大韓數學教育學會誌 數學教育學研究 第 14 卷 第 3 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIV, No.3, 221-237. Aug 2004

RME 기반 수학 교실에서의 개념적 모델의 사회적 변환: 미분방정식에 대한 개념적 은유 사용 패턴 분석.[1)]

주 미 경* · 권 오 남**

본 연구는 개념적 은유의 분석을 통해 RME 기반 대학 미분방정식 수업에 참여한 학생들의 개념적 모델의 변환을 탐구하였다. 분석 결과 학기초 이산적이고 양적인 개념적 모델이 학생들의 수학적 토의 맥락에서 지배적이었으나 맥락문제탐구에 기반한 수학적 의미의 재조정 과정을 통해 연속적이고 질적인 사고를 반영하는 개념적 모델이 발생하여 기존의 개념적 모델이 확장됨이 밝혀졌다. 이와 같은 개념적 모델의 변환은 본 프로젝트 교실 참여가 학생들의 미분방정식에 대한 문제해결적 사고의 유연성을 증대시키는데 기여하였음을 보여준다. 이와 같은 분석 결과에 기초하여, 본 논문은 학생들의 개념적 모델의 변환을 촉발한 교수학적 요소에 대한 논의를 통해 학생들의 개념적 모델 변환이 가지는 사회문화적 의미를 조명하고 RME 기반 수학 수업 모델의 학교 현장 적용에 유용한 시사점을 제공하였다.

I. 서 론

본 논문에서는 RME 기반 대학 미분방정식 수업에 참여한 학생들이 맥락문제를 탐구하는 과정에서 미분방정식에 관한 개념적 모델이 학기를 통해 변환해가는 과정을 분석·묘사하고 그러한 변환이 가지는 사회문화적 의미와 RME 기반 수업 모델의 효율적 운영을 위한 시사점에 대해 논의하였다. 이를 위해 본 연구의 발화분석은 학생들이 사용한 개념적 은유를 분석단위로 하여 다음과 같은 질문에 초점을 두고 이루어졌다. 첫째, 학생들의 미분방정식에 관한 개념적 은유의 사용 패턴은 수업 참여를 통해 어떻게 변화해가는가?

둘째, 이와 같은 개념적 은유 사용의 패턴 변화를 촉발하는 RME 기반 수업 모델의 교수학적 요소는 무엇인가?

세째, 이들 교수학적 요소가 보여주는 수학 교수-학습의 사회문화적 의미는 무엇인가? 이와 같은 본 연구의 논의는 학습을 관행공동체로의 주변적이고 합법적인 참여를 통한 사회적 변환의 과정으로 설명하는 사회적 관행 이론에 기초한다.

II. 사회적 관행 이론(Social Practice Theory)

"사회적 관행 이론(Social Practice Theory)"은 전통적 사회 이론의 구조주의적이고 결정론적

---

* 이화여자대학교, mkju11@yahoo.co.kr
** 서울대학교, onkwon@snu.ac.kr
1) 이 연구는 2003학년도 이화여자대학교 교내연구비 지원에 의한 연구임.

인 시각, 그리고 이분법적 관점을 극복하고 "객관적 지식을 통해 접근할 수 있는 객관적 구조와 그 객관적 구조가 현실화되고 재생산되는 구조화된 성향 사이의 변증법적 관계를 규명하는 과학" (Bourdieu, 1977, p. 3)으로서 사회 이론을 구성하는 것을 목표로 출발했다. 사회적 관행 이론에서 사회는 하나의 구조화된 체제로서 개인의 행동을 제재하는 힘을 행사한다. 그러나, 개인을 사회의 축소판으로 보던 전통적 사회 이론의 결정론적인 시각에서 탈피하여 사회적 관행 이론은 사회와 개인 사이의 관계를 변증법적 관점에서 설명한다. 즉, 사회적 관행 이론의 관점에서 사회 체제는 개인의 행동을 근원적으로 조건화하지만, 개인은 단순히 기준의 사회 체제를 있는 그대로 답습하는 것이 아니라고 보는 것이다. 사회의 문화적 구조를 반영하는 공동체의 일상적 관행에 참여하는 과정 속에서 기존의 사회 체제가 개인의 행동을 조율하는 반면 개인 역시 능동적으로 자신의 목적과 관점에 비추어 사회 체제를 재해석하고 재조정해 간다.

사회적 관행 이론이 제시하는 변증법적 관점은 구조주의적이고 결정론적인 이전의 사회 이론이 제시해온 개인과 사회, 나아가 주관과 객관 사이의 고착된 위계 관계를 반박하고 그들이 통합된 하나의 전체를 구성한다고 설명한다. 특히 인간의 정신세계를 물질적 경험 세계와 분리시켜온 전통적인 이분법적 관점에 반박하여 개인의 정신세계가 공동체의 문화를 함축하는 일상적 경험의 산물임을 설명함으로써 일상적 관행으로의 참여가 사회 성원을 공동체의 문화를 전수한 문화적 존재로 태어나는 과정을 중재하는 매개체의 역할을 수행함을 보여주었다. 사회적 관행 이론에 의해 부각된 사회와 개인 사이의 변증법적 관계는 사회 이론의 범주를 넘어 다양한 학문 분야, 특히 교육학의 이론적 관점에도 중요한 변화를 유발하였다. 교육학의 본질적 논제인 "교육"이 보편적인 인류의 과제이며 본질적으로 사회적 대업이라는 점을 감안한다면 사회이론에서의 이론적 변화가 교육에 관한 이론적 관점의 변화로 이어지는 것은 자연스러운 논리적 귀결이라고 할 수 있을 것이다. 그렇다면 사회적 관행 이론은 교육 이론을 어떻게 변화시켰는가? 그 변화는 사회적 관행 이론이 설명하고자 하는 핵심적인 개념에 해당하는 '사회적 변환(Social Transformation)'과 밀접한 관련을 갖는다.

사회적 관행 이론의 주요 과제는 '사회'와 그 공동체의 일상적 관행에 참여하는 '개인' 사이에 진행되는 역동적인 변증법적 재형성 과정, 달리 말하면, 사회와 개인, 양자의 '사회적 변환 과정'을 설명하는 것이다. 사회적 관행 이론에서 '관행' 이란 인간의 모든 행동을 의미한다(Ortner, 1984). 인간의 행동, 또는 관행은 개인의 의도와 흥미를 반영한다. 개인의 관행을 주도하는 의도와 흥미는 개인의 구성물이기도 하지만 그가 속한 공동체의 문화와 어떤 방식으로든 연결되어 있다. 즉, '관행'이란 구체적인 시간과 공간 속에서 인간이 행하는 것이지만, 사적이며 일회적이고 임의적인 것이 아니라, 그 '행함'의 주체가 소속된 공동체의 문화에 기반을 둔 체계적이며 사회적인 것이다. 따라서, 개인은 구체적인 시간과 공간 속에서 나름대로의 독특한 방식으로 관행에 참여하지만 그의 관행은 근본적으로 공동체의 문화와 역사 속에 맥락화되어 있다. 일상적 관행은 공동체의 체제를 조직하는 사회적 질서를 함축하며 개인은 일상적 관행에 참여함으로써 그 안에 내재한 공동체의 문화적 조직에 의해 형성되며 동시에 그 문화적 조직을 자신의 관행 속에 받

아들여 새로운 차원에서의 문화적 조직으로 재창출한다. 이와 같이 공동체의 일상적 관행으로의 참여를 통해 개인이 공동체의 문화적 조직에 의해 재형성되고 동시에 공동체의 문화적 조직이 개인의 관행 속에서 재조정되는 가는 사회적 변환과정을 공동체의 문화적 맥락과 연관지어 분석적으로 설명하는 것은 사회적 관행 이론에서의 주요한 과제이다.

전통적인 구조주의적 사회 이론에서 사회와 개인, 객관과 주관은 전자가 후자를 일방적으로 규정하는 상하관계 속에 위치한다. 이러한 위계적이고 이분법적인 관점을 반영하는 구조주의적 학습이론은 "무엇이 가치있는 지식인가?"라는 질문에 대한 구조주의의 인식론적 입장을 반영한다. 구조주의적 인식론에서는 모든 현상을 포괄적으로 함축 설명하는 추상적이고 보편적이며 초월적인 '이론'과 구체적이고 특수하며 한시적인 '실재' 양자가 엄격히 구분된다. '이론'은 사회적으로 공유된 객관적이고 불변의 지식 체제라는 점에서 구조주의의 이분법적 위계 구조의 상위를, '실재'는 개인에 의한 주관적이고 가변적인 경험의 집적체라는 점에서 그 위계 구조의 하위를 차지해왔다. 구조주의적 관점에서 '문화'는 사회 성원이 한 사회의 맥락 속에서 원활하게 기능하는데 필요한 '이론'의 체제로 정의되며 학습이란 사회에 의해 제시된 객관적 이론체제를 학습자가 수동적으로 받아들이는 재생산의 과정으로 이론화된다. 이러한 구조주의적 인식론은 절대주의적 수리철학과 결부되어 전통적 학교 수학의 인식론적 기반을 형성해왔다.

이러한 맥락에서 사회적 관행이론은 사회와 개인, 객관과 주관, 그리고 이론과 실재에 대한 이분법적 이론을 반박하고 그들 사이의 관계가 개인의 사회문화적 관행을 통해 변증법적으로 재조정되어가는 과정을 부각시킴으써 전통적인 수학교육이론을 확장할 수 있는 이론적 기반을 제공한다. 즉, 수학 교수-학습은 단순히 학습자가 수학적 사실을 수동적으로 받아들여 그와 관계된 문제 상황에 직면했을 때 내면화되어 있던 객관적인 수학적 원칙을 논리적으로 적용하여 문제를 해결할 수 있는 인지적 발달에 한정되지 않는다. 교사가 제시하는 수학적 지식은 수학 공동체가 공유한 지식이라는 점에서 객관적일 뿐이며, 그 자체로 문제해결의 도구가 되기보다는, 학습자가 세계를 바라보는 시각과 의미체계와의 변증법적 재조정을 통해 학습자가 세계 속에서 접하게 되는 문제 상황을 구조화하는데 기여하는 요인(structuring resource) 가운데 하나라고 할 수 있다 (Lave, 1988). 학습자는 문제 해결을 위해 수학적 지식에 의존하지만 수학적 지식만이 문제 해결 과정을 전적으로 결정하지는 않는다. 실제적 문제 해결 상황에서의 민족지학적 연구에 따르면 문제해결과정은 전인적 존재로서 학습자의 가치관과 세계관 등 광범위한 의미에서의 인지 작용과 관계하는 복잡한 과정이며 교과서적인 수학적 지식은 인지적 과정의 일부일 뿐이다. 학습자는 좁은 의미에서의 인지적 존재가 아닌 전인적 존재로서 문제상황을 대하며 자신의 가치관과 세계관을 통해 해석하고 그 해석에 적절한 형태로 수학적 지식을 적용한다. 그리고 반복되는 문제해결과정을 통해 사회문화적으로 공유된 수학적 체제를 재해석하고 나름대로 독특한, 그러나 자신이 소속된 공동체에 공유된 객관적 수학적 지식의 체계와 일관된 수학적 인지 체계를 재구성해간다.

따라서 사회적 관행 이론은 수학 교수-학습이 한 공동체의 사회 문화 역사적 산물로서 수학 교과를 매개로 한 "교사"와 "학생" 사이에 진행되는 의미의 교섭과정이며 그 매개체인 지식의 사회성, 문화성, 역사성으로 인해 필연적

으로 그 공동체의 문화와 역사 속에 맥락화되는 과정임을 시사한다. 다시 말하자면, 교수-학습이란 비록 그것이 그들 양자 사이의 현상으로 가시화된다하여도, 눈에 보이지는 않지만 그들을 둘러싸고 그들의 의식을 근원적으로 형성하는 문화 역사적 공동체로의 참여과정이다. 학습은 그 사회의 공동적 문화와 역사에 문외한인 초보자로서 학습자가 그 공동체가 문화 역사적으로 추구해온 관행 속에 참여하는 과정을 통해 그 공동체가 추구해온 합법적인 문화 역사적인 지식을 전수함으로써 주변적인 위치에서 그 공동체의 중추적인 위치로 옮겨가는 과정을 통해 학습자의 세계관이 공동체의 문화에 따라 재구성되고 궁극적으로 공동체의 문화를 생산하는 주역이 되어 가는 사회적 변환의 과정이다(Lave & Wenger, 1991; Wenger, 1998).

이상에서 논의한 바와 같이, 사회적 관행 이론에서 학습은 학습자가 한 공동체의 문화와 역사에 비추어 합법적인 관행에 참여함으로써 그의 인지적 형식과 의미와 함께 공동체의 문화적 형식과 의미가 그들 각각의 문화적 역사적 형식과 의미에 비추어 재형성되어 가는 사회적 변환의 과정이다. 이러한 견지에서 본 연구는 학교수학교실을 하나의 관행 공동체로 파악하고 교실에서의 수학 교수-학습 과정을 통해 진행되는 사회적 변환의 양상을 개념적 모델에 대한 탐구를 중심으로 묘사하고자 한다.

III. 연구방법론 및 자료 수집

1. 프로젝트교실: RME 기반 미분방정식 수업

미분방정식은 역사적으로 변화하는 현상을 수학적으로 탐구하고 설명하기 위한 언어로 발명되었다. 그러나 전통적인 미분방정식 수업은 수학적 현상의 탐구 능력의 배양보다는 특정 유형의 미분방정식에 대한 대수적 해를 구하는데 필요한 알고리즘의 지도와 반복적인 연습에 중점을 두고 이루어져왔다. 이와 같은 교육적 관행은 수학적 힘과 문제해결력의 배양과 같이 최근의 학교수학개혁이 지향하는 목적을 수행하는데 부적절함이 인식되어 왔다. 이러한 맥락에서, 본 수업개발연구는 미분방정식교육개혁이 제시하는 교수학적 원리와 RME 이론을 이론적 바탕으로 하여 미분방정식의 의미있는 지도에 기여할 수 있는 수업모델을 개발하는 것을 목적으로 하여 행해졌다.

1980년대 중반 시작된 미분방정식교육개혁운동은 미분방정식 지도에서 해석적 방법뿐만 아니라 수치적 방법, 그래프를 활동한 방법, 기하적 방법, 질적 방법 등의 다양한 수학적 방법을 지도하여 미분방정식을 결과로서의 해법이 아닌 해를 구성해가는 과정에서 경험하는 사고를 접하는 것의 중요성을 강조하였다. 이와 같은 지도방법은 궁극적으로 자연현상을 묘사하고 탐구·분석하는 언어로서 미분방정식을 접하는 기회를 제공하여 학습자의 수학적 모델링 능력을 배양하는 것에 초점을 둔 것이다. 이처럼 미분방정식교육개혁운동은 무의미한 알고리즘의 기계적인 학습에 한정되었던 전통적인 미분방정식 수업의 개선을 위해 많은 유용한 논의를 제공하였지만 시행과정을 통해 개선되어야 할 몇몇 한계점이 지적되고 있다. 첫째, 기존의 미분방정식개혁운동은 내용 중심의 변화를 추구해왔다. 학생들의 수학적 힘을 개발하는데 내용중심의 개혁은 불충분하다. 또한 그래프를 활용하는 방법과 수치적 방법을 지도의 초기 단계에 한정하는 것은 학생들의 탐구 활동, 나아가 수학적 아이디어를 재발명하는 과정에 참여할 수 있는 기회를 제한한다. 이와

같은 지도 상의 제한점으로 인해, 기존의 미분방정식 개혁운동은 학생들의 개념적 이해와 문제해결력에 있어서 의미있는 변화를 유도하지 못했다는 점이 지적되어 왔다 (Habre, 2000; Rassmussen, 2001).

이와 같은 반성에 기초하여, 본 미분방정식 수업개발연구는 RME 이론을 도입하여 맥락문제에 기초한 학습자의 능동적인 탐구와 지식 구성 경험을 강조함으로써 기존의 미분방정식 개혁운동을 보완하였다. 구체적으로, 본 수업개발연구에 핵심적인 RME이론의 교수학적 아이디어는 "점진적 수학화"를 통한 "안내된 재발명"이며 이들 교수학적 원리는 "맥락문제의 활용"과 "사회적 상호작용"에 기초한 "발생적 모델"을 통해 구현되었다.

"수학화"란 비수학적 대상을 수학, 또는 수학적으로 덜 발달된 대상을 보다 현저하게 수학적인 것으로 변환시키는 과정을 의미한다 (Freudenthal, 1993). Treffers(1991)는 "점진적 수학화"를 "수평적 수학화"와 "수직적 수학화"로 세분하여 설명한다. "수평적 수학화"란 실제적인 문제 상황에 내재한 수학적 관계를 추상화하여 유용한 수학적 도구와 연결함으로써 해결 가능한 문제로 변환하는 과정이다. "수평적 수학화"가 경험적 세계에서 기호적 세계로의 전이라면, "수직적 수학화"는 기호적 세계에서 진행되는 수학적 수준의 비약이다. 점진적 수학화는 구체적인 맥락 속에서의 활동이 의미있는 수학적 개념의 구성과정에 핵심적임을 지적한다. 즉, 의미있는 수학 교수-학습은 학생들에게 경험적으로 그리고 수학적으로 실제적인 맥락문제의 탐구를 통해 비형식적이고 구체적인 문제 해결 전략을 구성하는 것에서 출발해야함을 의미한다. 뿐만 아니라, 점진적 수학화와 연결지어 볼 때, 맥락 문제의 해결은 단순히 그 문제에 대한 해결 전략을 모색하는 것에 그치는 것이 아니라, 나아가 학생들에게 수학적 활동과 탐구의 기반을 제공함으로써 반복적인 수평적/수직적 수학화의 교대적 과정을 통해 의도된 수학적 개념이 점진적으로 발생되어 가는 과정, 안내된 재발견의 출발점이 되어야 한다 (Gravemeijer & Doo- rmann, 1999). 따라서 본 프로젝트 교실에서는 교사에 의해 사전에 고안된 맥락문제를 수록한 활동지가 학생들에게 제공되어 수학적 상호작용의 기반이 되었다. 또한 학생들의 탐구 활동은 단순히 주어진 문제의 답을 찾는 것에 그치지 않고 문제상황과 해법이 함축하고 있는 수학적 원리를 규명하는 것까지 확장되었다.

본 프로젝트 교실에서 발생적 모델은 사회적 상호작용에 기초한다. 본 프로젝트 교실에서는 일련의 미분 방정식 해법이 제시되고 그 해법을 연습하는 교사 주도적인 전통적 미분 방정식 수업 방식에서 탈피하여, 분석적 방법을 포함한 다양한 수학적 방법의 적용을 통해 학생들의 미분 방정식에 대한 개념적 이해를 지향하는 수업으로 구성되었다. 또한, 지도하고자 하는 미분 방정식 개념을 반영하는 맥락 문제가 연구팀에 의해 구성되어 학생들에게 제시되고, 학생들은 소집단 토론과 전체집단 토론을 통해 문제해결을 위한 탐구를 통해 문제를 해결하였다. 본 수업에서 교사는 학생들 자신의 수학적 활동과 토의를 통해 지도하고자 하는 수학적 아이디어가 재발견될 수 있도록 배려하는 역할을 담당했다. 학생들이 소집단 토론을 하는 동안 학생들 사이를 오가며 그들의 수학적 토의가 발전적일 수 있도록 돕고, 그러한 상호작용 과정을 통해 소집단 토의에 이어지는 전체 토론에서 학생들이 소집단 토론 결과 형성된 수학적 의미를 공유하는 과정에 참여하는

것을 촉진하는 역할을 했다. 이러한 사회적 상호작용은 문제상황과 해법에 함축되어 있는 수학적 의미를 탐구하고 수학적 토의를 통해 학생 개개인의 수학적 의미의 조정하고 공유된 수학적 의미를 확립해 나가는 것을 목표로 하였다.

2. 자료 수집 및 분석

본 연구프로젝트는 미분방정식교육개혁이 제시하는 교수학적 원리와 RME 이론을 근간으로 하여 구성된 실제 교실로부터 수집된 자료의 분석과 평가를 통해 미분방정식의 효율적인 지도방안에 대한 피드백을 구성하는 수업개발 연구로 진행되어 왔다. 본 수업개발연구프로젝트의 연구팀은 4명의 수학교육자로 이루어졌다. 책임 연구자가 개발한 맥락문제가 활동지로 구성되어 수업에 사용되었고 매차시 모든 연구원이 수업에 참여하여 관찰하고 자료를 수집하였다. 본 프로젝트 교실에는 19명의 학생의 참여하였다. 대부분의 학생들은 사범대학 수학교육과에 재학 중인 1학년 학생들이었고 미적분학과 집합론, 선형대수학을 비론한 기초수학을 이수하였다. 수업은 본 연구의 책임 연구자가 직접 담당하여 지도하였다. 학생들은 3 또는 4인이 한 조를 이루어 활동지 문제에 대해 토의하였다. 매차시 수업 관찰 후 필드 노트가 작성되었고 수업에 대한 반성과 토의가 이루어졌다. 모든 수업은 두 대의 캠코더를 통해 녹화되었다. 수업은 크게 전체토론과 소집단토론부분으로 나뉘는데 전체토론 상황에서 녹화는 학급전체를 대상으로 하며 소집단토론 상황에서 각각의 캠코더는 특정 소집단의 상호작용에 초점을 두었다. 학기초 한 차례 전체적으로 조를 재편성한 이후 조편성이 유지되었으므로 소집단 녹화 자료는 사례연구에 유용한 자료를 제공한다. 모든 수업 녹화는 발화 분석을 위해 전사되었다. 자료분석은 수업 관찰 후 작성된 필드 노트와 수업 녹화 전사본에 기초한 담화분석을 통해 이루어졌다. 앞서 논의한 사회적 관행 이론의 관점에서 볼 때, 수학은 한 관행 공동체의 문화와 역사를 반영하는 공동체적 관행의 산물이며, 학교 수학은 '학교'라는 독특한 관행 공동체의 역사적이고 문화적인 산물이다(D'Am- brosio, 1997). 이러한 관점에서, 본 논문은 프로젝트 교실이 하나의 언어 공동체를 형성한다는 언어인류학적 가정에 기초한다 (Duranti, 1997; Gump- erz & Levinson, 1996) 특히, 학생들이 자연스러운 수학적 의사소통의 맥락에서 사용한 개념적 은유다음과 같은 두 가지 견지에서 본 연구의 발화분석 단위로 채택되었다.

첫째, Lakoff와 Nunez (2000)가 보여주었듯이, 개념적 은유는 추상적인 수학적 개념의 근간을 이루고 있으며 동시에 언어적 표현으로 표출되므로 수학적 개념의 변화과정을 보여주는 지표의 역할을 할 수 있다.

둘째, 수학 교실에서의 발화분석 연구를 통해 개념적 은유가 수학적 관행에서 광범위하게 사용되는 대표적인 의사소통 패턴임이 밝혀졌다(English, 1997; Ju, 2001; Lakoff & Nunez, 2000; Pimm, 1987).

IV. 미분방정식에 관한 개념적 모델의 사회적 변환

본 프로젝트 교실에서의 참여적 관찰을 통해 학생들의 기계은유의 사용빈도는 학기를 통해 점진적으로 감소하는 반면 가상적 운동 은유의 사용 빈도는 점진적으로 증가하는 추세를 발견

할 수 있었다.[2] 특히, 학생들의 수학적 발화 속에서 기계은유와 가상적 운동 은유가 더불어 사용되는 양상을 분석한 결과, 학기 초기에 학생들은 과제의 성격과 무관하게 기계은유를 적용하려는 경향을 보이고 과제에 대한 토의 과정에서 그것의 결함이 지적되어도 가상적 운동 은유로 전환하는 데 상대적으로 긴 시간이 소요되는 반면, 학기가 진행됨에 따라 이들 두 개념적 은유 사이에서 전환하는 데 소요되는 시간이 점차 축소되는 경향을 보였다. 다음은 3차시 물고기 수를 예측하는 그래프를 구성하는 활동의 맥락에 나타난 학생들의 개념적 은유 사이의 전환을 보여주는 발화의 예이다:

> 아미: 우리 옛날에... 고등학교 때 피보나치 수열... 배웠었잖아요. 뭐 토끼 두 마리가 있는데 이게 그러니까 1년마다 새끼를 낳고 그 새끼가 1년 뒤에 다시 새끼를 낳고.. 그게 이거랑 좀 비슷하다고 생각을 했었거든요. 그래서 이렇게 막 적어놓구 식을 모르겠는데 수열. 찾아보고 그러니까 그 수열 자체를 찾아보니까 이거는 시간하고 관련이 있더라구요. 근데 그거는 토끼 한 마리..... 여기서는 10마리니까 10을 곱해주고 이런식으로...

위의 예에서 아미는 전체 학급 토의 상황에서 앞서의 소집단 토의를 통해 얻은 물고기 수의 변화에 대한 아이디어를 발표하고 있다. 아미는 인구를 나타내는 이산적 기호 모델로서 수열을 제시하면서 수학적 토의를 시작한다. 아미는 자신의 이산적 모델을 정당화하기 위해 토끼는 매해 한번씩 번식하는 상황을 가정하고 한 단계에서 전체 토끼수로부터 토끼수의 증가량을 얻어 다음 단계에서 토끼수를 구하는 방법을 소개하고 있다. 이와 같은 아미의 묘사 속에서 토끼수의 변화는 각 단위 시간 구간에 대해 일정한 계단형 그래프로 나타나는 이산적 현상으로 설명된다. 이처럼 미분방정식이 표상하고자하는 변화하는 현상을 이산적인 계단식 변화로 파악하는 양상은 학기를 통해 지속적으로 관찰되었다. 다음은 아미의 발표에 이어 물고기 수 변화의 연속적 양상을 지적하는 미란의 설명이다:

> 미란: (그래프를 그린 후 그래프를 가지고 설명한다) 처음에 시작하는 게 조금 시작해서 나갈 때는 처음을 기준으로 몇 년 뒤 얼만큼 이렇게 시간과 관련된 것처럼 보이는데, 처음에 여기서부터 시작했다면 다시 여기부터 같아지는 꼴이니까 그래서 만약에 시간은 상관없이 P로만 쓰여지지 않을까... 그냥 저 혼자 나중에는 그렇게 생각을 했거든요.

미란은 그래프를 이용하여 한 시점에서의 물고기수를 나타내는 점이 모종의 궤적을 따라 연속적으로 변화해 간다는 아이디어를 제시한다.

여기서 미란의 아이디어는 함수를 연속적으로 움직이는 점의 궤적으로 보는 가상적 운동 은유에 기반하고 있다. 가상적 운동 은유는 변화하는 현상을 연속적 관점에서 묘사하고 나아가 순간순간 변화량이 누적되어 전체를 구성한다는 역동적인 관점을 취함으로써 기계은유에 비해 미분방정식에 관한 개념적 사고에 보다 강력한 모델로 작용한다. 가상적 운동 은유에 기초한 수학적 토의는 이전의 수학적 토의 맥락 속에 공유되었던 기계은유에 입각한 개념적 모델에 대한 문제의식을 유발한다. 그러나, 상이한 개념적 은유의 적용을 통해 도입된 새로운 관점은 즉각적으로 받아들여지지 않으며 서로 다른 개념적 은유를 적용하는 학생들 사이의 반박이 이어진다:

---

2) '기계은유'와 '가상적 운동 은유'에 대한 논의는 주미경·권오남 (2003)에 나타나 있다.

아미: 그러면 앞에서 이미 낳았던 토끼들도 나중에는 같이 낳잖아요.
영서: 한 번만 낳아야 돼?
아미: 여기서 개체수가 많은 것부터 시작...
미란: 비율만 따지면..처음에는 이게 없다고 생각하면..나중에는

위의 대화에서 아미의 지적은 미란의 연속적 인구 증가 모델에 신세대만이 다음 세대의 번식에 참여한다고 가정하는 아미의 모델에 위배됨을 언급한다. 이에 이어지는 영서의 질문은 이산적 모델에 입각한 인구 증가 방식에 대한 학생들의 혼란을 보여준다. 이어 아미는 관점을 바꾸어 미란이 사용한 가상적 운동 은유의 관점에서 인구 증가를 이해하고자 시도하지만 진전이 없다. 미란은 아미의 사고를 촉진하려고 하지만 그의 설명은 체계성을 결여하고 있다. 학생들의 전체 학급 토의는 점차 혼동 속으로 실마리를 잃어가고 이 때 강의를 담당한 교사가 지속적인 토의를 촉진하기 위해 미란의 설명을 정리한다.

교사: 지금 미란이가 생각한 거 이거 아닌가요? 초기에 두 마리만 있었어요. 그러면 (그래프 위의 점을 지적하며) 여기서부터 시작하니까 시간에 관계있을 것 같다. 그러니까 초기에 몇 마리가 있었느냐에 따라 다르지 시간은 중요하지 않을 것 같다....

이와 같은 교사의 역할은 학생들이 인구 증가를 가상적 운동 은유의 관점에서 좀더 명확히 설명하는 것에 긍정적으로 작용했다:

진아: 그런 것 같다는 생각도 드는데요...그러니까 십마리, 이십마리, 삼십마리..이렇게 십마리가 먼저 시작했고, 삼십마리가 좀 늦게 시작했으면..어느 순간에 딱 마주칠 것 같아요.
교사: 왜 마주칠 것 같아요?
진아: 그러니까 늦게 시작하면...삼십마리가 10시에 시작했을 때, 십마리가 0시간에 번식을 계속하기 시작했어요. 그러면은 삼십마리가 딱 시작하는 경우에...열 마리가 그..그 상태로 올라가지 않았을 까 하는 생각이 있는데, 그건 그냥 제 가정을 또 하나 붙여놓은 거죠.
아미: 앞에서 우리가 그래프를 봤을 때 이렇게 되니까 그럴 수 있죠..만날 수 있죠...

위의 진아의 발표 내용에서 볼 수 있듯이, 교사의 참여는 학생들이 인구증가상황을 가상적 운동 은유와 연관지어 파악할 수 있는 계기를 제공하였다. 그러나, 진아가 "그건 그냥 제 가정을 또 하나 붙어놓은 거죠"라고 말하는 것에서 볼 수 있듯이, 가상적 운동 은유가 아직 안정된 개념적 모델의 일부로 정착되지 않았음을 볼 수 있다. 아미의 억양 역시 가상적 운동 은유의 논리적 구조를 파악은 했지만 인구증가를 설명하는 데 있어서의 적절성에 완벽한 동의하고 있지 않음을 시사한다.

위의 예는 물고기수의 증가에 대한 활동지 토의 시작 이후 대략 20분 동안 이루어진 학생들의 토의를 요약한 것이다. 토의 과정에서 기계은유와 가상적 운동 은유가 등장하고 두 개념적 은유가 제기하는 상이한 수학적 관점을 지닌 학생 사이의 상호작용은 논박과 혼동을 유발하지만 그러한 혼동의 인식은 인구증가에 대해 학생들이 지니고 있었던 암묵적 가정을 의식하고 토의할 수 있는 계기를 제공하였다. 즉, 본 프로젝트 수업에 참여한 학생들은 대부분 인구증가가 기하급수적 증가 모델을 따른다는 사실을 알고 있다. 그러나, 기하급수적 증가 모델이 함축하고 있는 연속적 변화에 대한 이해는 부족함이 위의 학생들의 토의를 통해 드러났고 교실에서의 상호작용은 학생들이 기존의 개념적 모델에 대해 암묵적으로 가정해온 타당성에 대한 의문과 조정의 기회를 제공하였

다. 위에 제시된 토의 결과 연속적 인구 변화 모델에 함축된 가상적 운동 은유의 측면에 대한 학생들의 인식이 형성되지만 그 인식은 공고화되지 않은 상태에서 전체 학급 토의가 일단락되고 그래프 계산기를 이용한 활동이 시작된다. 그래프 계산기가 제공하는 시각화는 가상적 운동 은유를 다시 한번 자연스럽게 유발시키며 1 시간의 활동과 토의를 통해 가상적 운동 은유는 공고화되고 수업의 마지막 전체 토론에서 학생들은 물고기 수의 예측을 가상적 운동 은유를 통해 일관성있게 설명할 수 있게 된다.

일반적으로 학기 초 학생들의 미분방정식에 관한 개념적 모델은 알고리즘적이고 이산적인 성격이 두드러짐을 볼 수 있다. 이러한 양상은 그들의 기계 은유 사용에서 부각된다. 이와 같은 학생들의 개념적 모델의 특징은 학기초 인터뷰나 비형식적 대화, 그리고 과제로 제출한 저널에서 볼 수 있듯이, 학생들은 대수적인 방법을 가장 수학적이라고 생각하는 경향으로 나타난다. 이러한 그들의 관점에서 묘사적이고 질적인 가상적 운동 은유는 기계 은유에 비해 덜 수학적인 개념적 은유로 평가된다. 이와 같은 수학에 대한 관점은 수업에서의 토의 상황에서 가상적 운동 은유가 보다 적절하고 효율적인 경우에도 기계 은유를 고수하려는 경향으로 나타난다. 그러나 학기를 통해 학생들은 다양한 관점을 가진 참여자들과의 상호작용을 통해 자신의 개념적 모델을 수정해가고 결과적으로 학기말에는 다양한 개념적 은유를 자유자재로 구사할 수 있는 능력을 갖추게 된다:

은주: x(t)는 c 곱하기 e의 -2t. c는 얼마야?
진아: 4
은주: 4. 만족. 여기서 v(t)는?
진아: (녹음 상태 때문에 잘 들리지 않지만 계산 결과 나온 v(t)의 식을 불러준다).
은주: 그래프로 그리면?
진아: 각각 그리고 3차원.
은주: 이거 t에다 x, 이렇게 놓고?
진아: 3차원도 해야 되는데 3차원은 복잡해.
은주: 아..나 3차원 생각 안나.
진아: 나도 못하겠어.
은주: (웃는다). 이거 그래프 이렇게 그려지죠? v(t)랑 x(t)는?
진아: 응. 그건 그냥 그려도 3차원 그래프를 못 그려.
은주: 시작.
진아: x가 시간이 갈수록 증가하고 y는 감소하잖아.
은주: (평형해가) attractor이면..
진아: 둘 다 이렇게 가고 있어.
은주: 응. 평행한 선 잡고. 이걸 지나는 원점의 그래프.

위의 예에서 진아와 은주는 연립미분방정식의 해의 그래프를 구하는 과제를 해결하고 있다. 해결을 위해 그들은 연립미분방정식의 해 x(t), v(t)의 대수적 표현을 구하고 상수 c를 정하기 주어진 연립미분방정식을 초기값을 대입하는 알고리즘으로 활용한다. 이 부분까지 그들의 수학적 발화는 기계은유에 기초한다. 이어지는 논의는 구해진 해를 3차원 공간에 표현하는 것이다. 과제를 시작하기 전에 3차원적 표상의 어려움을 토로한다. 그러나 각각의 함수가 어떻게 움직이는 지를 가상적 운동 은유를 적용하여 사고하고 그 움직임을 합성하여 3차원 그래프를 완성한다. 본 토의가 이루어진 수업은 연립미분방정식 학습의 초기 단계로 기계은유의 사용 빈도가 증가하는 양상을 보였는데 위의 예에서 볼 수 있듯이 대수적이고 이산적인 기계은유는 질적이고 연속적인 가상적 운동 은유의 적용에 바탕이 되고 있으며 가상적 운동 은유에 의한 개념적 사고를 공고화하는데 중요한 기저를 형성한다.

V. 개념적 모델 변환의 교수학적 변인

본 논문에 제시된 수학적 발화분석을 통해 논의되었듯이, 학생들의 미분방정식에 관한 개념적 모델은 기계은유와 가상적 운동 은유라는 질적으로 서로 다른 두 개념적 은유 속에 반영되는 이중적 구조를 가지고 있다. 이와 같은 개념적 모델의 이중적 구조는 미분방정식의 해에 관한 이중적 해석과 연관지어 생각할 수 있다. 예를 들어 미분방정식의 해는 그것이 주어진 미분방정식을 만족시키는 "대상"이면서 동시에 미분방정식에 의해 표현되는 현상 속에서의 변화를 표상하는 "함수"이기도 하다. 미분방정식의 해를 하나의 "대상"으로 파악하는 경우 해의 표상은 임의의 상수를 포함하는 단일한 대수적 수식으로 표현되는 반면, 미분방정식의 해를 변화에 대한 질적 표현을 함축하는 함수로 파악하면, 해는 무수히 많은 벡터로 구성된 해공간 속에서 파악된다. 이와 같은 미분방정식의 이중적인 측면은 미분방정식에 관한 문제를 해결하는 과정에 도입되는 수학적 표상에서의 이중성과도 결부되어 있다. 즉, 미분방정식의 해를 하나의 "대상"으로 보는 경우 문제해결의 표상은 대수적인 성격을 가지는 반면, 미분방정식의 해를 "함수"의 관점에서 파악한다면, 순간적인 변화를 표현하는 벡터로 구성된 해함수 공간의 기하적 표상을 통해 접근하게 된다.

이와 같은 미분방정식 개념이 가지는 이중적 구조가 초래하는 학습 상의 어려움은 선행연구를 통해 밝혀진바 있다(Habre, 2000; Rasmussen, 2001). Habre(2000)은 미분방정식 수업에 참여하는 학생들이 문제해결에서 해석적이고 기호적인 전략을 수학적으로 강력한 방법으로 인식하고 선호함으로써 그 전략이 적절하지 않은 문제 상황에도 그 전략을 고수하고 결과적으로 문제해결에 실패하는 사례를 보여주었다. 또한, Rasmussen (2001)은 학생들의 미분방정식 개념에 대한 발화 분석을 통해, 미분방정식의 해를 대수적 관점에서 파악하는 학생들의 개념적 모델이 결과적으로 함수적 사고 방식을 적용해야 하는 맥락에서 인지적 장애로 작용하는 것을 지적하였다. 본 연구의 교실 관찰과 개념적 은유의 사용 패턴을 중심으로 진행된 발화분석 결과에 기초하여 볼 때, 본 미분방정식수업에 참여한 학생들 역시미분방정식의 해에 대해 이중적 관점을 가지고 있음이 밝혀졌다. 그리고 개념적 이중성이 학습 과정에서 장애로 작용한다는 선행 연구의 결과에 부합하는 상황이 본 연구의 교실 상황에서도 관찰되었다. 그러나 본 연구의 분석은 미분방정식 개념의 이중적 구조가 초래하는 인지적 곤란 그 자체 보다는 경험적·수학적으로 실제적인 맥락문제에 기반한 수업에 참여하는 과정을 통해 개념적 모델의 이중적 구조가 변화해 가는 양상에 중점을 두고 있다.

위의 자료분석에서 살펴보았듯이, 학기를 통해 기계은유를 선호하는 학생들의 성향은 연속적으로 변화하는 상황에 대한 맥락문제를 중심으로 이루어지는 사회적 상호작용을 통해 공유되기 시작한 가상적 운동 은유 사용의 점진적 증가를 통해 조정되어갔다. 이는 가상적 운동 은유 사용 빈도의 증가는 가상적 운동 은유가 기계 은유를 대체한 것이 아니라 각각의 수학적 특성을 상호보완해가는 과정으로 파악되어야 함을 시사한다. 구체적으로, 기계은유가 연속적으로 변화하는 현상을 탐구하는 수학적 도구로서 미분방정식에 대한 개념적 모델로는 미비한 부분이 있지만, 전체 현상을 분석이 용이한 이산적 단위로 축소하여 접근한다는 면에서

는 학생들의 수학적 사고에 대한 인지적 부담을 경감시켜주는 역할을 하였고 극한을 적용하는 사고 과정을 통해 해석적 사고 방식을 발생시키는데 중요한 역할을 하였다. 따라서 기계은유와 가상적 운동 은유는 각각이 가지고 있는 수학적 성질은 다르지만 문제해결 과정에서 상보적인 역할을 하며 이러한 관점에서 볼 때, 학생들은 학기를 통해 두 개념적 은유를 포괄하는 이중적인 개념적 모델을 구성하여 보다 다양한 문제에 효율적으로 대응할 수 있는 능력을 갖게 되었다. 그렇다면, 이와 같은 개념적 모델의 변환을 촉발한 교수학적 변인은 무엇인가? 본 연구의 발화분석을 통해 맥락문제, 학생들 사이의 상호작용, 테크놀로지, 그리고 교사의 중재자적 역할이 위에 논의된 개념적 모델의 재조정에 중요하게 관여하고 있음이 드러났다.

우선, 본 프로젝트 교실에서 제시된 맥락문제는 연속적으로 변화하는 양에 대한 사고를 유발하는 경험적·수학적으로 실제적인 상황에 기초한다. 예를 들면, 인구증가, 소금물의 농도, 착륙하는 비행기의 고도, 진동하는 진자, 흔들리는 초고층 건물 등이 수업에서 제시되었다. 위에서 제시된 인구증가 문제에 대한 학생들의 토의에서 볼 수 있듯이, 본 수업 상황에서 제시된 맥락문제들은 학생들이 양의 변화를 연속적 관점에서 해석하도록 촉진하는 상황을 제공한다. 즉, 앞서 제시한 토의 상황에 비추어 볼 때, 학생들은 인구증가가 기하급수적 증가 모델을 따른다는 사실을 알고 있지만 그 모델의 구성 과정에 함축되어 있는 연속적 증가에 대한 가정에 관해서는 진지하게 생각해 본 경험이 없는 것으로 볼 수 있다. 따라서, 토의과정에서 그들은 그들에게 경험적으로 실제적인 지식, 즉, 한 쌍의 토끼가 한 주기마다 번식을 한다는 지식에 근거하여 논의한다. 이와 같은 관점은 문제에서 제시하고 있는 수학적인 인구증가 상황과 갈등을 일으킨다. 이러한 마찰은 혼란을 야기하지만 그와 같은 혼란은 학생들로 하여금 그들의 수학적 관점을 검토하고 새로운 시각에서 문제를 바라보는 시도를 하게 하였다.

맥락문제가 그동안 학생들이 암묵적으로 가정해온 개념적 모델을 반성할 수 있는 상황을 제공한다면, 학생들 사이의 상호작용은 상이한 문제해석과 접근법의 제기를 통해 개념적 반성을 촉구한다. 위에서 아미와 미란을 중심으로 나타나는 인구증가의 설명방법은 수업에 참여하는 이들이 그들이 고수해온 관점과는 다른 방법으로 수학적 맥락을 바라보는 토의를 가능하게 하였다. 예를 들어, 진아와 아미는 기계모델에 기초한 이산적 관점에서 문제를 접근하였었다. 그러나, 가상적 운동 은유에 기초한 미란의 발표 이후 진아와 아미는 미란의 관점에서 문제를 재해석하는 것을 시도하였다. 물론, 이 시도는 즉각적으로 의미있는 관점의 변화를 유발하지는 않았지만 학생들이 자신의 수학적 관점을 새로운 관점과 비교하고 비판적으로 검토할 수 있는 기회를 제공했다는 점에서 개념적 모델의 재조정의 출발점이 되었다.

시각화 기능을 제공하는 테크놀로지는 학생들이 미분방정식이 표현하는 양의 변화가 연속적임을 인식하는데 중요한 역할을 한다. 본 프로젝트 교실에서는 자바애플렛을 비롯하여 시각화 기능을 가진 소프트웨어가 학생들의 활동에 제공되었다. 앞서 제시한 인구증가에 관한 맥락문제 토의에 이어 학생들에게 벡터장을 그릴 수 있는 소프트웨어를 제공하였다. 주어진 소프트웨어는 특정값에서의 변화량을 평면벡터로 표현해주는 기능을 가지고 있었다. 위에서 살펴보았던 인구증가에 관한 초기토의에서 학생들 사이에 기계은유에 기초한 설명과 가상적 운동 은유에 기초한 설명이 제시되었었다. 이

들 서로 다른 두 개념적 은유에 기초한 설명방식이 수렴되지 않은 상태에서 학생들은 이 소프트웨어를 이용하여 인구증가를 예측하는 활동지 문제에 대한 토의를 다시 시작하였다. 이 소프트웨어에서 벡터장에 나타나는 벡터의 길이는 단위시간 당 인구의 증가량을 표현한다. 학생들은 벡터장의 벡터를 조작하는 활동을 통해 이 소프트웨어의 개념적 구조에 익숙해진 뒤 이 소프트웨어를 이용하여 특정 초기값에 대한 근사해를 구성하는 활동을 하였다. 소프트웨어에 의해 시각화된 벡터의 조작 경험을 통해 학생들이 미분방정식의 해가 단위시간 당 증가량의 누적으로 표현될 수 있음을 인식하게 하고 이 과정에서 나타나는 학생들의 언어적 상호작용은 가상적 운동 은유에 기반하고 있음을 관찰할 수 있었다. 이러한 변화는 주어진 미분방정식을 연속적인 변화와 연관지어 보는 개념적 모델 형성의 전초라고 볼 수 있다.

마지막으로, 본 프로젝트 교실에서 학생들의 개념적 모델의 변화는 근본적으로 교사의 중재자적 역할과 연관되어 있다. 교사는 수업에 앞서 학생들에게 어떤 수학적인 관점을 제시할 것인지 고려한다. 본 프로젝트 교실은 전통적인 미분방정식 수업이 결과로서의 해법 지도에 주력함으로써 미분방정식에 의해 제시되는 역동적 변화과정을 표현하는 해공간에 대한 이해의 교육적 중요성을 간과하고 있다는 인식에 기초하고 있다. 나아가 미분방정식의 해공간에 대한 이해는 미분방정식을 변화율과 연관지어 파악하는 개념적 모델의 형성과 결부되어 있다는 이론적 가정 하에, 본 프로젝트 교실은 학생들이 미분방정식을 변화하는 상황과 관련지어 해석하고 변화의 연속성을 미분방정식 속에 함축된 변화율 개념과 결부지어 사고하는 능력의 개발을 일차적 교수 목표로 하였다. 이와 같은 교수 목표는 수학공동체의 역사적이고 문화적인 관행에 오랜 동안 참여해온 전문가로서 교사의 수학적 안목에 기초한다. 교사는 자신의 수학적 안목에 기초한 사고실험을 통해 학생들에게 경험적·수학적으로 실제적인 맥락을 선정하여 의도하는 개념적 사고를 유발할 수 있는 일련의 질문으로 구성한다. 맥락문제가 학생들 사이의 토의의 논제로 제공된 상황에서는 학생들의 수학적 토의 속에 나타나는 학생들의 개념적 모델의 특성을 파악하여 학생들의 개념적 모델과 교과가 제시하는 개념적 모델을 중재할 수 있는 방안을 즉각적으로 고안해서 학생들이 교사가 의도하는 개념적 모델에 보다 근접할 수 있도록 안내한다.

VI. 결 론

본 논문에서는 RME 기반 수학 수업에 참여한 학생들의 수학적 의사소통에서 관찰된 개념적 은유의 분석에 기초하여 학생들의 개념적 모델이 변화해 가는 양상을 탐구하고 학생들의 개념적 모델의 변화를 촉발하는 교수학적 변인에 대해 논의하였다. 끝으로, 이와 같은 분석 결과가 조명하는 수학 교수-학습 과정의 사회문화적 의미에 대해 논의하고자 한다. 이는 학생들이 본 RME 기반 수학 수업에서 경험한 개념적 모델의 변화가 가지는 사회문화적 의미에 대한 논의와 결부될 수 있을 것이다. 본 미분방정식 수업에 참여한 학생들이 경험하는 개념적 모델변환의 사회문화적 의미는 다양한 각도에서 설명될 수 있다. 우선, 학습자의 개념적 모델은 '수학교실'에서의 일상적인 수학적 관행에 참여하는 과정을 통해 그 공동체가 구성하고 공유하는 문화적인 개념적 모델에 따라 재조정되어 갔다. 이처럼 학생들의 개념적 모델의 변환이 '수학교실'이라는 관행 공동체의

수학적 관행에 참여하는 성원들 사이의 상호작용을 통해 구성되고 그들 사이에 공유된 수학문화에 기초한다는 면에서 사회적이라고 할 수 있다.

그러나 본 연구의 관점에서 제시하고자 하는 수학 교수-학습과정의 사회문화적 의미는 관행 공동체를 '교실'이라는 구체적인 물리적 공간 내에 존재하는 개인의 집합에 한정하여 해석하지 않는다. 즉, '공동체'란 단순히 특정한 시간과 공간 속에 존재하는 개인의 집합을 넘어서 하나의 역사와 문화를 공유한 이들 사이에 형성되는 결속 관계로 파악된다. 이러한 관점에서 본 미분방정식 수업에 참여한 학생들이 경험한 개념적 모델의 사회적 변환은 보다 넓은 맥락에서 해석되어야 한다. 이는 학습자들의 개념적 모델의 변환이 단지 닫힌 공간으로서 수학교실 공동체 안에 한정되는 것이 아니며 그 안에서의 일상적 관행이 맥락화되고 있는 보다 큰 수학 공동체의 맥락 속에서 사회적 변환의 의미를 설명할 필요가 있다는 것이다.

실제로 본 수학 수업의 맥락에서 학생들이 경험하는 사회적 변환은 그들이 구성한 수학문화에만 한정되는 것이 아니라 수학 교실을 둘러싼 많은 공동체와 그 공동체의 고유한 수학 문화의 영향을 받는다. 학기초 학생들이 기계은유를 통해 보여주었던 미분방정식에 관한 개념적 모델은 이전에 그들이 사회화되어온 공동체, 예를 들면, 중등학교의 수학교실에서의 수학적 관행에 참여하는 과정을 통해 그들이 발달시켜온 수학에 대한 개념적 모델을 반영한다고 할 수 있다. 본 미분방정식 수업에 참여한 학생들의 대부분은 수학을 수식과 같이 분명한 결과를 얻는 명백한 분석적 알고리즘을 다루는 학문으로 보는 경향이 있었다. 학생들은 "수학적"인 방법이 기호적이고 분석적인 방법이며 그래프적이고 질적인 접근법은 유용하나 수학적으로 미비한 대체물 정도로 평가하였다. 이러한 견해는 기계은유의 사용을 통해 드러나는 개념적 모델의 특성과 유사한 측면을 가지고 있다.

그러나, 미분방정식의 역사 속에서, 질적인 접근법의 중요성을 발견할 수 있다. 17세기 후반 천체 사이의 운동 관계를 탐구하는 과정에서 뉴턴이 미분방정식을 발명한 이래 미분방정식은 물리적 문제의 해결에 응용되기 시작되었다. 이 시기의 미분 방정식 연구는 분석적 해를 구하는 것이 초점을 두었고 해석적 방법은 18세기 중반에 미분방정식 연구의 주류를 이루었다(Kline, 1972). 18세기의 미분방정식 연구가 기호적 조작을 통해 해석적인 공식과 닫힌 형식의 일반해를 모색하는데 중점을 두었다면, 19세기 들어 미분방정식의 이론적 발달과 더불어 그 연구 관심이 해의 존재성에 대한 질문으로 옮겨가면서 미분방정식 연구는 새로운 국면으로 접어들게 된다. 또한, 이전의 해석적인 방법이 다룰 수 있는 문제의 범위에 한계가 있음이 인식되면서 18세기 뽀앙까레는 미분방정식을 질적으로 접근하는 방법을 고안했다. 그는 자신이 사용한 해에 대한 기호적 표현 없이 해의 움직임을 탐구하고 미분방정식을 기하적으로 해석하는 접근법을 질적 이론이라고 명명했다(Kline, 1972). 이처럼 질적인 방법은 수학사를 통해 살펴보았을 때 양적이고 해석적인 초기 미분방정식을 보강하여 이론적 발달을 촉진하는 역할을 한 수학적으로 중요한 방법론이다. 미분방정식의 역사는 양적 방법과 질적 방법 사이의 교대적인 발달과정이며 본 수업에서 학생들의 수학적 토의에 나타난 기계은유와 가상적 운동 은유는 각각 양적 방법과 질적 방법에 관련된 개념적 모델을 반영한다.

따라서 본 수업의 맥락에서 학생들이 경험하는 미분방정식에 관한 개념적 모델의 변환은

그들이 물리적으로 소속된 수학 교실이라는 한정된 공간을 넘어 교실에서의 수학적 관행이 맥락화되어 있는 보다 큰 수학 공동체의 문화와 역사 속에서 형성된다는 점과 연결지어 설명될 수 있다. 수업 맥락 속에서 진행되는 수학적 의미의 재조정은 수업에 참여하는 성원들 사이에서 진행되지만 이는 수학적 의미의 재조정이 단순히 그들의 관행에 한정되는 것이 아니며 교실 공동체를 둘러싼 보다 광범위한 수학 공동체의 역사적이고 문화적인 관행의 체계 속에 맥락화되어 있다. 학습자는 하나의 구체적이고 한정된 수학 교실에 참여하여 그 교실의 독특한 수학 문화를 접하고 발전시켜가지만 교실은 그 자체로 완결된 독자적인 개체가 아니라 직간접적으로 그 교실 공동체와 연결되어 있는 수많은 관행 공동체와의 유기적 관계 속에서 그의 독특한, 그러나 그것을 둘러싼 다른 관행 공동체의 역사적 문화적 조직과 유리되지 않은 역사와 문화를 구성해간다.

사회적 관행 이론의 관점에서, 수학 학습이 수학교실 공동체를 포괄하는 보다 큰 수학공동체의 수학적 관행 속에 맥락화되는 사회적 변환의 과정으로 재해석될 수 있다고 할 때, 수학 지도 상에서 유의해야할 점은 학습자 개인과 수학공동체 양자에 의해 제기되는 개념적 모델 사이에 관계이다. 이러한 관점에서 RME 이론이 제기하는 "안내된 재발견"은 학습자 개인의 개념적 모델이 수학공동체의 문화적인 개념적 모델에 비추어 재조정 되어가는 과정과 연관될 수 있다. 특히 RME 이론은 수학화 과정에서 학습자와 기성수학체계 사이의 상호작용의 중요성을 설명하기 위해 "경험적·수학적으로 실제적"이라는 표현을 도입한다. 이로써 RME 이론은 학습자에게 제공되는 수학적 활동이 수학공동체의 공유된 개념적 모델에 비추어 적법해야할 뿐만 아니라 학습자의 개념적 모델에 비추어 보았을 때 의미있어야 함을 보여준다.

개념적 모델의 변환에서 학습자와 수학공동체 사이의 관계를 변증법적 관점에서 파악하는 것은 수학 교수-학습의 이해에 중요한 의미를 갖는다. 만일, 학습자와 수학공동체의 개념적 모델 사이에 일방적인 상하관계를 가정한다면, "수학화"와 "안내된 재발견"은 교사에 의한 일방적인 유도를 의미하게 되고 교사는 과도한 권한을 부여받게 된다. 그러나 수학공동체의 문화적 대리인으로서 교사는 수학공동체와 학습자를 중재하는 역할을 수행한다. 수학이 인류라는 거대한 학습자의 학습과정이라면 수학교사는 수학공동체의 문화적 지식을 소개하여 새로운 수학공동체의 미래를 열 수 있는 학습자의 역량을 배양함으로써 수학공동체의 오늘과 미래를 중재하는 중재자로서 권위를 행사하는 것이다. 이처럼 '수학 공동체 문화의 재생산'과 '미래의 수학공동체 문화 창출'은 수학 교수-학습 과정의 이중성과 연관되며 RME 기반 수학 교실에서 교사가 직면하는 딜레마이기도 하다. 교사는 수학 공동체의 문화적 앎의 방식을 전수하면서 동시에 지도 과정에서 제기되는 다양한 수학적 관점들을 중재함으로써 학습자의 사고를 열어 수학 공동체의 역사적이고 문화적인 관행의 공간 속에서 자유로운 상상력을 구사하면서 새로운 수학적 관행의 영역을 열어가게 하는 이중적 역할을 담당해야 하는 것이다.

이처럼 난해한 수학교사의 역할을 수행함에 있어서 '수학'이라는 지식체계가 가지고 있는 열린 사회적 속성에 대한 이해는 중요하다. 수학이 수학 공동체의 문화적 역사적 산물이라는 사실은 수학이 닫힌 지식 체계가 아니라 수학공동체의 문화적이고 역사적인 관행 속에 맥락화되어 진화해가는 열린 지식체계임을 의미

한다. 따라서 수학 교수-학습 과정은 학습자가 수학공동체의 개념적 모델을 접하면서 관점의 전환을 경험하고 나아가 수학공동체의 역사적이고 문화적인 규범 체계에 비추어 문화적이고 역사적인 존재로 변환해가는 과정이다. 수학 교수-학습이 사회문화적 과정이라고 할 때, 성공적인 학습, 학습곤란, 부진아, 수학적 발달 등과 같은 언어는 수학공동체의 사회문화적 틀을 반영하는 규범적 언어이다. 예를 들어, "경험적으로 수학적으로 실제적"이라는 표현은 학습자 개인과 수학공동체 사이의 관계, 나아가 "무엇이 수학적인가"에 대한 암묵적인 규범적 가정에 기초한다. 수학공동체가 교실에서의 수학 교수-학습 과정과 가지는 밀접한 관계를 염두에 두지 않는 규범적 언어의 암묵적 사용은 수학교실의 성원들 사이에 진행되는 상호작용의 복잡성을 포착하는데 난점을 제기한다. 이러한 맥락에서 사회적 관행 이론은 수학 교수-학습 과정이 수학공동체의 역사적이고 문화적 맥락 속에서 형성되는 과정을 분석함으로써 수학 교수-학습을 보다 넓은 맥락에서 이해할 수 있는 이론을 제공하고 나아가 수학교과지도에 유용한 이론적 지침을 제공할 수 있을 것이라고 본다.

참고문헌

주미경 · 권오남(2003). 학생들의 미분방정식 개념에 대한 수학적 은유의 분석: 개념적 모델의 이중성에 대한 사회문화적 관점. **학교수학**, 5(1), 135-149.

Bourdieu, P. (1977). *Outline of a theory of practice* (Translated by R. Nice). Cambridge: Cambridge University Press.

D'Ambrosio, U. (1997). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. In A. B. Powell & M. Frankenstein (Eds.), *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in Mathematics Education.* Albany, NY: SUNY Press.

Duranti, A. (1997). *Linguistic anthropology.* New York, NY:Cambridge University Press.

English, L. (1997). *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images.* mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Association.

Freudenthal, H. (1993). Thoughts on teaching mechanics: Didactical phenomonology of the concept of force. *Educational Studies in Mathematics, 25,* 71-87.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39,* 111-129.

Gumperz, J. J., & Levinson, S. C. (Eds.).(1996). *Rethinking linguistic relativity.* New York: Cambridge University Press.

Habre, S. (2000). Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(4), 455-472.

Ju, M. -K. (2001). *Being a mathematician: an ethnographic account of the cultural production of a mathematician at a university.* Unpublished Doctoral Dissertation: University of California, Davis.

Kline, M. (1972). Ordinary differential equations in the eighteenth century. In *Mathematical Thought from Ancient of Modern Times* (pp.400-435). New York:

Oxford University Press.

Lakoff, G., & Nunez, R. (2000). *Where mathematics comes from.* New York: Basic Books.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: mind, mathematics, and culture in everyday life.* Cambridge, England: Cambridge University Press.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation.* Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Ortner, S. (1984). Theory in anthropology since the sixties. *comparative studies in society and history: An international quarterly, 26*(1), 126-165.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically.* New York: Routledge and Kegan.

Rassmussen, C. (2001). New direction in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 55-87.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In L. Streefland (Ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School* (pp. 21-57). Utrecht: CD-β Press.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity.* New York: Cambridge University Press.

Social Transformation of Students' Conceptual Model in an RME-based Differential Equations Course: An Analysis of Students' Use of Conceptual Metaphor

Ju, Mi-Kyung (Ewha Womans Unviersity)
Kwon, Oh-Nam (Seoul National University)

This research analyzed mathematical discourse of the students in an RME-based differential equations course at a university in order to investigate the social transformation of the students' conceptual model of differential equations. The analysis focused on the change in the students' use of conceptual metaphor for differential equations and pedagogical factors promoting the change.

The analysis shows that discrete and quantitative conceptual model was prevalent in the beginning of the semester. However, continuous and qualitative conceptual model emerged through the negotiation of mathematical meaning based on the inquiry of context problems.

The participation in the project class has a positive impact on the extension of the students' conceptual model of differential equations and increases the fluency of the students' problem solving in differential equations. Moreover, this paper provides a discussion to identify the pedagogical factors involved with the transformation of the students' conceptual model. The discussion highlights the sociocultural aspect of teaching and learning of mathematics and provides implications to improve teaching of mathematics in school.

* **Key Words** : Social transformation(사회적 변환), RME-based mathematics class(RME 기반 수학 수업), Differential equations course(미분방정식수업), Conceptual metaphor (개념적 은유), Conceptual model(개념적 모델), Discourse analysis(담화분석)

논문접수 : 2004. 4. 22
심사완료 : 2004. 7. 19