

3-D 오퍼레이터를 이용한 사면체 요소망의 자동 생성

권기연*, 채수원**, 이병채***

Automatic Tetrahedral Mesh Generation using 3-D Operators

Kwon, K. Y.*, Chae, S. W.** and Lee, B. C.***

ABSTRACT

A tetrahedral mesh generation scheme using 3-D operators has been presented. The proposed scheme employs new 3-D operators such as rearranging and modified finishing operators in addition to the previous trimming, wedging, digging, splitting and finishing operators. These new operators have been introduced in order to increase the stability of mesh generation process. Check processings with surrounded element edges and faces have also been optimized by employing a searching algorithm. Sample meshes are constructed to demonstrate the mesh generating capability of the proposed algorithm.

Key words : Tetrahedral mesh, Advancing-front, 3-D operator, Rearranging operator, Modified finishing operator, Searching

1. 서 론

3차원 유한요소해석에서 사면체 요소는 복잡한 형상에 대해서도 자동적으로 요소망의 생성이 가능하므로 현업에서 많이 사용되고 있다. 최근에는 컴퓨터의 성능이 향상되면서 해석하고자 하는 모델의 크기도 함께 대형화되어 많은 수의 요소를 빠른 시간 내에 안정적으로 생성하는 것이 필요하다.

사면체 유한요소망 생성기법으로는 전진경계법^[1], Delaunay 삼각법^[2-9] 및 옥트리(octree)^[10,11]를 기본으로 한 방법 등이 있으며, 이들을 결합한 방법^[12-15]도 연구되고 있다. 본 논문에서는 전진경계법(advancing front method)을 이용하여 사면체 요소망을 보다 안정적으로 생성할 수 있는 방법을 연구하였다. 전진경계법은 3차원 물체의 표면에 삼각형 요소망을 구성한 후, 내부에 절점을 생성하면서 사면체 요소망을 생성하는 것이다. 접근 방법은 요소 면(face) 기준과 요소 에지(edge) 기준이 있다. 전자는 요소면 기준으로 새로운 절점을 생성하거나 기존에 생성된 절점을 이용하여 사면체 요소를 생성하는 방법이고^[16], 후자는 요

소 에지에 붙어있는 삼각형 요소의 연결성을 고려하여 각각의 종류에 맞게 3차원 오퍼레이터를 사용하여 사면체 요소를 생성하는 방법이다^[16]. 본 연구에서는 에지기준 접근법을 사용하였으며 기존 3차원 오퍼레이터(트리밍, 웨징, 디깅, 로컬 피니싱, 스플리팅)^[16]에 새로운 오퍼레이터(리어렌징, 수정 피니싱)를 추가하였다. 전진 경계법은 요소가 외부에서 내부로 생성되기 때문에 남은 영역에서는 심하게 왜곡되어 매우 품질이 나쁜 요소를 생성시키거나 더 이상 작업을 진행할 수 없게 될 수 있다. 따라서 본 논문에서는 요소의 품질향상과 안정성을 증가시키기 위해 리어렌징(rearranging)과 수정 피니싱(modified finishing) 오퍼레이터를 제안하였다.

삼각형 요소망으로부터 사면체 요소를 생성하기 위해서는 내부에 새로운 절점 및 또 다른 삼각형 요소를 생성하게 된다. 이 때 삼각형 요소가 새롭게 생성되면 기존의 것과 교차하거나 너무 가까이에 생성되는지를 판단하게 된다. 기존 모든 요소에 대해서 체크를 하게 되면 많은 시간이 소요되므로 인접한 대상을 효율적으로 찾아서 가끔씩 체크를 적게 하는 것이 중요하다. 이를 위해 본 연구에서는 관심 영역에 격자를 구성하였으며, 기존의 방법과는 달리 별도의 탐색 작업 없이 새롭게 생성될 절점이나 요소가 어떤 격자에 포함되는지를 판단할 수 있게 하였다. 이는 단순히 절점의 좌표값만으로 판단되므로 격자를 구성하기가 쉽고 탐

*학생회원, 한국과학기술원 기계공학과

**중신회원, 고려대학교 기계공학과

***비회원, 한국과학기술원 기계공학과

- 논문투고일: 2003. 05. 20

- 심사완료일: 2003. 11. 18

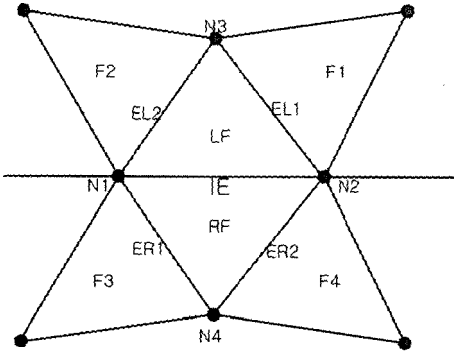


Fig. 1. Expanded view around an edge KE.

색 작업이 없이 정확하게 인접한 대상들을 찾을 수 있다.

2. 본 론

2.1 개요

진진경계법은 폐루프(closed loop)를 구성하고 법선 방향이 일정한 삼각형 요소를 이용하여 사면체 요소를 생성한다. 우선 각각의 요소에지에 주위 요소면(삼각형 요소)의 연결성을 저장하고, 두 요소면이 이루는 각도를 계산한다. 본 연구에서는 요소에지 기준을 사용하여 Fig. 1과 같은 자료구조를 이용하였다. IE는 현재 사면체 요소를 생성하고자하는 요소에지, F는 주변 요소면 그리고 ELi, ERi는 주변 요소에지 정보를 나타낸다. 요소망 생성시 이러한 정보를 이용하여 오퍼레이터의 타입을 설정하여 사면체 요소를 생성한다. 새로운 요소가 추가될 때는 교차하는 것이 생성되지 않도록 유효성 테스트(validity test)를 하고, 우수한 품질의 요소를 생성하기 위하여 보조 테스트(auxiliary test)를 한다. 유효성 테스트는 새롭게 생성되는 요소가 기존 요소와 교차하거나 영역 외부에 생성되는지를 체크하고, 보조 테스트는 요소면과 에지, 절점들이 이루는 각도 및 거리를 체크하여 우수한 품질의 요소가 생성되도록 한다. 위와 같은 테스트는 모든 영역이 아니라 주변에 있는 것들을 대상으로 이루어져야 하므로 인접한 요소면, 에지를 찾는 것이 필요하다. 사면체 요소망 생성이 완료되면 요소 평활화(smoothing)를 수행한 후 작업을 종료한다.

2.2 3차원 오퍼레이터

2.2.1 기존 오퍼레이터^{5,6)}

트리밍 오퍼레이터는 Fig. 2와 같이 두개의 면이 일치하고, 요소에지의 각이 너무 크지 않을 경우 적용된

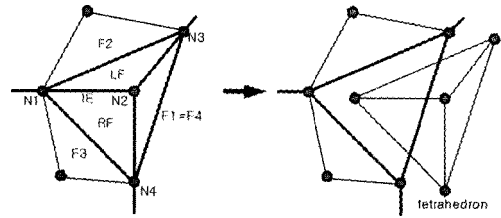


Fig. 2. Trimming operator.

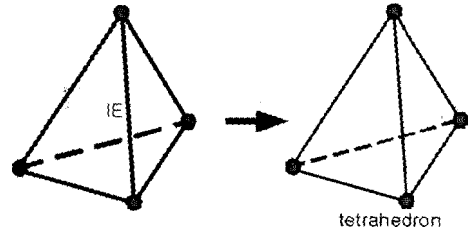


Fig. 3. Local finishing operator.

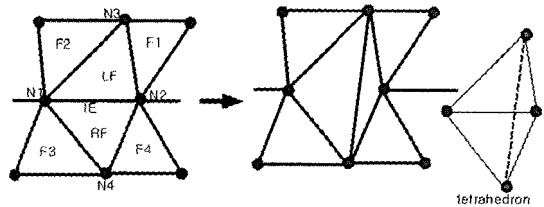


Fig. 4. Wedging operator.

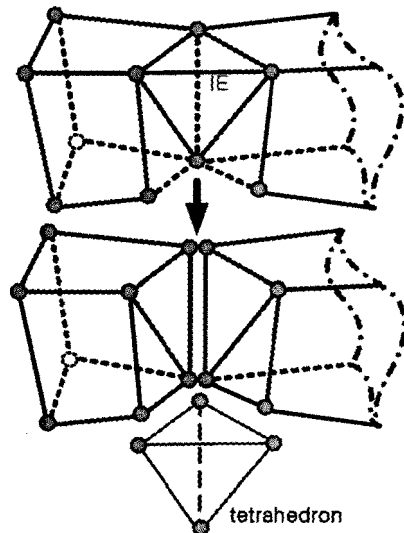


Fig. 5. Splitting operator.

다. 로컬 퍼니싱 오퍼레이터는 남은 영역이 네개의 요소면으로 구성된 경우 하나의 사면체를 생성시킨다 (Fig. 3). 웨징 오퍼레이터는 더 이상 트리밍 오퍼레이터를 적용시킬 수 없을 경우 사용된다(Fig. 4). 여기에

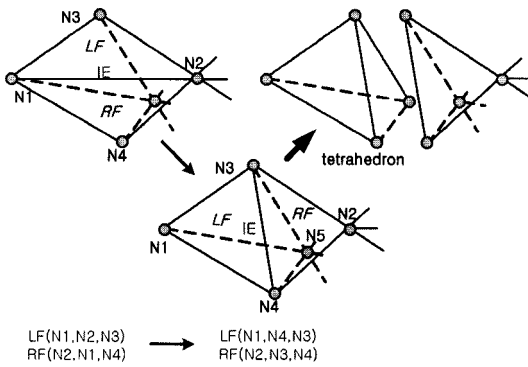


Fig. 6. Rearranging operator.

시 새롭게 생성되는 에지가 기존에지와 겹치게되면 스플릿팅 오퍼레이터를 적용하게 되며 하나의 사면체 요소가 생성된다(Fig. 5). 디깅 오퍼레이터는 위의 모든 오퍼레이터가 적용 불가능할 경우 사용되고, 내부에 하나의 절점을 생성시키면서 두개의 사면체 요소가 생성된다(Fig. 6).

2.2.2 리어렌인징 오퍼레이터

본 연구에서는 요소망 생성의 안정성을 증가시키기 위해서 리어렌인징(rearranging) 오퍼레이터를 제안하였다. 리어렌인징 오퍼레이터는 Fig. 6과 같이 트리밍 오퍼레이터가 적용될 수 있도록 요소의 배열을 변경하는 것이다. 초기에 요소면 LF는 절점 N1, N2, N3로 구성되고, RF는 절점 N2, N1, N4로 구성되어 있다. 리어렌인징 오퍼레이터를 적용시키면 LF는 절점 N1, N4, N3로 변경되며, RF는 절점 N2, N3, N4로 변경되어 트리밍 오퍼레이터가 적용가능하여 절점 N1, N4, N3, N5로 구성된 사면체 요소가 생성된다. 이를 위해서는 요소면 LF 또는 RF를 공유하고 있는 이미 생성된 사면체 요소의 절점들도 함께 변경하여야 한다. 요소에지에 생성된 사면체 요소 정보를 저장해 두어, 개수가 두개 또는 세개인 경우에만 적용하도록 한다. 그리고 사면체 요소의 절점들이 바뀔 때 요소의 품질이 나빠지는 경우 이 오퍼레이터를 적용시키지 않아야 한다.

2.2.3 수정 피니싱 오퍼레이터

내부에 요소망이 생성되면서 경계 삼각형 요소의 품질이 나빠져 더 이상 사면체 요소망 생성이 불가능해질 수 있다. 이런 경우 수정 피니싱(modified finishing) 오퍼레이터를 적용시켜 요소망 생성을 종료한다. Fig. 7은 2D 경우를 예로 든 것으로, 첫번째

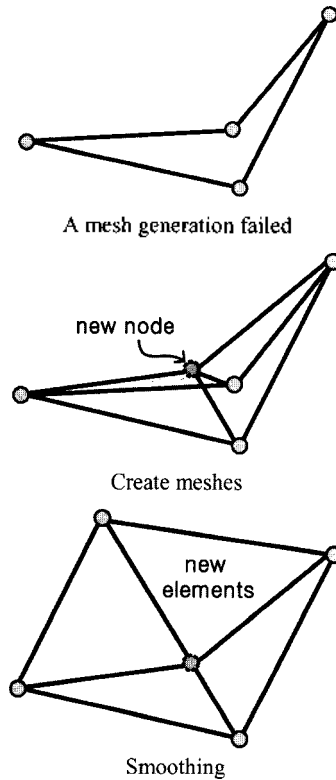


Fig. 7. An example modified finishing operator in 2D.

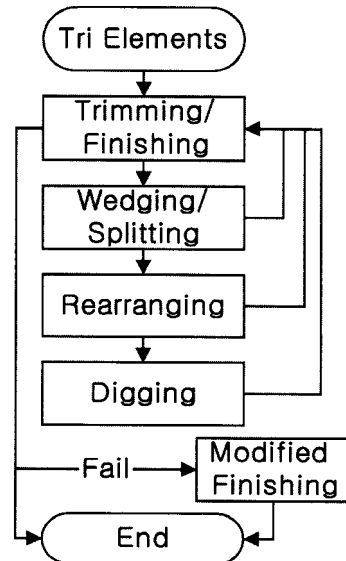


Fig. 8. A flow chart.

그림은 더 이상 요소망 생성이 불가능한 경우이다. 두번째 그림과 같이 모든 절점의 중앙에 새로운 절점을 생성시키고, 요소를 생성한다. 이 경우 요소의 품

질이 나빠지만 평활화 이후에는 세번째 그림과 같이 요소 품질이 개선된다. 이 작업은 여러 개의 로컬 영역에서도 적용될 수 있도록 남아 있는 영역을 분리하는 작업이 필요하다. 하나의 영역에 너무 많은 요소면이 존재하면 요소의 품질이 나빠질 수는 있지만, 요소망 생성에 실패하는 경우가 없어져 안정성을 높일 수 있다.

요소망 생성 순서는 Fig. 8과 같은 순서로 진행되며 더 이상 요소를 생성할 수 없을 때 수정 피니형 오퍼레이터가 적용되고 작업이 종료된다.

2.3 인접 요소면 및 요소에지 찾기

새로운 에지, 면, 절점이 생성될 때는 기존 에지, 면과 교차 및 거리체크를 해야한다. 이를 수행하지 않으면 요소가 서로 교차하거나, 거리가 너무 가까워져 요소의 품질이 나빠지거나 작업을 더 이상 진행할 수 없게 된다. 이 체크를 효율적으로 하기 위하여 다음과 같은 방법을 사용하였다. 여기서 설명하는 방법은 2D를 예를 들어 설명한 것이고, 3D로 확장하기 위해서는 같은 방법을 사용하고 높이에 해당하는 변수를 추가시키면 된다.

우선 영역의 크기를 정하여 가로, 세로 격자 개수를 정한다. 영역의 최대 최소 범위를 정할때는 약간의 오차를 두어 경계에 걸쳐진 대상이 오작동을 범하지 않도록 한다. 격자개수는 대상의 요소에지 길이와 가로 세로 크기(l_1, l_2)를 고려하여 구하여 모델에 따라 유동적으로 격자개수가 설정되도록 한다. 이렇게 최대 최소값 및 격자 개수가 정해지면 식 (1)을 이용하여 절점이 어떤 그리드에 속하는지를 판단한다.

$$\begin{aligned} X &= \min x + (x - \min x) / l_1 \times n_1 \\ Y &= \min y + (y - \min y) / l_2 \times n_2 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서

- $l_1 = \max x - \min x$
- $l_2 = \max y - \min y$
- n_1 : number of horizontal grid
- n_2 : number of vertical grid
- (x, y): coordinate of node

이다.

여기서 X, Y는 그리드의 위치를 나타내며, (X, Y) 번째 그리드에는 이 절점을 포함하는 요소에지가 리스트로 저장된다. 그래서 새롭게 생성되는 면 및 에지의 절점 좌표값을 이용하면 인접한 면 및 절점을 찾을 수 있다. 새로운 요소에지가 추가되거나, 기존의 것이

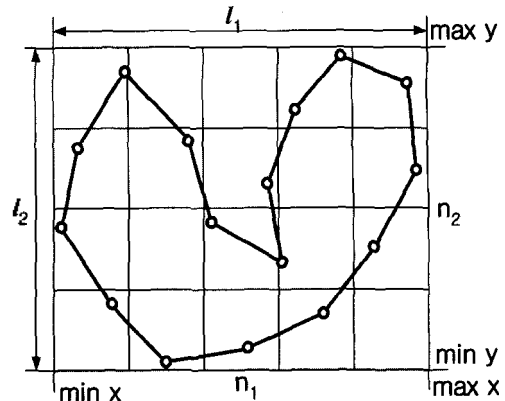


Fig. 9. A grid generation in 2D.

제거될때는 각 그리드를 업데이트하는 것이 필요하다. 이 작업은 절점의 좌표값 자체가 그리드 위치가 되므로 별도의 찾기(searching) 작업 없이 인접한 요소면 및 에지를 찾을 수 있다.

2.4 교차 및 거리 체크

교차 및 거리 체크는 요소망 생성의 품질 및 성공 여부와 관련되므로 매우 중요한 작업이다. 특히 너무 가까운 거리에서 새로운 요소에지 및 면이 생성되면 요소의 품질이 나빠지게 되며 또 다른 오퍼레이터를 적용시키기 힘들게 된다.

이를 위해서 다음의 직선 및 평면식을 이용한다.

$$\text{직선식: } \frac{x-x_1}{u} = \frac{y-y_1}{v} = \frac{z-z_1}{w} = t \quad (2)$$

$$\text{평면식: } ax + by + cz = d \quad (3)$$

(에지와 면의 교차 체크)

에지를 직선으로 면을 무한평면으로 고려하여 직선과 평면의 교차점을 구한다. 식 (2)를 식 (3)에 대입하면 교차점에 해당하는 t 값이 계산되는데, t 값이 0과 1사이일 때 교차가능성이 있다. 이값의 범위를 벗어나면 Fig. 10에서 첫번째 그림처럼 에지가 평면 위 또는

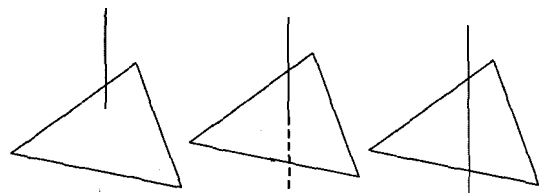


Fig. 10. An intersection check about face and edge.

아래에 있는 경우이다. 0과 1사이 있더라도 세번째 그림과 같이 면을 벗어날 수 있으며, 이런 경우 면적을 비교하여 교차하는자를 판단한다.

(절점과 면과의 거리체크)

삼각형 면을 식 (4)와 같이 표현할 수 있으며, 면 위의 점들만을 표현하기 위해서는 s, t 는 제한적인 값을 갖는다¹⁶⁾.

$$\Gamma(s, t) = B + s\bar{e}_0 + t\bar{e}_1 \tag{4}$$

여기서

$$s, t \in [0, 1], s + t \leq 1$$

$$B = V_0,$$

$$\bar{e}_0 = V_1 - V_0,$$

$$\bar{e}_1 = V_2 - V_0,$$

이다.

그래서 점 P 와 삼각형 면의 거리는 식 (5)의 최소값이다. 매개 변수 s, t 값이 위의 조건을 만족하면 Fig. 11에서 첫 번째와 같이 최소가 되는 위치가 삼각형 내부에 존재하고, 그렇지 않으면 경계에 존재한다.

$$D = \|\Gamma(s, t) - P\| \tag{5}$$

(에지와 에지와의 거리체크)

직선 두개를 구성하여 각 직선상의 임의의 점을 생성하여 최소 거리를 구한다. 이때 t_1, t_2 값이 0과 1 사이에 있을 경우 이 값이 최소거리가 된다.

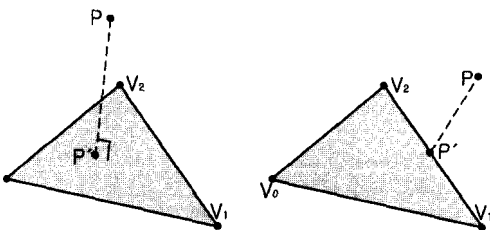


Fig. 11. Distance between a point and a triangle.

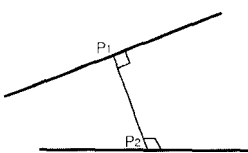


Fig. 12. Distance check between two edges.

$$\bar{P}_1 = \bar{x}_1 + \bar{u}_1 \times t_1$$

$$\bar{P}_2 = \bar{x}_2 + \bar{u}_2 \times t_2$$

3. 적용예

본 연구에서 개발한 알고리즘을 이용하여 여러가지 형상에 적용해 보았다. Fig. 13은 정육면체 모델에 사면체 요소망을 생성시킨 모습이며, Fig. 14~Fig. 16은 기계 구조물에 사면체 요소망을 생성시킨 모습이다. 그림에서 보는 바와 같이 비교적 많은 수의 요소들이 무리없이 생성된 것을 알 수 있다. Fig. 14(b)는 모델

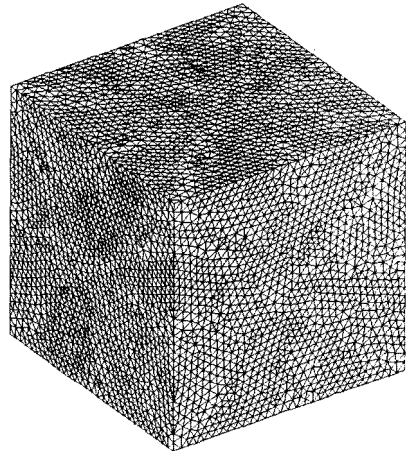
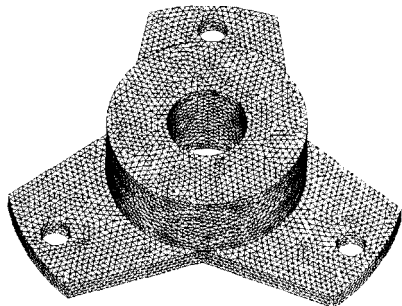
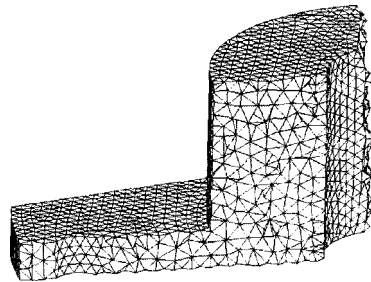


Fig. 13. A Cubic box model(92331 tetrahedral elements).

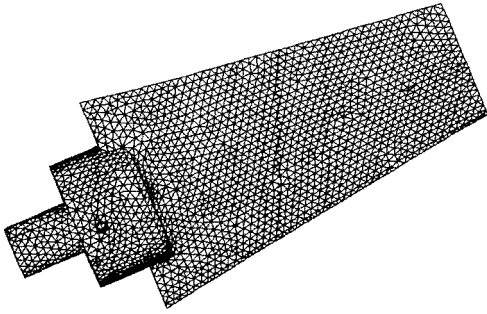


(a) Hidden view

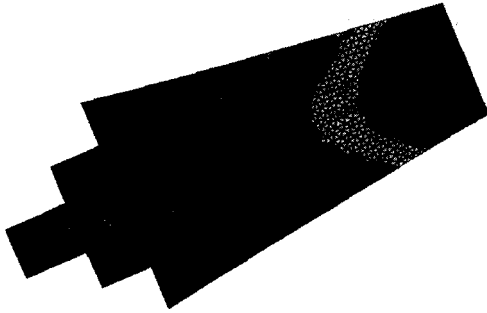


(b) A part of model

Fig. 14. An object with holes (58422 tetrahedral elements).



(a) Hidden view



(b) von Mises stress contour

Fig. 15. A turbine blade model (18010 tetrahedral elements).

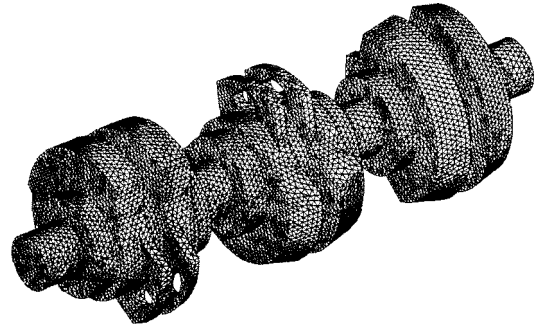


Fig. 16. A crank model (121558 tetrahedral elements).

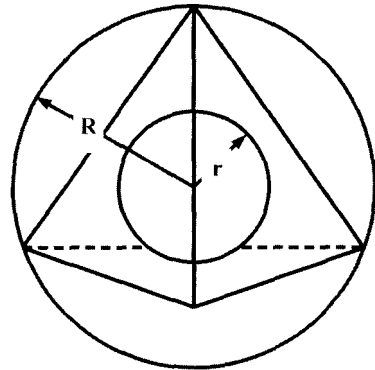


Fig. 17. r/R ratio.

Table 1. Mesh quality(r/R ratio) distributions

r/R ratio	A cubic box	A turbine blade	An object with holes	A crank
0.0~0.1	0	0	1	3
0.1~0.2	3	0	0	6
0.2~0.3	9	3	13	15
0.3~0.4	41	13	60	133
0.4~0.5	194	30	251	505
0.5~0.6	899	429	929	1613
0.6~0.7	3461	1740	3580	5924
0.7~0.8	11390	4302	10146	18274
0.8~0.9	30484	6577	21917	44071
0.9~1.0	45850	4800	21525	51014
Total no. of elem.	92331	18010	58422	121558

내부를 확인하기 위해 일부만을 표시한 것이다. Fig. 15(b)는 범용유한요소해석 프로그램 *Strad™*로 응력 해석을 수행한 후^[17], 결과를 나타낸 그림이다. 따라서 생성된 유한요소 모델은 해석에 적합하게 되어 있음을 알 수 있다. 그리고 Table 1은 생성된 사면체 요소망의 품질을 나타내고 있으며, 사용된 판단 기준은 반지름비(r/R ratio)이다. 반지름비는 식 (6)과 같이 표

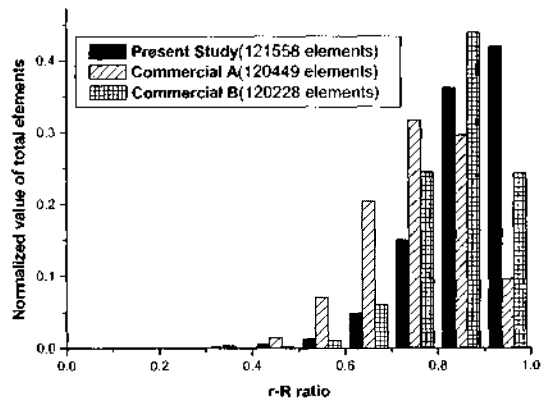


Fig. 18. Comparison of mesh quality with commercial products.

현되며, 사면체의 내접구와 외접구의 반지름 비를 나타내고, 이를 정규화하여 사용하였다.

$$r-R \text{ Ratio} = \frac{3r}{R} \quad (6)$$

Fig. 18은 크랭크 모델을 기존의 상용 요소망 생성 프로그램(Commercial A, B)으로 사면체 요소를 생성

Table 2. Mesh quality(r-R ratio)

r-R ratio	Present study (%)	A(%)	B(%)
0.7~1.0	93	70	92
0.8~1.0	78	39	68
0.9~1.0	42	9	24

시킨 결과와 본 논문의 방법을 사용한 결과를 비교한 것이다. X 축은 반지름 값을 나타내고, Y 축은 해당 값에 속하는 요소개수를 총 요소수로 나눈 값이다. Table 2는 각 범위에 해당되는 요소의 퍼센트를 나타낸다. Table 2에서 보는 바와 같이 본 논문에서 제안한 방법에 의하면 반지름비가 0.8이상의 값을 가지는 요소가 전체에서 78퍼센트이고, 상용 프로그램 A는 39퍼센트, 상용 프로그램 B는 68퍼센트로 나타났다. 따라서 본 연구에서 제안한 방법이 기존의 다른 프로그램에 비해 요소망의 품질이 더 우수한 것을 알 수 있다.

6. 결 론

본 논문에서는 전진경계법에 의해 사면체 요소망을 보다 안정적으로 생성시킬 수 있도록 기존의 연구를 수정 보완한 방법을 제안하였다. 이는 기존의 3차원 기본 오피레이터 외에 새롭게 추가된 3차원 오피레이터를 이용한 전진경계법을 사용하는 것으로 요소망 생성이 안정적이고 또 품질이 좋은 사면체 요소망을 생성할 수 있게 되었다. 또한 요소망 생성의 효율성을 높이기 위해 기존의 에지 및 면과의 교차 및 거리체크를 관심영역에 격자를 구성하여 사용함으로써 별도의 탐색없이 수행할 수 있게 하였다.

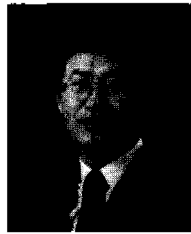
참고문헌

- Lohner, R. and Parikh, P., "Generation of Three-Dimensional Unstructured Grids by the Advancing-Front Method," *Int. J. for Numer. Methods in Fluids*, Vol. 8, pp. 1135-1149, 1988.
- Jin, H. and Tanner, R. I., "Generation of Unstructured Tetrahedral Meshes by Advancing Front Technique," *Int. J. Numer. Methods Engng.*, Vol. 36, pp. 1805-1823, 1993.
- Moller, P., "On Advancing Front Mesh Generation in Three Dimensions," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 38, pp. 3551-3519, 1995.
- Chan, C. T. and Anastasiou, K., "An Automatic Tetrahedral Mesh Generation Scheme by Advancing Front Method," *Commun. In Numer. Methods in Engng.*, Vol. 13, pp. 33-46, 1997.
- Chae, S. W. and Bathe, K. J., "On Automatic Mesh Construction and Mesh Refinement in Finite Element Analysis," *J. Computers & Structures*, Vol. 32, No. 3, pp. 911-936, 1989.
- Kim, Y. W., Kwon, G. W. and Chae, S. W., "Unstructured Tetrahedral Meshing by an Edge-Based Advancing Front Method," *KSME International Journal*, Vol.16, No.2, pp. 211-218, 2002.
- Borouchaki, H., George, P. L. and Lo, S. H., "Optimal Delaunay Point Inscrition," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 39, pp. 3407-3437, 1996.
- Weatherill, N. P. and Hassan, O., "Efficient Three-Dimensional Delaunay Triangulation with Automatic Point Creation and Imposed Boundary Conditions," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 37, pp. 2005-2039, 1994.
- 이준성, Genki Yagawa, 박변웅, "자유 곡면으로 구성되는 3차원 구조물에 대한 자동 요소 분할," 한국 CAD/CAM 학회 논문집, 제1권, 제1호, pp. 65-74, 1996.
- Shephard, M. S. and George, M. K., "Automatic Three-Dimensional Mesh Generation by the Finite Octree Technique," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 32, pp. 709-749, 1991.
- 정용호, 이건우, "삼차원 유한요소의 자동생성(2) - 사면체 옥트리로부터의 유한요소생성," *대한기계학회 논문집*, Vol. 19, No. 3, pp. 647-660, 1995.
- Fleischmann, P. and Selberherr, S., "Three-Dimensional Delaunay Mesh Generation using a Modified Advancing Front Approach," *The Proceedings of the 6th International Meshing Roundtable*, pp. 31-46, 1997.
- Frey, P. J., Brouchaki, H. and George, P. L., "3D Delaunay Mesh Generation Coupled with an Advancing-front Approach," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 115-132, 1998.
- Radovitzky, R. and Ortiz, M., "Tetrahedral Mesh Generation Based on Node Insertion in Crystal Lattice Arrangements and Advancing-Front-Delaunay Triangulation," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 187, pp. 543-569, 2000.
- 김영웅, 전성재, 채수원, "격자법과 전진경계법을 혼합한 사면체 요소망의 자동생성," 한국 CAD/CAM 학회 논문집, 제8권, 제1호, pp. 41-47, 2003.
- Schneider, P. J. and Eberly, D. H., "Geometric Tools for Computer Graphics," Morgan Kaufmann, USA, 2003.
- StraD v. 2.0 Manual, FeaSoft Co., 2003.



권 기 연

1999년 고려대학교 기계공학과 학사
2001년 고려대학교 기계공학과 석사
2001~현재 한국과학기술원 기계공학과
박사과정
관심분야: Mesh generation, Geometric
modeling, Computer graphics



채 수 원

1977년 서울공대 기계공학과 학사
1979년 한국과학기술원 기계공학과 석사
1988년 미국 MIT 기계공학과 박사
1979년~1991년 한국기계연구원 선임연
구원, CAD/CAM실 실장
1991년~1996년 홍익대학교 기계공학과
부교수
1996년~현재 고려대학교 기계공학과 교수
관심분야: 유한요소해석, Mesh Genera-
tion, 생체역학, 충돌해석



이 병 채

1977년 서울대학교 기계공학과 학사
1979년 한국과학기술원 기계공학과 석사
1984년 한국과학기술원 기계공학과 박사
1984~1988년 한국과학기술연구원 선임
연구원
1988~현재 한국과학기술원 기계공학과
교수
관심분야: 유한요소개발, 최적설계 및 신
뢰성 해석, 내구성해석