 경계가 오목(concave)이면 잘못된 삼각형 요소망을 생성하고 또한 요소망을 생성하는데 방대한 계산량을 요한다는 단점을 지니고 있다.

따라서 본 연구에서는 Delaunay-Watson의 삼각화 알고리즘이 지니고 있는 이 두 가지 문제점을 수정하여 등변형의 삼각 요소망을 생성토록 하였다. 첫 번째

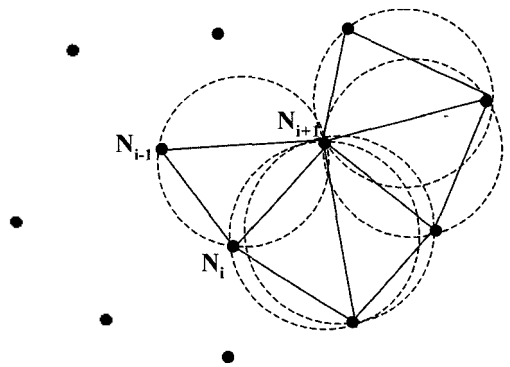


Fig. 16. Delaunay-Watson's triangulation algorithm.

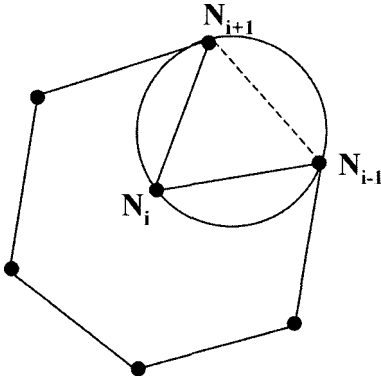


Fig. 17. Degenerate case of Delaunay-Watson algorithm.

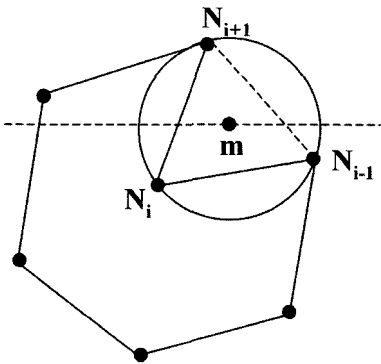


Fig. 18. Checking the center point of a triangle.

문제점으로, Delaunay-Watson의 요소 생성 알고리즘은 물체의 경계가 오복한 경우 Fig. 17와 같이 볼체의 외부에 요소를 생성하게 된다. 본 연구에서는 Fig. 18에서와 같이 요소망을 이루는 절점들의 삼각형 중점이 물체의 내부, 외부 존재여부를 판단하여 이러한 문제점을 보완하였다. 즉, 절점들이 이루는 삼각형 요소의 중점이 물체의 내부에 존재할 시에 한해서 요소를 생성하도록 하였다. 여기서, 삼각형 중점의 물체 내부, 외부 존재여부의 판단은 요소 망을 이루는 삼각형의 중점을 포함하고 X축과 평행한 임의의 가상 선을 그어 교차의 정도를 평가하여 수행하였다.

두 번째 문제점으로, 삼각형 요소망 생성에 긴 시간이 비효율적으로 소모된다는 것이다. 그 이유는 요소 생성 시 물체의 내부에 생성된 모든 절점들을 개별적으로 비교하기 때문이다. 따라서 이 문제점을 해결하기 위하여 본 연구에서는 다음과 같은 해결 방법을 제안하였다. 절점들은 초기설정 요소 길이의 일정 범위 안에 들도록 절점 생성단계에서 이미 생성되었으므로 삼각형 요소를 이루는 점들은 각각의 절점들 간 거리가 초기 설정 요소 길이에서 많이 벗어날 수 없다. 그

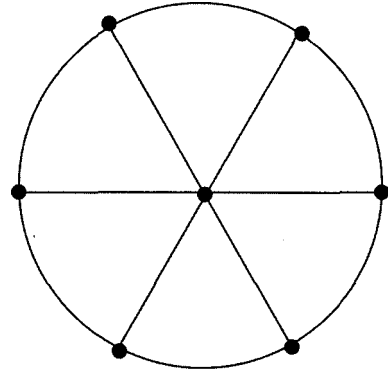


Fig. 19. Max. number of nodes having perfect triangles.

러므로, 요소 생성 시 물체의 내부에 생성된 모든 절점들을 비교하지 않고 임의의 절점을 중심으로 초기 설정 요소 길이의 일정 범위 안에 있는 절점들만을 저장해 두었다가 거리 비교를 수행토록 하여 요소 생성 소요 계산 횟수를 줄였다.

예를 들어 Fig. 19와 같이 임의의 절점을 중심으로 가장 좋은 형상인 정삼각형 요소를 이룰 수 있는 절점을 6개가 존재하게 된다. 따라서 생성된 모든 절점들을 비교하지 않고 임의의 절점 주위의 6개만을 비교하면서 요소를 생성하면 삼각화 시 계산횟수를 현저히 감소시킬 수 있다.

## 8. 예 제

### 8.1 다양한 형상에서의 요소망 생성

Fig. 20-23은 개발된 프로그램을 사용하여 임의의 구멍을 포함하는 다양한 곡면 형상에서의 삼각 요소망 생성을 행한 그림이다.

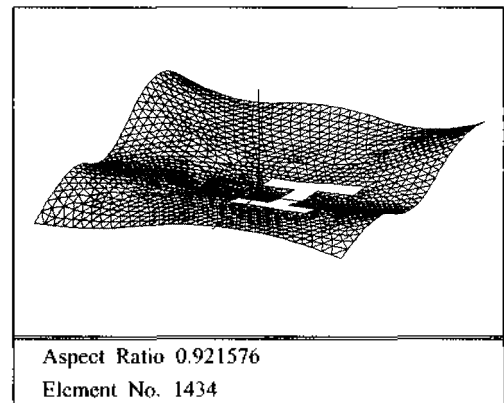


Fig. 20. Mesh generation on surface of arbitrary form.



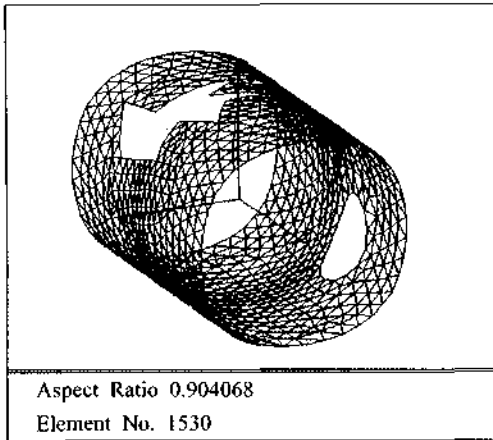


Fig. 21. Mesh generation on surface of pipe with various holes.

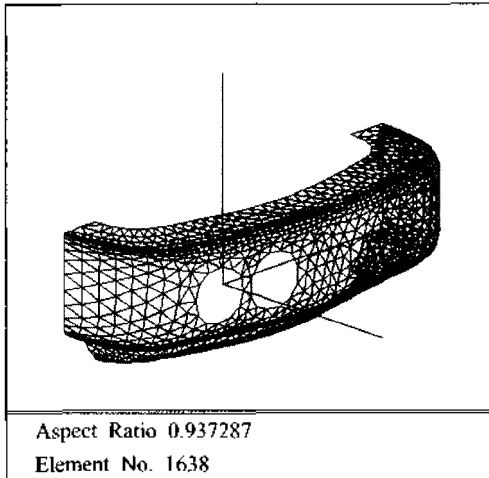


Fig. 22. Mesh generation on surface of bumper with two holes.

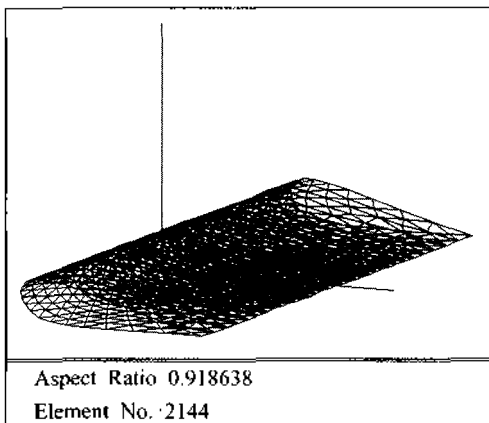


Fig. 23. Mesh generation on surface of airfoil.

## 9. 결 론

본 연구에서는 사각 요소 생성의 대표적인 방법 중 하나인 절점 오프셋 방법을 수정 보완하여 삼각 요소 생성에 적용함으로써 전체적으로 정형화된 요소망을 구성할 수 있었다. 또한 코너부에서 형질이 저하될 수 있는 절점 오프셋 방법의 단점을 기준 각도를 다양하게 설정하여 보완하였다. 그리고 곡면의 생성에 있어서 기존에는 주로 CAD 소프트웨어를 사용하였는데 본 연구에서는 곡면 및 곡면을 나타내는데 매우 우수한 B-spline 공식을 이용하여 설계자가 임의의 형상의 구멍을 포함한 다양한 곡면을 직접 설계할 수 있도록 하였고, 이를 이용하여 즉시 설계자가 비교적 정형화된 삼각 유한 요소망을 생성시키도록 자동화 하였다. 본 연구의 결과에서 생성된 삼각 요소의 형상비는 평균 0.9이상의 값을 가짐으로써 비교적 우수한 요소가 생성됨을 알 수 있다.

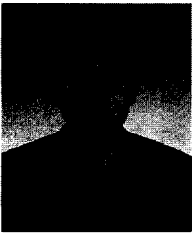
## 감사의 글

본 연구는 한양대학교 교내연구비에 의하여 수행되었으며, 이에 대하여 깊은 감사를 드립니다.

## 참고문헌

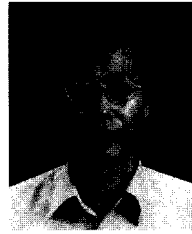
1. Akin, J. E., "Application and Implementation of Finite Element Methods," Academic Press, pp. 10, 1982.
2. Carvendish, J. C., "Automatic Triangulation of Arbitrary Planar Domains for the Finite Element Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 679-696, 1974.
3. Carvendish, J. C., Field, D. A. and Frey, W. H. "An Approach to Automatic Three-dimensional Finite Element Mesh Generation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 329-347, 1985.
4. Lo, S. H., "A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 93-99, 1985.
5. 김병욱, "Lo의 요소망 생성 알고리즘을 개선한 자동 요소망 생성 소프트웨어의 개발," *CAD/CAM Journal*.
6. Shimada, K. and Gossard, D. C., "Computational Method for Physically-based FE Mesh Generation," *Human Aspects in Computer Integrated Manufacturing*, G. J. Olling, F. Kimura (ed.), North-Holland, 1992.

7. 천재홍, "절점과 요소를 동시에 생성할 수 있는 삼각 요소망 알고리즘의 개발," *CAD/CAM Journal*.
8. 김도현, "다양한 2차원 형상에서의 외부 경계 절점 오프셋 방법을 이용한 자동 사각 요소 및 요소망 생성," 한양대학교 대학원, 2001년 12월.
9. Zienkiewicz, O. C. and Phillips, D. V., "An Automatic Mesh Generation Scheme for Plane and Curved Surfaces by 'Isoparametric' Co-ordinates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, pp. 519-528, 1971.
10. Ghassemi and Firooz, "Automatic Mesh Generation Scheme for a Two- or Three - Dimensional Triangular Curved Surface," *Computer & Structures*, Vol. 15, No. 6, pp. 613-626, 1982.
11. Lee, C. K. and Hobbs, R. E., "Automatic Adaptive Finite Element Mesh Generation Over Rational B-spline Surfaces," *Computers and Structures*, Pergamon, Vol. 69, pp. 577-608, 1998.
12. Farin and Gerald, "Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design - A Practical Guide," 3rd Edition, Academic Press, 1993.



### 김 근 호

2000년 강원대학교 기계공학부 학사  
 2003년 한양대학교 기계설계학과 석사  
 2003년~현재 (주)엔텍 생산기술연구소 연구소



### 양 현 익

1984년 한양대학교 기계공학과 학사  
 1986년 Columbia University 기계공학과 석사  
 1991년 Columbia University 기계공학과 박사  
 1991년~1994년 현대전자 산업전자연구소 책임연구원  
 1995년~현재 한양대학교 기계정보경영공학부 부교수  
 관심분야: mesh generation, CAD/CAM, nano engineering, energy transmutation