大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 14 卷 第 3 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIV, No.3, 239-266. Aug 2004

인지심리학의 관점에서 수학적 오류의 분석가능성 탐색

김 부 미*

본 연구는 기존의 수학적 오류에 대한 연구들이 취했던 학생들의 현재 상태를 바탕으로 다양한 오류를 분석하는 방식이 아니라, 학생들의 문제해결과정에서 나타나는 수학적 오류를 인지심리학의 관점에서 분석가능한지를 탐색하는 것을 목적으로 한다. 이에, 본 연구는 Pauscal-Leone의 신피아제 이론을 중심으로 Schoenfeld의 구조 분석 단계(levels of analysis and structure)모형과 개념적, 인과적 관계의 이해를 형식화하는 도구로서 퍼지 인지 맵(Fuzzy Cognitive Map)을 활용하여 학생들의 증명 문제해결 과정에서 나타나는 오류를 분석하고 오도(誤導) 요인을 진단하였다. 연구 결과, 주어진 명제에서 정보를 해석할 때 F조작자가 강하게 활성화되어 나타나는 오도 요인으로 인하여 학생들은 증명에 필요한 개념노드를 충분하게 인출하지 못하거나 인과관계가 없는 개념노드를 나름대로 논리적으로 연결하여 잘못된 증명을 하고 있었다. 오류와 관련된 인지구조는 학생 나름대로의 논리적 알고리듬에 의한 LC 학습의 결과로 형성된 LC 학습구조로 볼 수 있다.

I. 서 론

인간이 오류를 범하는 불완전한 존재라는 것은 곧 인간이 개선될 수 있다는 가능성을 함의한다. 교육은 바로 이러한 인간의 불완전성과 개선 가능성을 전제로 이루어진 활동이라는 점에서 학생의 오류는 교육적으로 의미를 가진다. 의미 있는 가르침이란 학습자가 현재 위치한 그 수준까지 내려와 그의 안목을 함께 가지는 일에서부터 시작된다(Kierkegaard, 1859/1980).

학습자의 안목을 함께 가진다는 것은 그의 인지구조를 이해하는 것이며, 이는 학생의 인지구조 및 사고의 오류, 그리고 조절 작용에 저항하기 위해 사용하는 방어 기제 등을 식별하도록 노력해야 함을 말한다(Piaget, 1977; Posner et al., 1982).

학습자가 스스로 수학을 구성해 나간다는 구성주의 인식론의 등장으로, 인식주체의 능동적 깨달음을 강조하는 것은 인지발달심리학과 학습이론에 많은 변화를 가져왔으며, 정보처리 이론의 발달과 함께 교수-학습이론에서 환경과 상호작용하는 학습자의 지식구조의 역할을 중시하게 되었다. 교수-학습에서 학습자의 지식구조에 대한 관심은 1980년대 이후 학생이 학습해야 할 내용과 관련하여 어떤 개념을 지니고 있는지, 구체적으로 오류의 연구로 모아져 지속적으로 수행되고 있다. Tall과 Vinner(1981),

* 이화여자대학교 대학원, bumi71@ewha.ac.kr.

Artigue와 Viennot(1987), Clements와 Del Campo (1987), Herscovics(1989) 등의 연구에서처럼 학생이 지니고 있는 오개념의 파악으로부터 시작된 오류에 관한 연구는 Cornu(1991), Borasi (1996), 박선화(2000), 이종희와 김부미(2004) 등의 연구와 같이 오개념의 특성 이해, 오류 양상과 개념 변화 과정의 이해, 이를 해소할 수 있는 수업 모형의 개발 등으로 폭과 깊이를 더해가고 있다.

학생들의 오개념(misconception)은 단순히 학생들이 지닌 잘못된 개념이 아니라, 연구자들의 입장과 견해에 따라서 대안적 개념(alternative conception), 소박한 개념(naive conception), 개념 이미지(concept image), 학생들의 개념(Students' conception), 인지적 장애(cognitive obstacle), 인식론적 장애(epistemological obstacle), 직관적 신념(intuitive belief) 등의 다양한 이름만큼 구성주의적 관점에서 보다 확장된 의미로 통용되고 있다. 이러한 수학적 오류는 다음과 같은 공통된 특징이 있다고 한다. 첫째, 수학적 오류는 학습자가 지식을 구성해 갈 때, 지각에 의존하거나 분화되지 않은 개념을 사용한다. 둘째, 상황에 따라 다르게 생각하며 단순히 인과적으로 생각하는 경향이 강하다. 셋째, 새로운 상황을 이해하려고 할 때, 능동적인 인식틀의 역할을 할 뿐 아니라 다른 작동 기제에 선행한다. 넷째, 사고방식 내에서 일관성을 갖고 나타나며, 쉽게 변화하지 않는 견고성을 갖고 있다.

이러한 연구들이 수학적 오류에 대한 이해의 폭을 넓혀준 것은 사실이나, 다양한 과제 상황에 따라 다양하게 나타나는 현상을 바탕으로 한 오류 연구 방식은 수학적 오류의 본질을 연구하는 데에는 어려움을 줄 수 있다. 즉, 다양한 오류가 나타나는 다양한 현상 속에서 통일된 핵심기제의 역할을 하는 오개념을 찾으려고 하거나 공통적인 오류의 원인을 분석하려고 하는 이러한 접근 방식은 다양한 과제상황과 그때마다 나타나는 오류의 다양성으로 인하여 수학적 오류의 본질을 밝히는데 어려움이 될 수 있다. 또한, 제시되는 과제 상황에 따라 수학적 지식보다 오개념이 우선적으로 지식구조 내에서 활성화되는 작동기제에 대한 설명은 지금까지의 연구 결과들에서 아직 충분하지 못하다.

이에, 본 연구에서는 학생들이 수학적 오류를 범하는 다양한 현상을 바탕으로 하여 그 속에서 오류를 설명하려는 종래의 연구방식이 아니라 Pauscal-Leone의 신피아제 이론을 토대로 인지심리학의 관점에서 수학적 오류를 학생들의 인지구조와 관련하여 설명하고자 한다. 특히 학생이 왜 그런 오류 반응을 보이는지를 세심하게 살피고 그 원인을 분석하여 학습에 재투입하려는 노력보다는 학생 개개인이 얼마나 많이 혹은 적게 틀리는 지를 가려 평가하는 경향이 강한 우리의 교육 현실을 고려할 때, 인지심리학의 관점에서 학생의 수학적 오류를 학습상의 현 위치와 인지구조를 드러내는 지표로서 분석해 보고자 하는 본 연구는 유의미하다고 할 수 있을 것이다. 본 연구의 '수학적 오류'는 수학적 오개념으로 인한 잘못된 수행뿐만 아니라 학생들이 자신의 인지구조 속에 옳은 개념을 갖고 있으나 문제해결과정에서 이를 잘못 인출하여 옳지 않은 수행을 보이는 것을 의미한다. 이 때, 수학적 오개념은 학생들이 가지고 있는 잘못된 수학 개념을 말한다.

수학 학습에서 학생의 인지구조를 나타낼 수 있는 수학적 오류는 학생 개인의 적극적인 내면적 재구성 과정을 통한 산물이기 때문에, 학생의 개념적 구성과정을 알기 위해서는 보다 심층적인 정보의 추출과정을 거쳐야 한다.

이를 위한 연구 방법으로는 단순한 선택형 혹은 설문지 형식의 방법보다는 개념도(concept map), 임상 면담법 등이 사용되며, 소규모의 표집 크기, 정보의 주관적 해석 등의 한계점들을 극복하기 위해 POE(예측-관찰-설명), IAI(사례면담), IAE(사건면담) 등의 다양한 질적 연구방법들은 물론, 계통도 분석, 퍼지 인지 맵(Fuzzy Cognitive Map) 등의 정보 분석 방법들이 개발·사용되고 있다(박종원 외, 2001; 송진웅 외 2003). 특히, 퍼지 이론을 활용한 개념도인 퍼지 인지 맵(FCM)은 최근 교육 분야에서 학습자들의 개념 변화에 대한 이해를 돕기 위한 방법으로 응용되고 있다(Cole & Persichitte, 2000). Cole과 Persichitte에 의하면, 퍼지 인지 맵은 퍼지 논리를 사용하여 학습자가 지식을 구성하는 과정 중 초보개념 또는 오개념으로부터 올바른 개념을 형성할 때 중간적 개념을 인정하고, 그 중간적 개념의 참 또는 거짓에의 근접성에 대한 주관적 판단까지 수용할 수 있으므로, 인식주체의 지식구조를 더 효율적으로 표상할 수 있다고 한다. 이에, 본 연구에서는 학생들이 문제해결과정에서 어떻게 자신들의 개념을 구성하고, 수학적 지식보다 자신들의 개념을 우선적으로 활성화시키는지를 분석하기 위해, 학생들의 개념 사이의 인과적 관계를 형식화하는 도구로서 퍼지 인지 맵을 활용할 것이다. 또한 본 연구는 인지심리학의 관점에서 학생들의 오류를 분석할 수 있는지 그 가능성을 모색하기 위해, 학생들의 인지구조와 관련하여 구체적인 문제해결과정을 분석한 Schoenfeld(1989)의 구조분석단계(levels of analysis and structure)모형도 활용할 것이다.

류성림(1998), 나귀수(1998), 서동엽(1999), 조완영(2000) 등의 연구 결과에 의하면, 증명문제해결과정은 많은 학생들이 스스로 수학적 명제를 추측하고 이를 수학적 증거와 논리를 기초로 하여 공리적 체계로 조직화해 가면서 나름대로의 지식을 구성해가면서 다양한 수학적 오류를 범한다고 한다. 따라서 학생들의 학습 주제와 관련하여 증명문제해결과정에서 범하는 수학적 오류를 인지심리학의 관점에서 학습자의 인지구조와 관련시켜 연구하는 것은 본 연구의 목적에 적합한 것으로 볼 수 있다. 이에, 본 연구에서는 대부분의 수학적 오류에 대한 연구들이 취했던 학생들의 현재 상태를 바탕으로 다양한 수학적 오류를 분석하는 방식이 아니라 학생들이 증명문제를 해결해 가는 과정에서 나타나는 오류를 학생의 인지구조와 관련하여 Pauscal-Leone의 신피아제 이론을 바탕으로 한 인지심리학적 관점에서 분석하고자 한다. 이 때, Schoenfeld(1989)의 구조분석단계(levels of analysis and structure)모형과 개념적, 인과적 관계의 이해를 형식화하는 도구로서 퍼지 인지 맵을 활용하여 학생들의 오류를 분석할 것이다.

또한 퍼지 인지 맵에 나타난 퍼지적 인과관계로부터 학생들의 오류를 도출하는 오도(誤導) 요인(misleading factor)[1]을 진단하려고 한다.

II. 이론적 배경

본 장에서는 인지심리학의 관점에서 오류의 특성과 작동기제를 설명하기 위하여 Pauscal-Leone의 신피아제 이론을 중심으로 살펴본다. 또한 옳은 개념을 가지고 있으면서도 구체적인 문제해결과정에서 오류를 저지르는 양상을 인지구조와 관련하여 분석하기 위한 해석의 틀로서 Schoenfeld의 구조 분석 단계 모형과 퍼지 인지 맵을 알아보고자 한다.

---

1) Pascaul-Leone(1970)은 문제해결의 과정을 잘못 이끄는 상황으로 학습자를 이끌어주는 요인을 오도(誤導) 요인(misleading factor)이라고 명명함.

1. 신피아제 이론

Piaget은 어떤 아동이 특정 발달 단계에 속한다고 주장하는 것은 동일 유형의 논리구조가 반영된 서로 다른 과제들에 직면해서 아동이 사용하는 인지구조에는 보편적 특성을 띠는 원형체계(prototypical system)가 존재함을 의미한다고 주장한다. 따라서 이러한 원형체계가 존재한다면, 그러한 과제들에 대한 아동의 성취는 비슷한 연령수준을 나타낼 것이고, 어떤 한 가지 과제의 성공적인 해결은 다른 과제의 성공을 예측가능하게 해 줄 것이다.

그러나 Piaget 이론은 정보처리 이론과 행동주의 심리학자들 등에 의한 많은 후속 연구들에 의해서 많은 비판을 받았다. Piaget 이론에는 인지발달이 일어나는 발달 단계간의 전이과정을 설명하는 기제가 불명료하고, 동일 유형의 논리구조를 지닌다고 판단되는 보존개념들이 각기 다른 연령에서 획득되는 심각한 이론적 모순이 존재하고 과제들 사이에 수평적 관련성이 거의 없으며, 어떤 한 가지 과제의 성공으로 다른 과제의 성공을 예측할 수 없다(김언주, 1989). 이와 같은 문제점을 정보처리 이론을 받아들여 Piaget의 인지발달 이론을 수정·보완하여 새로운 인지발달 이론이 나타나게 되었는데, Pascual-Lone과 Case 등으로 대표되는 이들의 이론을 신피아제 이론이라고 한다(김언주, 1989). 본 연구는 신피아제 이론 중 Pascual-Leone (1970, 1987)의 이론 체계를 바탕으로 이루어졌으며 이를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

학습자의 지식구조 속에서 하나의 정보 단위로 존재하는 스키마(schema)는 외부 환경에 대해 동화에 의해 한 상황으로부터 또 다른 상황으로 전이가 가능한 조직적이고 일관된 행동 유형을 일으킬 수 있는 신경세포들의 연결된 꾸러미이다(Pauscal-Leone, 1970). 특히, Pauscal-Leone은 이와 같은 스키마의 기능적 정의를 방출반응 s(releasing response)와 실행반응 r(effecting response)의 순서쌍이라는 구조적 정의로 변환하였다. 즉, 장기기억 속에서 지식구조를 이루는 심리적 기본 단위인 스키마는 s-r의 두 가지 성분으로 구성된다. 학습자의 환경적 상태와 직접 관련 있는 방출반응 s는 그에 대응하는 실행반응 r을 활성화시키므로, 실행반응의 활성화정도는 방출반응과 환경적 특징이 얼마나 잘 짝지어지느냐에 달려 있다.

Pascual-Leone(1970, 1987)에 의하면, 스키마들에 의해 이루어진 지식구조는 순환적인 특성을 지니고 있다. 즉, 상위 스키마는 s-r로 구성된 하위 스키마가 두 개 이상 결합된 것을 의미한다. 무의식적 조작자들에 의해 스키마들이 통합된 상위 스키마(superordinate schema)가 존재한다. 무의식적 조작자(Silent Operator, Hidden Operator)는 지식구조의 내용과 무관한 방식으로 다양한 상황에 적용되는 일련의 무의식적인 심리학적 조작자들을 의미하며, 하위 스키마의 활성화와 관련된다. 지식구조는 인지구조 내에서 지식을 처리하는 방식에 따라 3 종류의 상위 스키마들로 구별된다. 형상 스키마(figurative schema)는 방출반응 스키마들에 대한 상위 기능을 하는 상위 스키마이며, 조작 스키마(operative schema)는 실행반응 역할을 하는 상위 스키마이고, 실행 스키마(executive schema)는 과제 해결을 위해 형상 스키마들에 대응되어 조작 스키마가 활성화될 수 있도록 과제 해결의 전체 계획을 주도하는 역할을 하는 상위 스키마이다.

이러한 상위 스키마들이 사용되려면 자신의 지식구조 내에 저장되어 있는 관련된 하위 스키마들이 동시적/순차적으로 활성화되어야 한다.

지식구조 내에서의 계속된 순환적인 통합 과정에 의해 다시 상위 스키마들의 통합된 구조가 존재할 수 있으며, 이러한 상위 스키마들은 지식구조 내에서 하나의 조작적 구조(operational structure)가 된다. 이러한 상위 스키마의 예로는 아동의 지식구조 내에서 이러한 조작적 구조들의 존재 여부를 가려 인지발달의 준거로 삼았던 Piaget의 논리적 조작 구조(logical operational structure)를 들 수 있다. 이상의 과정을 도식화시켜보면 다음과 같다.

스키마(s, r 요소)→상위스키마(s-r 통합스키마)→ 논리조작적 구조

[그림 Ⅱ-1] Pascual-Leone(1970)의 지식구조 내 스키마 통합과정

정보처리는 무의식적 조작자들이 지식구조 내의 내용관련 스키마들을 활성화시켜 조작함으로써 일어난다(Pascual-Leone, 1987). 학습자가 처한 특정 과제 상황에 대해서 특정의 무의식적 조작자가 관여하게 되고 그 결과 특정의 수행이 이루어진다. 이 때 내용 관련 스키마가 활성화될 수 있는 정보의 양은 해당된 무의식적 조작자의 활성화 용량에 달려 있다. 따라서 특정한 내용 스키마의 활성화에 영향을 미치는 이들 조작자들의 용량의 양적인 차이에 의해서 문제해결에 대한 개인차가 나타나게 된다.

먼저, Pascaul-Leone(1970, 1987)은 Piaget의 과제들에 대한 요인분석 결과에 근거하여 논리조작적 구조들 간에는 더욱 공통적인 요인이 존재한다는 것을 밝혀내고 이들을 각 특성에 따라, M조작자, I조작자, F조작자, L조작자, C조작자라는 무의식적 조작자로 명명하였다. M조작자는 무의식적 조작자중에서 가장 중심적인 요소로 실행 스키마에 의해 작동되며 정보(스키마)의 변형과 통합을 책임진다. 즉, 인지구조 내에서 다른 스키마들에 의해 충분히 활성화되지 못한 과제해결에 필요한 스키마들을 활성화시킨다.

F조작자는 장(field) 혹은 형태 요인(figurative factor) 관련 조작자로서 과제의 가장 두드러진 형태적 입력 단서에 따라서 작동하므로 상황의 존적 성격을 띤다. F조작자는 M조작자, I조작자의 활성화 정도를 감소시키기 위한 것과 같은 정신적 노력을 최소화하기 위해 가장 간단한 행동이나 결과를 이끌어 낼 수 있는 스키마의 조합을 활성화시키는 경향을 지닌다. 이 때 활성화되는 스키마들은 특별한 정신적 노력 없이 방출반응 스키마와 그에 대응되는 실행반응 스키마가 거의 동시에 활성화된다. 이러한 특징으로 인해 문제해결과 관련이 없는 스키마들을 활성화시켜 문제해결에 어려움을 유발시키기도 한다. 예를 들어, Piaget의 물질 보존 과제에서 아동들은 두 가지 해결 방법[2] 중 점토공의 외형적인 형태를 바탕으로 문제를 해결하는 것이 F조작자와 관련된다. 따라서 F조작자는 과제해결과 관련 없는 스키마들을 활성화시키고 그 결과, 오히려 문제해결의 과정을 잘못 이끄는 오도 요인이 된다.

올바른 문제해결을 위해서 학습자는 F조작자에 의해 활성화된 오도적 스키마들을 차단시켜야 하는데, 이 역할은 실행 스키마에 의해 작동되는 I조작자가 담당한다. 즉, I조작자는 문제해결자의 장기기억에 활성화되어 있는 스키마 중 문제해결과 관련이 없는 스키마들의 활성을 억제하거나 차단하는 조작자이다. C조작자는 스키마의 ‘s-r’조건을 더욱 확장시켜 내용적인 분화를 일으키는데 관여하며, L조작자는

2) 첫째는 장 요인에 영향을 받아 점토공의 외형적인 형태로 문제를 해결하려고 하는 것과 둘째는 문제의 논리적/수학적인 면을 바탕으로 최초의 상태가 동일했다는 것을 고려하여 해결하려고 하는 것이다.

학습자의 지식구조를 형성하는 스키마간의 학습에 관련되어 있어 지식구조내의 개별적인 스키마들을 논리적으로 통합하여 더욱 상위의 논리구조를 형성하는데 관련된다.

이러한 무의식적 조작자가 관여하는 정보처리 과정은 스키마들이 통합되는 방식에 따라 LC 학습과 LM 학습으로 구분된다. LC 학습은 내용 스키마간의 논리적 통합이 정신적 노력(M조작자)이 없는 상태에서 동일한 상황에서 겪게 되는 반복된 연습에 이루어지며, 주로 자동화된 학습 특성을 나타낸다. 자동화된 학습 특성은 스키마를 이루는 성분 방출반응(s)에 의한 실행반응(r)을 활성화시키는데 특별한 정신용량(mental capacity)이 요구되지 않는 상황을 말한다. 지식구조내의 자동화된 LC 학습구조는 동일한 상황에 관계된 스키마들끼리 모여 장기간에 걸쳐서 하나의 청크(chunk)나 논리구조의 형성에 의해 나타난다. 이 때 형성된 청크나 논리구조는 상황의존적 특성을 갖고 있고 전체성(holistic)을 띠며, F조작자에 의해 활성화된다.

LM 학습은 논리적·수학적인 면을 근거로 올바른 문제해결 스키마를 활성화시키기 위해 내용 스키마간의 통합이 이루어지도록 선택된 스키마에 정신적 노력(M조작자)이 가해질 때 단시간에 걸쳐 일어나는 학습을 말한다. M조작자는 장기기억 내의 다른 스키마들과 연합되지 않고 단지 관련 스키마들을 활성화시키는 기능만을 지니고 있다. 따라서 LM 학습에 의해서 형성된 구조들은 상황에 독립적이며 분석적인 특징을 지닌다.

M조작자의 용량의 크기는 정신용량으로 나타낸다. 정신용량은 M조작자에 의해 아동이 단기기억(작업기억)에서 한번에 처리할 수 있는 독립된 스키마의 최대 개수를 의미한다. 정신용량은 구조적 정신용량(structural mental capacity)과 기능적 정신용량(functional mental capacity)으로 구분된다. 구조적 정신용량은 유기체적 요인에 의해서 생득적으로 나이에 따라 일정하게 증가하는 것으로 독립된 스키마의 동시 최대 처리용량과 관련된다. 기능적 정신용량은 실제 문제해결의 과정 중 단기기억에서 동시에 활성화시킬 수 있는 독립된 스키마의 최대 개수를 의미한다. 따라서 같은 나이이면 비슷한 구조적 정신용량을 가지나, 실제 문제해결 상황에 사용되는 기능적 정신용량은 개인에 따라 다르게 나타날 수 있다. 즉, 오도 요인이 포함된 과제의 해결과정에서 작동되는 M조작자의 용량이 개인에 따라 차이가 나므로, 주어진 과제의 오도 요인을 극복하고 그릇된 지각을 재구조화하는 개인의 능력은 다르게 나타난다 (Pascaul-Leone, 1987; 김언주, 1989).

이상에서 살펴본 Pascaul-Leone의 이론과 수학적 오류를 관련시켜 살펴보려고 한다. Tall과 Vinner(1981), Artigue와 Viennot(1987), Clements와 Del Campo(1987), Herscovics(1989), Cornu (1991), Borasi(1996) 등의 수학적 오류에 대한 많은 연구결과들을 분석해 보면, 수학적 오류는 아래와 같은 공통된 특성을 지니고 있다. 첫째, 반복학습의 결과 형성된 자발적 개념이거나 직관적 응답을 유도한다. 둘째, '~이면 ~이다'식의 자동화된 응답체계를 갖추고 있다. 셋째, 수업에 의한 개념 변화가 쉽지 않으며 지속적이고 견고하다. 넷째, 상황의존적이다. 이러한 수학적 오류의 공통 특성은 구체적 정신 조작을 하지 않고 친숙한 내용들 또는 자동화된 단순 조작을 요구하는 구조들로 문제를 분석하여 F조작자의 작동이 용이한 LC 학습과정의 결과로 형성된 LC 학습구조의 특성과 유사하다. 문제에 내포된 장(field) 효과에 의해 F조작자가 쉽게 작동되어 해당 과제와 관련된 자동화된 LC 학습구조를 활성화시킨다면, 학생들은 활성화된 LC 학습구조로 응답하게 되어

문제해결에서 실패하게 될 것이다. 결과적으로 문제해결에 사용된 자동화된 LC 구조는 수학적 오류와 연관될 수도 있을 것이다.

또한 문제해결자의 정신용량과 문제가 요구하는 정신용량과의 관계와도 관련된다. 즉, 오도 요인에 대한 학생 개개인의 반응 정도의 차이에 따라 문제해결의 결과가 다르게 나타날 것이다. 성공적인 문제 해결을 하는 학생들은 F조작자를 그다지 강하게 활성화하지 않고, 인지적 갈등 상황을 극복하고 문제를 재구조화하여 새로운 실행 스키마를 활성화시킬 수 있을 것이다. 활성화된 실행 스키마는 I조작자를 작동시켜 더 이상 LC 학습구조가 활성화되지 못하도록 하는 한편 M조작자를 작동시키게 된다. 학생은 M조작자에 의해서 성공적인 문제해결과 관련된 스키마를 활성화할 수 있다.

정리하면, Pascaul-Leone의 심리학적 기제는 수학적 오류의 특성과 관련하여, LC 학습구조는 수학적 오류의 발생과 유사한 구조이며, 장효과로 인한 F조작자의 우선적 작동과 LC 학습구조의 활성화는 다른 개념보다 수학적 오류나 오개념의 우선적 활성화와 관련될 수 있을 것이다. 그리고 학생들이 문제를 바르게 해결하기 위해서는 장효과에 의해 나타나는 F조작자의 작동을 억제하고 문제를 재구조화할 수 있어야 한다. 즉, 실행 스키마에 의해 I, M조작자가 작동되어 문제해결에 필요한 스키마들을 활성화시키면 문제가 성공적으로 해결될 것이다.

2. Schoenfeld의 구조 분석 단계 모형과 퍼지 인지 맵

학습자의 소박한 개념(naive conception)은 인지심리학의 영역 내에서 학습자의 개념화 과정에서 나타나는 한 형식으로 폭넓게 수용되고 있다. 그러나 종종 소박한 개념은 정확하지 않으며 암묵적 지식의 특성을 나타낸다. 암묵적 지식은 특수한 전이가 일어나거나 우연히 발생한 학습과 관련되며 직관에 의한 지각으로 발생되고 시간의 경과나 이차적인 과제와 관계없이 확고하게 남아있다(Cole & Persichitte, 2000). 이러한 소박한 개념을 진단하고 암묵적 지식을 학습자에게 유용하게 변화시킬 수 있는 학습과정을 표현하기 위한 도구로서 Novak(1990), Johnson, Goldsmith와 Teague(1995), Kosko (1993/1995) 등은 개념도 또는 개념도의 확장으로서 퍼지 인지 맵(FCM)이 적합하다고 주장하였다. 개념도와 FCM은 세분화된 개념 영역의 다양한 요소들 간의 상호관계를 네트워크 양식으로 표현하고 학습자의 주관적 인지구조 또는 전문가의 지각과 신념을 표현할 수 있다고 한다. 특히, FCM은 인지구조에서 역동적이고 인과적인 지식의 표현에 효과적이라고 한다. 본 연구에서 학생들의 수학적 오류에 대한 분석과 오도요인 진단의 해석틀로서 역할을 할 Schoenfeld(1989)의 구조 분석 단계 모형과 퍼지 인지 맵의 구체적인 내용은 다음과 같다.

1) Schoenfeld의 구조 분석 단계 모형

본 절에서는 학생들의 증명구성 과정을 분석하기 위해 사용할 Schoenfeld(1989)의 구조 분석 단계(levels of analysis and structure) 모형을 살펴볼 것이다. Schoenfeld의 구조 분석 단계에서 논하는 스키마는 인지구조의 한 단위를 기술하기 위하여 Piaget가 사용한 용어를 말하는 것으로서, 인식된 문제 상황을 이해하고 처리하며 조직하는데 관련된 논리적이고 인지적인 능력들이라고 한다. 이는 Piaget가 사용한 용어인 스키마를 수용하여 학습자의 지식구조 속에서 하나의 정보단위로 존재하는 스키마로 지식구조 내 청크(chunk)의 내용 목록을 강조하였던 Pascaul-Leone의 스키마와 동일한 의미를 갖는

것으로 볼 수 있다.

Schoenfeld(1989)의 구조 분석 단계 모형의 4단계는 다음과 같다.

1단계 '스키마(schema) 수준에서 지식의 거시적 조직화(macro-organization)'는 학생이 문제해결을 할 때 정규교육과정에서 요구하는 지식과 절충한 것이 무엇인지를 결정할 수 있게 한다. 또한 문제에서 학생이 사용하는 지식의 청크(chunks)를 보여줄 수 있다. 예를 들어, 1단계에서는 학생이 일차함수에 대한 직선의 방정식 y=mx+b에서 m과 b는 각각 기울기와 y 절편을 나타낸다고 인식하는 것이다.

2단계 '축적된 지식'에서는 거시적 실재(macro-entities)와 그 함의 및 계승과 관련된다. 1단계에서 인식한 거시적 조직에서 나타난 지식이 좀 더 구체화된 실재로 인식되어 그 함의 관계가 계승된 것이다. 1단계에 제시했던 예에서, 학생이 m>0이면 직선이 증가하고, 점(0, b)는 직선과 y축과의 교점이라는 것 등을 이해하고 있는 것을 말한다.

3단계 '미세 구조'는 그 지식을 지원하는 정교한 상위구조(superstructure)와 관련시켜 이해하는 단계로서 그 지식 영역을 지원하는 개념노드사이의 연결과 관련된다. 개념노드는 그 지식 영역 안에서 더 이상 분리 처리할 수 없는 핵심적인 개념을 의미한다. 예를 들어, 주어진 두 점을 지나는 직선의 기울기 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$을 두 유향선분으로 생각할 수 있으며, y=mx+b에서 x=0일 때 y절편을 얻을 수 있다는 것을 인식하는 것을 말한다. 표준적인 교육과정의 입장에서 살펴볼 때, 학생들의 내용 이해에 대한 과정은 3단계에서 종료되는데, 이는 문제를 성공적으로 해결할 수 있는 개념노드를 알게 되었기 때문이다.

4단계 '제한된 적용 맥락을 벗어난 수준'은 문제가 적용되는 문맥이나 상황에서 벗어난 다양한 상황 속에서 학생이 3단계에서 볼 수 있는 개념노드를 다양하게 구성하고 있는 것을 말한다.

Borgen과 Manu(2002)는 Schoenfeld의 구조 분석 단계 모형은 정규교육과정 내의 수학적 지식과 학생들의 이해를 4단계로 나누어 분석하기 때문에 구조화되지 않은 상황에서 주어진 문제를 해결하는 과정을 학생의 인지적 배경 내에서 탐구할 수 있도록 함으로써, 학생의 이해에 대한 심층적인 탐구를 할 수 있는 적절한 관점을 제공한다고 한다. 또한, Schoenfeld는 이 모형으로 학생들의 이해 과정에 대해 암묵적으로 설명할 수 있고, 반복조사가 가능하다고 강조한다.

이러한 맥락에서 학생의 증명문제해결과정 전반에 걸쳐 어떤 수학적 지식을 이해한 것인지를 나타내는 동시에 정규교육과정에서 증명문제해결을 하기 위해 요구하는 수학적 지식과 비교하여 설명하는데 Schoenfeld의 구조 분석 단계 모형이 적합하다고 판단된다. 비록 학생들의 이해 과정이 항상 선형적이지 않지만, Schoenfeld의 선형적인 구조 분석 단계 모형은 어떤 개념에 대한 학생들의 이해 상황에 대한 유의미한 정보를 빠르게 제공할 수 있고 그 잠재적 영향을 연구자들이 쉽게 예측할 수 있도록 할 것이다. 또한, Schoenfeld의 구조를 사용한 분석은 증명문제해결과정에서 나타나는 학생들의 수학적 행위에 대한 이해를 돕고 그 과정에서 학생들이 사용한 개념들 간의 연결 양상을 살펴볼 수 있게 할 것이다.

2) 퍼지 인지 맵(Fuzzy Cognitive Map)

퍼지 인지 맵(FCM)은 특정 문제를 해결하기 위하여 지식들을 수집한 다음, 수집된 지식들 간의 인과관계를 행렬과 네트워크 표현으로 나

타내어 현실세계를 모델링 할 수 있다. 이 때, 지식들 간의 인과관계는 퍼지적 인과관계를 갖는다(Kosko, 1993/1995). 이는 개념과 인과성을 참과 거짓으로만 분류하는 것이 아니라, 학생이 올바른 개념을 구성하는 과정에서 어느 정도 참인지, 즉 완전히 참도 아니고 거짓도 아닌 퍼지한 단계를 거치거나 그러한 인과관계가 생성될 수 있음을 의미한다. 이를 표현하기 위한 수학적 방법으로, 퍼지 논리는 우리가 0에서 1까지의 연속적인 척도에서 참값을 표현할 수 있도록 허용한다. 퍼지 논리는 인간의 사고를 설명할 때 참과 거짓만을 다루는 이치 논리로는 충분히 다룰 수 없으므로 참과 거짓 사이의 많은 단계의 중간적 개념을 인정하는 다치 논리이다. 즉, 퍼지 이론을 활용한다면, 학생의 수학문제해결과정에서 애매성의 존재를 인정하고 이를 수량적으로 다룰 수 있을 것이다. 따라서 FCM은 교육학에서 언어 변수를 사용하여 서술되는 현상이나 그 현상의 애매모호함뿐만 아니라, 오개념 또는 복잡한 개념의 표현을 할 수 있다.

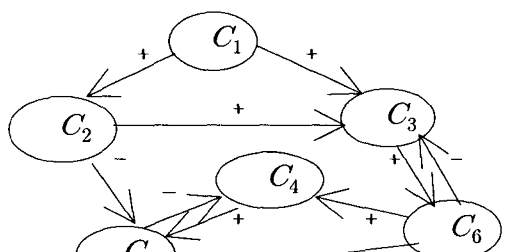
FCM에서의 개념은 앞서 서술한 Pascaul-Leone의 신피아제 이론과 Schoenfeld(1989)의 스키마와 동일한 맥락에서 설명될 수 있다. 개념은 우리의 경험을 부호화한 모든 인지과정의 기초가 되는 것으로, 개념은 동일유목으로 사람들이 기억에 저장하고 있는 본보기들을 규정하는 규칙, 정의, 속성들 간의 관계 등에 대한 심적 표상으로 규정한다(신현정, 2000). 특히, FCM에서는 개념을 개념노드라고 부르며 많은 지식 표상에 대한 관점을 개념과 개념간의 관계에 주목한다. 따라서 FCM에서의 개념은 인지과정에서 정보 처리의 기본 단위이므로, 앞서 Pascaul-Leone의 신피아제 이론, Schoenfeld의 구조 분석 단계 모형에서 서술한 스키마와 필요에 따라서 상호교환적인 의미로 사용될 수 있을 것으로 보인다.

FCM은 수집된 지식들을 개념들과 각각의 개념(C_i)과 개념(C_j) 사이의 관계를 방향성을 갖는 화살표(W_{ij})로 표현한다(Stylios & Groumpos, 1998). W_{ij}는 이들 개념들 간의 인과관계를 퍼지한 값으로 나타내는데 [-1, 1]의 연속된 값들로 표현한다. 이 때 개념(C_i)과 개념(C_j) 사이에는 일반적으로 다음과 같은 인과관계가 존재한다. C_i와 C_j를 FCM에서는 개념노드라고 부르며, [그림 II-2]는 FCM의 예를 나타낸 것이다.

(1) $W_{ij}=0$: 개념(C_i)과 개념(C_j) 사이에는 관계성이 존재하지 않는다.

(2) $W_{ij}>0$: 개념(C_i)과 개념(C_j) 사이에는 긍정적인 인과관계가 존재한다. 즉, C_i 값의 증가는 C_j 값을 증가시키며, 반대로 C_i 값의 감소는 C_j값을 감소시킨다.

(3) $W_{ij}<0$: 개념(C_i)과 개념(C_j) 사이에는 부정적인 인과관계가 존재한다. 즉, C_i 값의 증가는 C_j 값을 감소시키며, 반대로 C_i 값의 감소는 C_j 값을 증가시킨다.

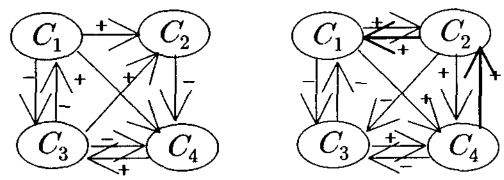


[그림 II-2] FCM의 예

FCM의 인과관계는 학습자들의 지식구조를 표현할 수 있는 형식적인 방법으로서 역동적 사건의 모델을 탐구하고 창조하며 인과적 설명을 할 수 있다(Cole & Persichitte, 2000). FCM은 문제를 이해하고 해결하는 데 필요한 지식들을 개념노드(C_i)와 링크(W_{ij}) 구조로 표현한다. 개념들 사이의 링크는 노드들 사이의 상호 관계의 본질을 + 또는 -로 표현한다. 퍼지 논리는 퍼지적인 개념들 사이의 인과성의 정도를 표현한다. 각 개념노드의 인과성에 대한 피드백은 인지관계에서 숨겨진 성질을 탐구 할 수 있도록 한다.

FCM과 개념도와의 차이점은 FCM은 일시적인 관계를 나타낼 수 있으며 본질적으로 인과성에 기초한다는 것이다(Pressley & McCormick, 1995). Pressley와 McCormick에 의하면, FCM은 시간에 따른 인과성을 설명할 수 있고 인과성 효과는 입력 값의 변화에 따라 변동하는 것을 허용한다. 선형적이 아닌 피드백은 시간 기반 체계에서만 모델화될 수 있기 때문에, FCM은 개념들 사이의 단순히 의미적 관계들이 아닌 인과성을 모델화할 수 있다. 또한 인과관계들의 의미론적 네트워킹이 더 잘 표현된다. 다른 차이점으로는 FCM에서 개념들은 아이디어의 중심성에 따라 배열되지 않고 오히려 인지 맵이 완성된 후 아이디어의 중심성이 자연스럽게 결정된다. 즉, 주어진 노드와 그 링크들의 가중치로부터 중심성이 결정된다. 물론, 개념의 위계적인 관계들도 FCM 노드 내에 포함될 수 있다. FCM은 다수 학습자들의 지식구조를 통합할 수 있으므로 보다 유연성 있는 지식구조를 생성할 수 있고 새로운 개념을 융통성 있게 수용하면서 확장가능하다. Kosko(1993/1995)는 다양한 학습자의 FCM을 조합하기 위한 수학적 방법으로 FCM을 행렬로 표현하여 결합하는 방법을 개발하였다.

FCM의 구조는 네트워크 도식으로 표현되기도 하지만 수학적으로 벡터와 행렬로써 표현될 수 있다. 한 FCM에 n개의 개념들이 존재한다면 n×n행렬로 표현되며, 각 개념(C_i)과 개념(C_j) 사이의 W_{ij}는 n×n행렬의 각 원소의 값들로 표현된다. 각 전문가나 학생의 퍼지 인지맵은 개념노드들의 총수를 행렬로 표현할 수 있고, 지식베이스가 되는 전문가들이나 학습자들의 인지구조를 표현하는 퍼지 인지 맵(FCM)은 행렬들의 합으로 나타난다. [그림 II-3]은 두 명의 학습자들을 같은 수준으로 인정할 때 각 학습자들의 FCM을 결합하여 새로운 FCM이 생성된 결과를 FCM 행렬 F로 제시한 것이다.



FCM 1 FCM2

$$F_1 = \begin{matrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad F_2 = \begin{matrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$F = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = \frac{1}{2} \begin{matrix} 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

[그림 II-3] FCM 결합과 FCM 행렬 F

인과관계들은 FCM의 네트워크 표현에서 연결된 공동링크의 가중치로서 표현될 수 있다. 큰 표본이 주어질 때 FCM은 안정적이며 인지구조의 연결 강도를 견고하게 한다.

이상에서 논의한 FCM의 여러 가지 특징들

을 정리하면 첫째, FCM은 개념들 사이의 관계에서 보다 많은 정보를 찾아낼 수 있다. 둘째, FCM은 역동적인 관계를 표현한다. 셋째, FCM은 숨겨진 관계를 표현한다. 넷째, FCM은 결합 가능하다. 다섯째, FCM은 조정가능하다. 본 연구에서는 학습자들의 수학적 오류를 분석할 때 학생들의 증명 과정에 관련된 개념을 교과서의 내용체계는 물론 전문가가 2단계에 걸쳐 수집·선정하여 개념노드를 구성하고, 그 인과관계를 FCM 행렬 F로 표현하여 활용할 것이다. 보다 구체적으로 학생들의 오류를 분석할 때는 FCM의 네트워크 양식의 표현을 사용할 것이다.

III. 연구 방법

본 연구는 증명문제해결과정에서 학생들의 수학적 오류를 Pascaul-Leone의 신피아제 이론을 바탕으로 Schoenfeld의 구조분석단계 모델과 FCM을 활용하여 분석하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 인천의 G 여자 중학교 2학년 학생 80명을 대상으로 '평행사변형의 성질'이라는 기하단원의 증명문제를 조별 토론활동을 하여 해결하도록 하였다. 일반적으로 학교에서 이루어지고 있는 수업은 개별면담보다는 전체적인 수업으로 진행되므로, 본 연구의 목적에 적합하도록 전체적인 수업 중 조별토론활동을 통하여 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 학생들의 개념을 구체적으로 조사하였다.

조별토론활동은 학생과 학생간의 의사소통을 통해서 특정한 주제나 문제에 대하여 학생들이 다양한 의견이나 아이디어를 자유롭게 제시하거나 그로부터 새로운 의견이나 아이디어를 만들어 낼 수 있어 학생들의 개념을 파악·분석할 수 있었다. 40명 기준의 한 학급 학생들을 5명씩 한 조로 하여 8개의 조로 편성하여 각 조에서 조장 1명과 기록자 1명을 자유롭게 선출하였다. 성취수준이 상, 중, 하의 학생이 골고루 섞여 있지만, 친한 학생들끼리 한 조로 묶어 토론 분위기가 자유롭도록 하였다. 조별 토론 활동은 조별로 1권의 노트에 기록자가 전 과정을 빠짐없이 매시간 기록하도록 하였으며, 최종 증명문제해결방안을 조별로 제공된 학습지에 연역적 증명의 형식으로 적어 제출하도록 하였다. 또한, 증명을 위한 보조선 작도를 할 경우 그렇게 작도를 해야 하는 이유를 학생들이 토론하여 결정하고, 이를 기록하도록 하였다. 증명을 하기 위해 삼각형의 합동조건 등과 같은 기본 성질을 이용하고 그 중 필요한 것을 선택하는 해결과정도 그 이유 및 증명과정 모두를 기록하도록 하였다. 그리고 반례를 이용하는 경우와 연역적 증명을 바로 하지 못하고 주어진 명제에 해당하는 예를 나열하여 규칙을 발견하는 경우에도 모든 활동을 기록하도록 하였다. 이 때, 교사는 학생들의 활동을 관찰하고 학생들의 요청이 있을 때는 문제를 해결하기 위한 조언을 하거나 질문에 응답하기도 하며, 필요한 자료 등을 제시하였다.

'평행사변형의 성질' 단원은 교육과정상 학생들이 명제와 명제의 역, 삼각형의 합동조건, 이등변삼각형의 성질을 학습한 뒤 처음으로 주어진 문제를 가정과 결론으로 나누고 선수학습 내용을 정리로 활용하여 간단한 공리적 체계를 구성하게 되는 형식적 증명을 구체적으로 접하는 부분이기 때문에, 학생들 스스로 수학자처럼 지식을 구성하게 되고 이 과정에서 학생 나름대로의 개념을 형성하거나 수학적 오류를 범할 수 있다. 따라서 '평행사변형의 성질' 단원의 문제해결과정은 본 연구의 목적에 맞게 학

생들의 수학적 오류를 분석할 수 있었다.

본 연구는 첫째 학생들의 증명문제해결과정에서 나타나는 수학적 오류를 Pascaul-Leone의 신피아제 이론을 바탕으로 분석하기 위해, 문제해결을 위한 토론 활동 중 학생들 스스로 기록한 활동일지에서 가장 공통적으로 나타난 수학적 오류 양상을 회고적 분석(retrospective analysis)[3]과 같은 질적 연구방법을 실시하여 1차적으로 분석하였다. 둘째 수학적 오류가 나타날 때의 과정적 측면을 보다 구체적으로 분석하기 위해 Schoenfeld의 구조 분석 단계 모델에 따라 증명문제해결과정을 단계별로 분석하였다. 이 때 보다 구체적인 오류 발생 원인을 찾아보기 위해 각 단계별로 FCM에 의해 분석하였다.

학생들의 증명문제해결과정에서 나타나는 오류의 오도 요인을 진단하기 위한 방법을 구체적으로 살펴보면, 다음과 같다. 먼저 지식베이스인 FCM의 개념노드들은 행렬 표현을 사용하여 구성되었다. 이 때 FCM의 개념노드들은 2단계에 걸쳐 정의되었는데, 1단계에서는 학생들의 증명활동에서 나타난 데이터를 지식베이스로 수집한 후 나타난 개념들을 분류하였다. 2단계에서는 1단계에서 분류된 개념들 중 문제해결과정에 활용될 때의 참 거짓과 관계없이 공통적으로 나타나는 개념들을 3명의 전문가와 교과서의 내용체계에 따라 최종 선정하여 <표 Ⅳ-2>와 같이 구성하였다.

그런 다음, 3명의 전문가가 각 개념노드들 간의 인과관계를 퍼지 논리를 활용하여 각자 FCM 행렬로 표현하도록 하고, 그 3개 행렬의 합의 평균을 계산하여 주어진 증명문제해결을 위한 인과성을 나타내는 FCM 행렬 F로 표현하였다.

이와 동시에 각 구조분석 단계에서 나타난 학생들의 오개념을 네트워크 양식 FCM으로 표현하여 그 양상을 보다 자세히 분석하였다. 이때 학생들의 오개념을 +, -의 가중치를 부여한 FCM의 네트워크로 표현한 FCM을 기반으로 하고 각 개념노드들 간의 인과관계를 나타낸 FCM 행렬 F를 활용하여 오도 요인을 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과

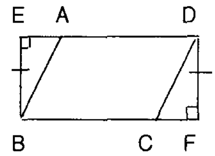
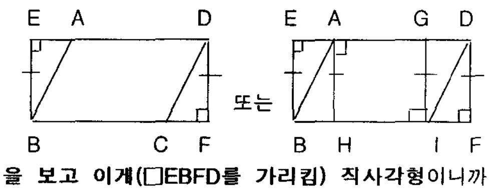
1절에서는 Ⅱ장에서 논의한 Pascaul-Leone의 신피아제 이론을 바탕으로 중학생들의 증명 학습 과정에서 나타나는 오류를 분석하고, 2절에서는 학생들이 옳은 개념을 가지고 있으면서도 증명문제해결과정에서 오류를 저지르는 양상을 인지구조와 관련지어 Schoenfeld의 구조 분석 단계 모형과 FCM을 활용하여 분석한 결과를 살펴본다.

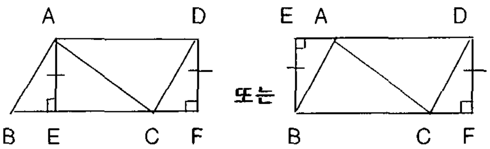
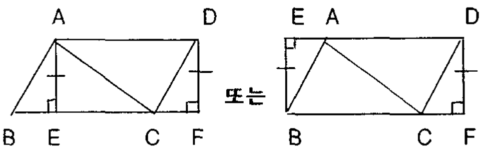
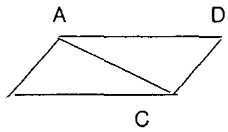
1. Pascal-Leone의 신피아제 이론에 의한 학생들의 수학적 오류 분석

증명문제해결과정에서 학생들은 여러 오류유형을 보여주고 있었는데, 그 중 공통적으로 나타난 수학적 오류 유형을 회고적 분석에 의해 1차 분석한 결과는 <표Ⅳ-1>과 같다. 주어진 문제는 '평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이가 같다'는 명제였다.

3) Steffe, Thompson, & Glasersfeld(2000)에 의하면, 회고적 분석(retrospective analysis)은 비디오 녹화, 학생들의 기록일지, 연구자의 관찰일지 등을 하여 교수 실험 후에 다시 세밀하게 보면서 분석하거나 학생들이 구성한 수학적 행동에 대한 더 깊은 이해를 할 수 있도록 하는 실험 교수 방법의 한 과정이다.

<표 Ⅳ-1> 학생들의 오류에 대한 1차 분석

토론활동 기록일지(조별 녹취록)의 학생유형별 분류	1차 분석
학생1 유형: 평행사변형 ABCD의 두 쌍의 마주보는 변이 길이가 같은 것은 당연한 것 아닌가? …중략… **평행이면 높이가 같잖아.** [아래의 그림처럼 종이에 평행사변형을 그리고 삼각형으로 보조선을 그어 만듦]  그림에서 **두 직각 삼각형의 높이가 서로 같기 때문에 이를 서로 맞붙이면 빗변이 서로 같으니까** 두 삼각형이 합동이지.. **그림을 붙여보면 똑같잖아.** 합동조건은 SAS 합동이야. 직각이 같고 빗변이 같으니까 이등변삼각형이잖아 그러면 두 밑각의 크기가 같으니까.	**학생1유형:** →평형사변형 그림을 그렸을 때 **기호를 사용하지 않음** (설명의 편의를 위해 연구자가 기호를 붙임) **→직관적으로 그림을 이용하여 설명함, 대부분의 학생 1유형은 여기에서 증명을 마침**(다른 한 쌍의 대변이 평행인 것은 증명하지 않음) →합동조건을 찾으라고 요구하자 **거의 자동적으로 SAS합동**이라고 함. →SAS조건인 이유를 묻자 그림을 보고 나름대로 논리적으로 설명함.
학생2 유형: SAS 합동? 그러면 높이는 같고 각도 직각인 것은 맞는데, 빗변이 같은지를 어떻게 증명해? 다른 한 변의 길이가 같은지를 모르잖아. …중략… **동위각을 이용**하면 돼. **[위 그림에서 손가락으로 가리키면서]** 이 각[∠ABC]하고 이 각[∠DCF]이 동위각인데 요 각[∠DCF]은 저 각[∠CDA]하고 엇각이야. …중략… **각각의 삼각형에서 두 각끼리 같으니까 나머지 각이 같잖아.** 그러니까 합동이지. 두 각이 같고 높이가 같으니까, 아하~ **ASA합동**이군. 그럼, 빗변의 길이 즉 평형사변형의 AB와 DC가 평행이지. **학생2 유형의 50%는 다른 한 쌍의 대변의 길이가 같다는 증명을 하지 않고 마침.** **(계속 증명을 진행한 나머지 학생2 유형의 경우)**  **위 그림을 보고 이게(□EBFD를 가리킴) 직사각형**이니까 이 두 변**길이가 같은데(ED=BF/AG=HI)**, 아까 증명한 직각삼각형(△ABE≡△CDF)이 ASA합동이라서 밑변이 같아(AE=CF / AE=BH=GD=IF)를 손으로 가리킴) 그러면 AD하고 BC가 같아. ED-AE =BF-CF	**학생2유형:** →학생1에 대한 반박에서 증명활동을 시작함 →기호사용은 하지 않음 →한참 그림을 보면서 각의 크기에 주목함(교과서, 친구의 조언 참고) →삼각형의 내각의 합이 180°로 같다는 사실을 삼각형의 내각의 합은 모두 일정하다고 기억하고 있음. →합동조건은 논리적으로 사용함 →다른 한 쌍의 대변의 길이가 같음의 증명을 요구하자 복잡해서 모른다고 하는 중도탈락자가 있었음. **→직사각형을 이용할 때 학생들이 사용한 대표적인 2종류의 그림.** **→그림을 보고 직관적으로 증명함** **→직사각형인 이유를 묻자, 그림이 직사각형이라고 답함.** →AD=BC인 이유를 묻자 마지못해 당연한 것을 왜 묻냐고 하면서 답함.

토론활동 기록일지(조별 녹취록)의 학생유형별 분류	1차 분석
학생3 유형: 4) [평행사변형 ABCD의 꼭지점 A와 C를 연결하는 그림을 그린다.]  <u>학생1의 유형과 똑같은 방법(직각△을 서로 붙이면 빗변의 길이가 같다)으로 AB=DC를 증명함</u> 그런 다음, **대각선을 그리면 [점A와 점C를 잇고서] 그림을 보면 이 두 각(∠EAC와∠CDA)은 45도로 같으니까.** SAS합동이 되잖아. AB=DC, AC는 공통이고 각이 45도로 같으니까.	**학생3 유형:** **→학생1의 유형과 똑같은 방법(직각삼각형의 그림을 직관적으로 이용하는 방법)**으로 AB=DC를 증명함 **→ 두 각이 45°로 같은 이유는 단지 직각을 이등분했다**고 설명함. →<u>습관적으로 SAS합동을 사용함</u> (논리적으로 무조건 두 변과 한 각이 같으면 된다고 생각함)
학생4 유형: [평행사변형 ABCD의 꼭지점 A와 C를 연결하는 그림을 그린다.]  <u>학생1의 유형과 똑같은 방법(직각△을 서로 붙이면 빗변의 길이가 같다)으로 AB=DC를 증명함</u> 그런 다음, **대각선 AC를 그려서 AB와 DC가 평행이니까 ∠BAC와 ∠DCA가 엇각이야.** 그러면 <u>△ABC하고 △ACD는 SAS합동</u>이야. <u>엇각이 같고 AB=DC이고 **AD하고 BC가 같으니까.**</u>	**학생4 유형:** **→학생1의 유형과 똑같은 방법(직각삼각형의 그림을 직관적으로 이용하는 방법)**으로 AB=DC를 증명함 →엇각인 이유를 묻자, AB와 DC가 평행이라고 대답한 것만 **증명과정 중 유일하게 옳은** 표현이었음. →합동인 이유는 맞았으나 연구자가 개별적으로 추후에 질문하자, **SAS합동에 합동인 이유를 억지로 맞추는 경향이 강함.** **→결론인 AD=BC를 합동조건으로 사용함**(결론을 혼동하고 있음)
학생5 유형:  위와 같은 그림을 그려 삼각형ABC와 ACD가 합동임을 알고는 있으나 조건을 잘못 사용하는 경우 **∠BAC=∠ACD,∠DAC=∠BCA 중 택 1하여 엇각임을 이용하고 AB=DC, AC를 이용한 SAS합동조건 사용하거나,** **∠B=∠D와 위의 엇각 중 하나와 AB=DC를 이용하여 ASA합동을 이용하는 경우,** **세변의 길이가 같음을 이용하여 SSS합동을 이용함**	**학생5 유형:** **합동조건을 잘못 사용하는 경우** <u>**→전문가들이 두 삼각형이 엇각(∠BAC=∠ACD,∠DAC=∠BCA)와 AC가 공통이므로 ASA합동이라고 증명하는 경우와 같은 그림을 사용하나**</u> 합동조건을 잘못 사용하는 증명유형 **→가정과 결론을 구분할 수 없거나 증명을 할 때 혼동하여 사용**

4) B와 D를 잇는 보조선을 긋는 경우의 그림은 생략하나 학생3, 4, 5유형에 각각 포함되었다.

1차 분석한 내용을 Pascaul-Leone의 신피아제 이론을 바탕으로 해석하면 아래와 같다.

첫째, 5가지의 유형 모두에서 학생들이 그림에 의존하여 판단하고 증명해가는 경향을 볼 때 상황의존적 속성을 지니고 형상적 스키마를 작동시키는 F조작자가 학생들의 문제해결과정에서 활성화되어 오도 요인으로 작동하고 있음을 알 수 있다. 특히 유형2에서 직사각형의 대변의 길이가 같다는 성질을 그림을 보고 판단하는 것과 유형 4에서 ∠EAC와 ∠CDA를 직각의 이등분각인 45°로 판정하는 것은 형상 스키마를 활성화시키는 무의식적 조작자인 F조작자가 작용한 결과로 해석할 수 있다. 또한, 기호사용을 제대로 하지 못하는 것을 볼 때 학생들은 충분한 논리조작적 구조에는 이르지 못하고 있다고 해석할 수 있다. 유형2에서 직사각형의 대변의 길이가 같다는 것은 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이가 같다는 주어진 명제를 해결한 후 이를 활용하여 증명해야 하는데 반대로 익숙한 직사각형의 그림을 보고 수행하는 것을 볼 때 논리조작적 구조가 충분히 형성되지 않았다고 해석할 수 있다.

둘째, 유형1, 3, 4의 학생들은 '평행이면 높이가 같다'는 선행 지식을 바탕으로 그림의 두 직각삼각형을 서로 붙여서 이등변삼각형이라는 나름대로의 개념을 구성하여 '마주보는 한 쌍의 대변의 길이가 같다'는 증명을 하였다. 이 때, 평행인 직선의 거리가 같다는 개념은 평행이라는 방출반응 s의 스키마가 높이가 같다는 실행반응 r의 스키마를 인출하고, 이등변삼각형의 두 변의 길이가 같다는 s-r 통합스키마인 상위 스키마로 이행이 되고 있다. 이등변삼각형의 성질을 이용하여 마주보는 변의 길이가 같음을 증명하고 있으므로 이 때의 상위 스키마는 실행 스키마로 볼 수 있다.

또한, 스키마의 s-r 조건을 더욱 확장시켜 두 변의 길이가 같다는 내용 분화를 일으키고 있는 것을 볼 때 C조작자가 관여하고 있다고 해석할 수 있다.

셋째, 모든 오류 유형에서 삼각형의 합동조건 중 SAS합동 조건을 자동적으로 사용하려는 경향은 두 변의 길이와 한 각을 이용하면 그 각이 끼인 각이 아니더라도 삼각형의 합동조건을 이용하여 논리적으로 증명을 완성하려는 것으로 볼 수 있다. 이는 유형 3, 4, 5에서 나타난 것과 같이 두 변의 길이가 같고 한 각의 크기가 같다는 기존의 개별적인 스키마들을 논리적으로 통합하여 삼각형의 합동 조건이라는 상위의 논리구조로 형성하는 것으로 해석될 수 있다. 이러한 역할을 수행하는 조작자는 L조작자이다. 또한, 자동적으로 SAS 합동조건을 문제해결에 사용하는 것은 앞서 논의한 C조작자와 함께 LC 학습을 수행한 것으로 해석된다. 학생들은 LC학습의 결과, 자신의 지식구조 속에 LC 학습구조를 형성하여 저장됨으로써 견고성과 일관성을 가지고 유사한 문제를 풀 때 올바른 개념이 활성화되기 전에 작동하게 된다. Pascaul-Leone(1987)이 설명한 바와 같이 F조작자에 의해 활성화되고 상황의존적 경향이 있는 LC 학습구조는 오류를 범할 때의 인지구조가 될 수 있을 것으로 보인다. 마찬가지로, 유형2의 증명 과정 중 삼각형의 내각의 합이 180°라는 것을 이용하여 증명하는 것과 직사각형의 대변의 길이가 같다는 사실을 이용하여 변의 길이의 차를 이용하여 합동 조건을 찾아내는 것도 L조작자와 C조작자가 활성화되어 사용되는 LC 학습구조로 볼 수 있다. 또한 삼각형의 내각의 합이 180°로 모두 같다고 정확하게 개념을 기억하는 것보다 삼각형의 내각의 합이 일정하다는 개념으로 알고 있는 학생이

많았으며 계산이 필요할 경우에만 180°라는 수치를 사용한다고 하였다.

넷째, 위의 주어진 명제에 대한 증명으로서 교과서에 옳은 증명의 예로 등장하거나 전문가 집단 또는 옳게 증명을 한 학생들이 주로 사용하는 증명은 <표 Ⅳ-1>의 유형5 그림과 같이 평행사변형에 보조선을 그린 후 두 쌍의 엇각($\angle BAC = \angle ACD, \angle DAC = \angle BCA$)과 보조선으로 그린 변 AC를 합동조건으로 하여 두 삼각형△ABC와 △ADC가 ASA합동임을 증명하여 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이가 같다는 것을 증명하였다.

이는 Pascaul-Leone에 의해 설명된 LM 학습의 결과로 LM 학습구조가 형성된 것으로 해석될 수 있다. 구체적으로 설명하면, 논리적인 면을 근거로 문제의 가정과 결론을 구분 짓고 불필요한 그림이나 보조선에 좌우되어 판단하게 되는 F조작자가 활성화되는 것을 I조작자가 억제함으로써 가장 필요한 보조선을 그려 증명을 시작하고 있다.

그런 다음 주어진 증명 문제와 관련된 두 쌍의 엇각의 크기가 서로 같다는 상위 스키마와 이를 삼각형의 ASA합동조건이라는 논리조작적 구조로 M조작자에 의해 통합하는 것을 볼 때 LM 학습이 일어났으며 그 결과 다른 유사 문제에도 이를 사용하는 것을 볼 때 M조작자에 의해 그림이나 상황에 독립적이고 분석적 특징을 띤 LM 학습구조를 형성한 것으로 해석된다.

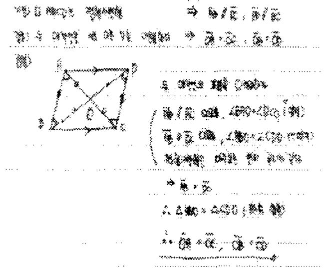
2. 수학적 오류를 범하는 학생들의 오도 요인에 대한 분석

학생들의 수학적 오류 양상을 보다 구체적으로 분석하기 위해, 본 절에서는 Schoenfeld의 구조 분석 단계 모형에 따라 증명문제해결과정에서 나타난 학생들의 오류를 살펴보고 각 단계별로 FCM을 활용하여 오도 요인을 분석한다.

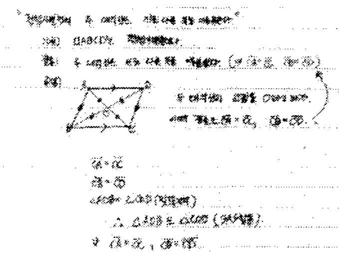
구조 분석의 각 단계에 나타난 학생들의 스키마들을 개념노드화 하여 네트워크 양식의 FCM으로 표현하여 수학적 오류의 양상과 오도 요인을 분석하였다. 증명활동의 주제는 '평행사변형의 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다'는 명제로 학생들이 최종 제출한 연역적 증명을 바탕으로 학생들에게서 공통으로 나타난 오류 양상을 분석하였다. '평행사변형의 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다'는 명제는 교육과정상 평행사변형의 성질에 대한 증명 부분 중 가장 마지막에 증명하게 되는 정리로서, 학생들이 다른 평행사변형의 성질을 증명해왔던 학습 경험으로 인하여 어느 정도 가정-결론-증명이라는 연역적 체계를 갖춘 증명쓰기를 할 수 있었고 기존의 수학적 오류가 더욱 견고해 진 상태로 본 연구의 목적에 적합한 것으로 판단된다.

주어진 명제에 대하여 학생들은 처음에는 여러 가지 평행사변형을 그린 후 대각선으로 보조선을 그려서 컴퍼스로 그 길이를 직접 재어 같음을 확인하기도 하고, '이등변삼각형의 꼭지각은 밑변을 수직이등분한다'는 이등변삼각형의 성질을 이용하여 증명을 시도하기도 하는 등 다양한 정당화 방법을 사용하였다. 그 후 증명문제를 해결하기 위해 최종 해결방법을 선택하는 토론 과정을 수행하였다. 본 연구에서는 최종 해결 방법을 선택하는 토론 과정을 기록한 활동일지와 그 산출물로 제출한 조별 연역적 증명 학습지를 중심으로 Schoenfeld의 구조 분석 단계 모형과 FCM을 활용하여 학생들의 오류를 분석하였다.

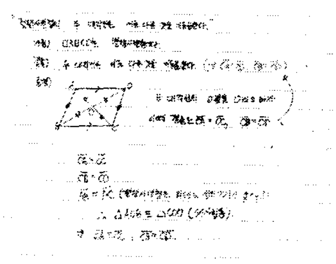
다음의 [그림 Ⅳ-1]은 위 명제에 대한 최종 답안으로 제출한 학생들의 연역적 증명으로 각각 옳은 증명과 옳지 않은 증명의 대표적인 예이다.



학생들의 옳은 증명



학생들의 옳지 않은 증명(SAS 합동조건 이용)



학생들의 옳지 않은 증명 (SSS합동조건 이용)

[그림 Ⅳ-1] 학생들의 여러 가지 문제 해결 방법

FCM의 개념노드를 구성하기 위해, 1차적으로 문제해결을 위한 옳은 개념인지 옳지 않은 개념인지와는 관계없이 학생들의 증명활동에서 데이터를 수집하여 지식베이스를 구성하였다.

그런 다음, 교과서에 제시된 내용과 3명의 전문가가 최종적으로 선정한 결과, 증명문제해결을 할 때 나타날 수 있는 FCM의 개념노드들은 <표 Ⅳ-2>와 같다. 이 때, 내용 관련 개념은 Pascaul-Leone의 스키마의 정의에 의해 방출반응 s와 실행반응 r로 구분하여 표현하였다. 방출반응 s는 학생들이 평행사변형이라는 용어에 대한 정의를 언어적으로 서술하거나, 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다고 할 때 대각선의 교점이 존재한다는 것을 인식하는 것으로 설명할 수 있다.

또한, 평행선과 엇각의 관계와 주어진 명제와 관련이 있는 평행사변형의 성질은 선수학습으로 습득한 지식을 청크화할 때 그 언어적 서술을 방출반응 s로 설명할 수 있다. 그리고 실행반응 r은 이러한 방출반응 s를 기호적으로 형식화하여 습득한 상태를 의미하는 것으로 해석하였다.

증명 구성과 관련된 즉, 증명쓰기에서 증명의 논리적인 조직과 관련한 개념은 속성들 간의 관계 등에 대한 심적 표상을 의미하는 것으로 상위스키마가 M조작자에 의해 통합되어 나타나는 논리조작적 구조와 관련된 스키마이므로 방출반응 s와 실행반응 r로 구분하지 않았고 P_i로 표시하였다. 증명을 할 때 학생들이 보조 수단으로 사용하는 그림 표현은 형상 스키마와 관련된 개념으로 볼 수 있으며 R_i로 표시하였다.

<표 Ⅳ-2> 문제해결을 할 때 나타날 수 있는 FCM의 개념노드

문제: '평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다'를 증명하여라.		
기호적 구분	개념노드의 내용	
	방출반응 s	실행반응 r 언어적 서술 → 기호적 서술
C_1	평행사변형의 정의 (두 쌍의 대변이 각각 평행하다)	$\overline{AB}//\overline{DC}, \overline{AD}//\overline{BC}$
C_2	대각선의 교점을 O라고 한다.	$\overline{OA}=\overline{OC}, \overline{OB}=\overline{OD}$ 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다
C_3	평행선과 엇각의 관계	∠BAC=∠DCA, ∠ABD=∠CDB
C_4	평행사변형의 성질 두 쌍의 대변의 길이가 같다.	$\overline{AB}=\overline{DC}, \overline{AD}=\overline{BC}$
C_5	삼각형의 합동조건	ASA합동
C_6	삼각형의 합동조건	SAS합동
C_7	삼각형의 합동조건	SSS합동
C_8	맞꼭지각의 크기가 같다.	∠AOB=∠COD, ∠AOD=∠BOC
P_1	명제의 가정과 결론으로 구분한다.	
P_2	논리적(연역적)인 체계로 증명을 구성한다.	
P_3	C_3의 길이가 같은 두 쌍의 대변 중 한 쌍의 대변(AB=DC)을 선택한다.	
P_4	C_7의 두 쌍의 맞꼭지각 중 한 쌍(∠AOB=∠COD)을 선택한다.	
R_1	주어진 명제(가정과 결론)의 그림 표현	
R_2	증명과정(합동조건)의 그림 표현	

* C:내용관련 개념, P: 증명과정(구성)관련 개념, R: 형상적 표현과 관련된 개념을 의미함.

위의 각 노드들 간의 인과관계를 나타내기 위해 각 전문가들은 개념노드 간의 인과성을 각각 [0, 1]사이의 퍼지한 값으로 정의한 퍼지 행렬 F_1, F_2, F_3 을 만들었다. 그런 다음 행렬의 합의 평균을 $F=\frac{1}{3}(F_1+F_2+F_3)$의 방법으로 계산하여 전문가들의 개념노드간의 인과성에 대한 공유된 관점을 표현하는 FCM 행렬 F를 생성하였다. 예를 들어, 개념노드 C_1과 C_4사이의 인과관계를 나타내는 0.96은 각 전문가들이 만들어 놓은 퍼지 행렬 F_1, F_2, F_3의 4행 1열의 값인 1, 1, 0.9의 평균값으로 계산된 값이다. 수치가 클수록 두 개념노드 간의 인과관계가 강한 것을 의미하며 가장 강한 인과관계는 1이고 인과관계가 없는 것은 0으로 표현되며, 자기 자신과의 인과관계는 화살표를 사용하여 네트워크로 표현하지 못하기 때문에 0으로 계산하였다.

각 개념노드간의 인과관계는 <표 Ⅳ-3>과 같다.

<표 Ⅳ-3> FCM 행렬 F

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	P_1	P_2	P_3	P_4	R_1	R_2
C_1	0	0	0.77	0.96	0	0	0	0	0.5	0	0	0	1	0
C_2	0	0	0	0	1	1	1	0.9	0.5	0	0	0	0.9	0
C_3	0.77	0	0	0	1	0	0	0	0	0.9	0	0	0	0.96
C_4	0.96	0	0	0	0.8	0	0.96	0	0	0	1	0	0	0.9
C_5	0	1	1	0.8	0	0	0	0	0	0.96	1	0	0	1
C_6	0	1	0	0	0	0	0	0.84	0	0	0	1	0	0
C_7	0	1	0	0.96	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_8	0	0.9	0	0	0	0.84	0	0	0	0	0	1	0	0
P_1	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0.67	0	0	1	0
P_2	0	0	0.9	0	0.96	0	0	0	0.67	0	0.96	0	0	0.96
P_3	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0.96	0	0	0	0.8
P_4	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
R_1	1	0.9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
R_2	0	0	0.96	0.9	1	0	0	0	0	0.96	0.8	0	0	0

위의 <표 Ⅳ-3>에 의하면, 평행사변형의 정의에 대한 개념노드 C_1과 평행선과 엇각의 관계에 대한 개념노드 C_3간의 인과관계는 퍼지한 값으로 계산하면 0.77정도의 관계가 있으며, 삼각형의 합동 조건을 나타내는 개념노드 C_5는 평행선과 엇각의 관계의 개념노드 C_3와 증명을 위한 상위 스키마인 P_3 , 형상 스키마인 R_2와는 1인 강한 인과관계가 성립함을 알 수 있다. 또한 C_5는 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다는 평행선의 성질에 대한 개념노드 C_4와는 0.8의 인과관계가 있으며 이를 연역적 체계에 맞춰 서술하는 상위스키마인 P_2와는 0.96의 인과관계를 갖고 있는 것으로 나타났다.

주어진 명제를 옳지 않게 증명하는 대부분의 학생들은 맞꼭지각의 성질을 이용한 증명을 하거나 가정과 결론을 구분하지 않고 모두 증명조건으로 사용하는 증명을 행하였다. 먼저 맞꼭지각의 성질은 옳게 알고 있으나 학생의 인지구조에서 F조작자가 활성화되어 이를 불필요한 증명 조건으로 사용하는 증명에서의 인과관계를 살펴보면, 명제의 결론인 개념노드 C_2와 관련하여 맞꼭지각의 성질에 대한 개념노드 C_8의 인관관계는 강하여 0.9로 표현되고 이는 두 쌍의 맞꼭지각 중 한 쌍을 선택하는 P_4의 인과관계는 아주 강하여 1로 나타났다. 또한 P_4, C_2 각각은 증명을 완성하기 위한 상위스키마인 삼각형의 합동조건 중 SAS합동을 나타내는 개념노드 C_6와의 인과관계는 1로 나타나고 있으며 C_8과 C_6의 인과관계는 0.84이었다.

주어진 명제의 가정과 결론을 구분하지 않고 이를 모두 증명의 조건으로 이용하여 논리적인 관계를 구성하지 못하는 오류가 발견된 증명을 살펴보면, 학생들은 평행사변형이라는 가정의 개념노드 C_1을 이용하여 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다는 개념노드 C_4의 인과관계가 0.96을 활성화시킨다. 그 후 C_4는 한 쌍의 마주보는 변의 길이가 같다는 개념노드 P_3를 인과성 1로 아주 강하게 도출한다. 이와 동시에, 학생들은 결론의 개념노드 C_2를 삼각형의 합동조건 중 SSS합동의 개념노드 C_7에 인과성 1로써 강하게 증명을 위한 조건으로 사용한다. 따라서 P_3와 C_2에서 인과성 1로 인출되게 되는 삼각형의 SSS합동조건의 개념노드 C_7과의 결합으로 인하여 오류가 발생하였음을 알 수 있다.

<표 Ⅳ-3>에 제시된 FCM 행렬 F는 인과관계를 [0, 1]에서 그 정도를 퍼지한 값으로 표현하여 나타내기 때문에, + 또는 - 표현을 사용하여 가중치를 나타낼 수 없다. 즉, 긍정적 관계인지 부정적 관계인지는 나타낼 수 없으며 개념과 개념간의 관계외의 여러 개의 개념노드간의 상호 관련성을 알 수 없으므로 네트워크 양식의 FCM으로 표현하여 보다 상세히 분석하고자 한다.

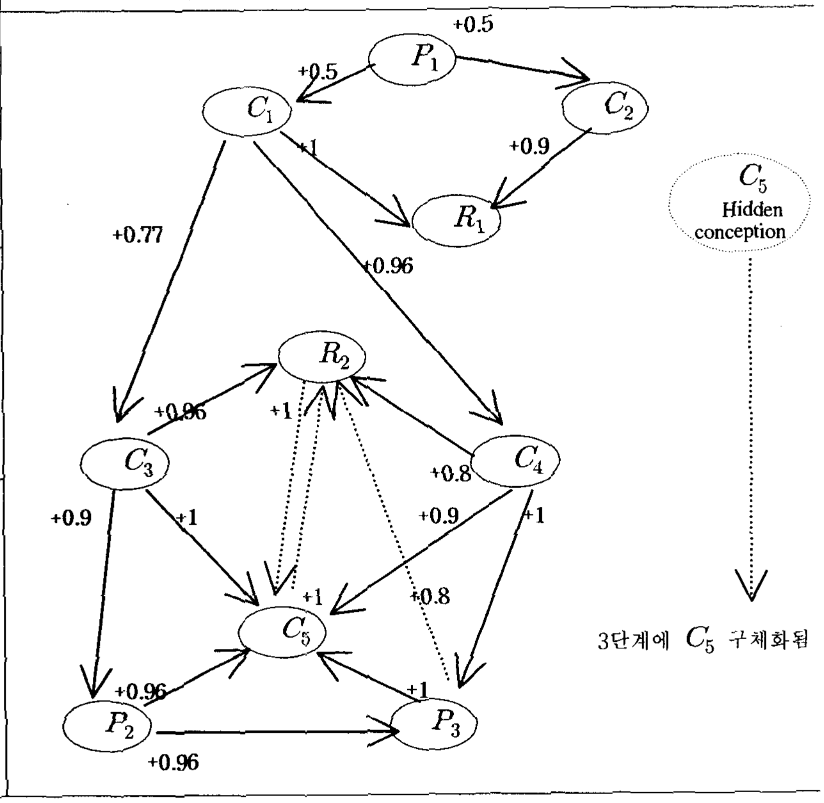
먼저, Schoenfeld의 구조 분석 단계 모형을 적용하여 각 단계별로 학생들의 증명을 분석하였다. 이 때, 옳지 않은 증명은 옳은 증명을 분석하는 Schoenfeld의 구조 분석 단계 모형 중 4단계인 제한된 적용맥락을 벗어난 수준에 해당하나, 옳지 않은 증명도 학생들이 구성한 자발적 개념 구성 활동이므로 보다 세밀한 분석을 하기 위해 모형의 4단계를 활용하지 않고 3단계를 새롭게 적용하여 분석하였다.

학생들의 증명에 Schoenfeld의 구조분석단계 모형을 적용해보면, 1단계 '스키마 수준에서 지식의 거시적 조직화'에서 학생들은 주어진 명제를 읽고 이를 증명하기 위해 논리조작적 스키마 P_1에 의해 가정과 결론을 구분하려는 활동을 한다. 이 때 평행사변형의 정의의 상위 스키마인 개념C_1과 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다는 개념 C_2를 인과관계에 의해 학생 나름대로 구성한다. 옳은 증명을 하거나 옳지 않게 증명을 하는 것과 상관없이 대부분의 학생들은 관련 개념을 그림 표현을 사용함으로써 형상 스키마 R_1에 의해 거시적으로 조직화하였다. 특히 옳지 않은 증명을 한 대부분의 학생들은 R_1에 의해 F조작자가 활성화됨으로써 그 직접적인 영향을 받아 삼각형의 합동조건 개념을 나름대로 인식하고 이를 증명 전략으로 사용하고자 하는 의도가 나타났다.

2단계 '축적된 지식: 실재'에서 증명을 직접 수행하는 과정으로서, 옳은 증명의 여부와 관계없이 학생들은 1단계에서 축적된 지식에서 인과성을 바탕으로 평행선과 엇각의 관계에 대한 개념 C_3, 평행사변형의 성질에 대한 개념 C_4, 맞꼭지각의 성질에 대한 개념 C_8을 계승·인출하였다. 이는 옳은 증명을 한 학생들은 무의식중에 I조작자가 활성화되어 불필요한 개념의 활성화를 억제하고 논리적인 통합 조작자인 M조작자가 활성화된 반면, 옳지 않은 증명을 하는 학생들은 C조작자에 의해 내용 관련 개념이 분화되고 있음을 의미하는 것으로 해석할 수 있다. 또한, 이 단계에서 세분화된 개념노드는 R_2로 현실화 되었다.

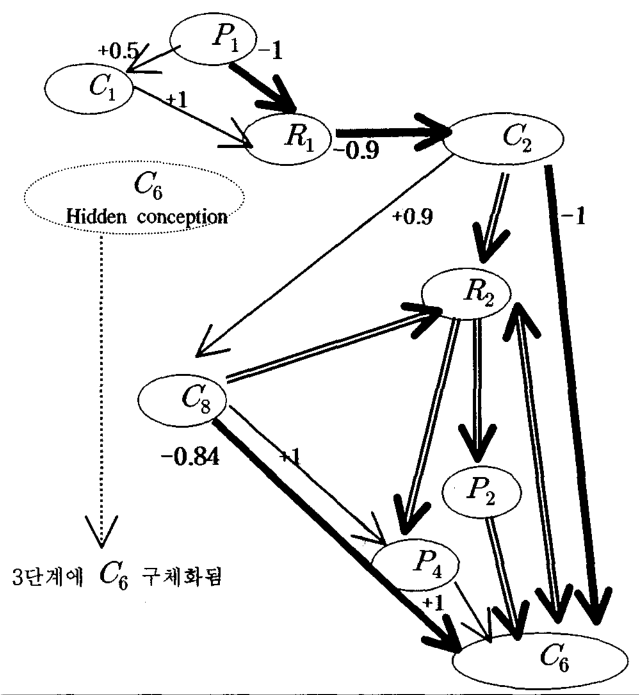
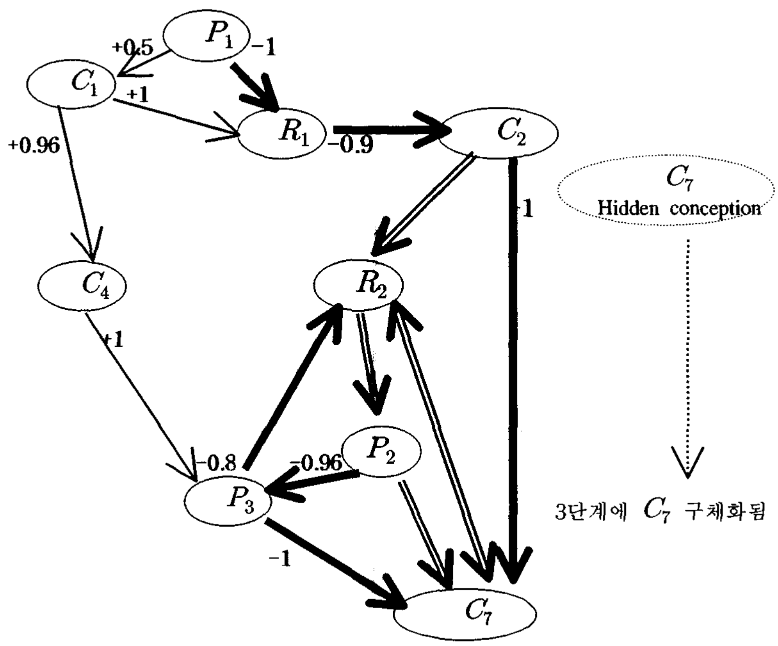
3단계인 '미세구조: 영역지식을 지지하는 미세한 상위구조'에서는 학생들은 논리적이고 연역적인 체계로 증명을 구성하기 위해 논리조작

<표 Ⅳ-4> Schoenfeld의 구조분석단계 모형과 FCM에 의한 옳은 증명의 분석

단계		학생들의 옳은 증명(ASA 합동조건 이용)
1단계	스키마 수준에서 지식의 거시적 조직화	
2단계	축적된 지식: 실재와 계승	
3단계	미세구조: 영역지식을 지지하는 미세한 상위 구조 - 개념노드와 연결	

적 개념노드인 P_2에 의해 각 개념노드를 연결하였다. 이 때, 옳은 증명을 하는 학생들은 C_3에서 더욱 정교한 개념인 P_3를 인출하고 2단계에서 인출된 C_4를 논리적으로 구성하여 ASA합동이라는 적합한 삼각형의 합동조건으로 조직하여 증명을 완성하였다. 그러나 옳지 않은 증명을 행하는 학생들은 2단계에서 실제화된 형상 스키마 R_2에 의존하여 C_6, C_7과 같은 삼각형의 합동조건을 사용하여 논리적으로 증명을 조직하였으며, 정교한 상위개념으로 내용관련 개념을 조작해가기 보다는 내용을 분화시켜 P_4등을 인출하였다. 이는 학생들이 옳은 증명의 여부와 관계없이 논리적 조작자인 L조작자에 영향을 받고 있지만, 옳은 증명을 한 학생들은 M조작자가 활성화된 반면 옳지 않은 증명을 한 학생들은 C조작자와 F조작자의 영향을 받고 있다고 해석할 수 있다. Schoenfeld의 구조분석단계 모형에 따라 각 단계의 학생들의 오류 양상을 옳은 증명을 했을 때와 옳지 않은 증명을 했을 때를 보다 상세히 비교·분석하고 오도 요인을 진단하기 위해 네트워크 FCM으로 표현하면 각각은 <표 Ⅳ-4>, <표 Ⅳ-5>와 같다. 이 때, 실선은 학생들이 증명을 행할 때 강하게 의식하고 있거나 직접적인 인과관계를 갖고 있는 개념노드 간의 연결을 나타내며, 점선은 간접적인 인과관계나 암묵적으로 이해하는 개념노드를 나타낸다. 화살표는 개념

<표 Ⅳ-5> Schoenfeld의 구조분석단계 모형과 FCM에 의한 옳지 않은 증명 분석

<table>
<tr><th colspan="2">단계</th><th>학생들의 옳지 않은 증명 I (SAS합동조건을 이용한 경우)</th></tr>
<tr><td>1
단
계</td><td>스키마 수준에서
지식의 거시적
조직화</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>2
단
계</td><td>축적된 지식:
실재와 계승</td></tr>
<tr><td>3
단
계</td><td>미세구조:
영역지식을
지지하는 미세한
상위 구조
-개념노드와 연결</td></tr>
<tr><th colspan="2">단계</th><th>학생들의 옳지 않은 증명Ⅱ(SSS합동조건을 이용한 경우)</th></tr>
<tr><td>1
단
계</td><td>스키마 수준에서
지식의 거시적
조직화</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>2
단
계</td><td>축적된 지식:
실재와 계승</td></tr>
<tr><td>3
단
계</td><td>미세구조:
영역지식을
지지하는 미세한
상위 구조
-개념노드와 연결</td></tr>
</table>

노드간의 연결에서 방향성을 나타내며 +는 긍정적인 가중치로 FCM 행렬 F의 인과관계에 대한 퍼지 값을 의미한다.

<표 Ⅳ-5>에서, 굵은 실선은 학생들이 증명을 할 때 오류를 범하도록 직접 영향을 주는 부정적인 인과관계를 갖고 있는 개념노드 간의 연결을 나타내며, 이중실선은 인과관계가 없어야 옳은 증명을 할 수 있음에도 불구하고 학생들이 갖고 있는 잘못된 인과관계를 표현한 것이다. 실선, 점선, 화살표의 의미는 <표 Ⅳ-4>와 같으며 -는 FCM 행렬 F의 인과관계에 대한 퍼지 값에 부정적인 가중치를 나타낸다.

위의 <표 Ⅳ-4>와 <표 Ⅳ-5>의 FCM 행렬 F와 가중치를 부여한 네트워크 표현의 FCM을 분석하여 옳은 증명과 그렇지 않을 증명을 비교·설명하고 오도 요인을 살펴본 결과는 다음과 같다.

1단계에서 <표 Ⅳ-4>의 학생들이 옳은 인과관계를 보여준 것과 달리, 옳지 않은 증명을 한 학생들은 모두 가정과 결론을 구분하는 논리적인 L조작자를 제대로 활성화하지 못하였다. 이는 평행사변형의 성질을 증명했던 선수학습과정에서 반복학습의 결과로 인하여, 주어진 명제의 가정이 평행사변형이라는 것은 쉽게 인식할 수 있지만, 결론은 학생들이 처음 접하는 것으로 그림에 의존하여 증명을 하려고 했기 때문인 것으로 볼 수 있다. 즉, 논리적 조작자인 L조작자가 활성화되어 가정과 결론을 구분하려고 했으나, 결론에 관련된 개념노드 C_2는 그림을 그려봄으로써 F조작자가 강하게 활성화되어 인식한 정보인 형상 스키마 R_1의 영향을 받아 부적인 강한 인과관계로 인출되었다. 따라서 증명을 하여 유도되어야 하는 개념 C_2는 증명과정 전반에 걸쳐 L조작자와 F조작자에 의해 오도 요인으로 작용하게 되어 학생들로 하여금 옳지 않은 증명을 하게 한다.

옳지 않은 증명을 한 학생들은 2단계에서 축적된 지식을 형성할 때 옳은 증명을 한 학생들이 C_1으로부터 강한 인과관계에 의해 옳은 증명을 위한 C_3와 C_4의 개념노드를 인출하였다. 옳지 않은 증명을 하는 학생들은 <표 Ⅳ-5>의 FCM 네트워크에 나타난 바와 같이, C_1으로부터 축적되는 지식의 개념노드가 없거나 하나만 활성화되었다. 이는 공통적으로 결론에 해당하는 개념노드 C_2를 부적인 강한 인과관계를 부여하여 증명조건으로 잘못 사용하고 있기 때문이다. 동시에 그림을 그려보는 학생들의 증명방법은 F조작자를 활성화시켜 축적된 지식의 실체로 형상적 스키마 R_2를 사용함으로써, C_2로부터 잘못된 삼각형의 합동조건 C_6와 C_7에 -1이라는 강한 부적 인과관계를 부여하게 된다. 즉, R_2가 오도 요인으로 작동하고 있음을 알 수 있다.

3단계인 미세한 상위 구조를 형성하는 단계에서는 증명의 옳고 그름과 관계없이 학생들은 논리적 체계로 증명을 조직하려는 개념노드 P_2의 영향을 전반적으로 받아, 증명전략으로 학생 나름대로 선택한 삼각형의 합동조건에 적합하도록 각 개념노드를 연결하고 있었다. 그러나 개념노드의 연결에서 차이가 있었는데, 옳은 증명을 한 학생들은 C_3를 C_5에 직접적인 강한 인과관계로 연결하면서 동시에 C_4에서 P_2의 영향을 받아 증명에 필요한 개념 P_3를 인출하여 ASA합동조건 C_5로 연결할 수 있었다. 옳지 않은 증명을 하는 학생들은 오도 요인 R_2로부터 증명을 구성하는 개념노드 P_2에 잘못된 인과관계를 부여하고, P_2에 의해 C조작자에 의해서 발생된 옳은 증명과는 인과성

이 전혀 없는 2단계에서 활성화된 개념노드 C_4, C_8을 잘못된 합동조건 C_6와 C_7에 연결하고 있었다. 이는 이전의 증명이나 전 단계에서 많이 경험한 그림그리기 증명방법이나 선수학습으로 인하여 학생들에게 이미 LC 학습구조로 견고하게 구성되어 있는 삼각형의 합동조건이라는 개념과 가정과 결론의 구분을 불완전하게 학습한 상황에 기인한 것으로 해석할 수도 있다. 하지만, 형상 스키마인 R_2로부터 직접적이고 강한 부적 영향을 받은 P_2에 의해 논리조작적 구조를 형성한 것으로 본다면 3단계에서 학생들은 LC 학습을 수행하고 그 결과 LC 학습구조를 형성한 것으로 해석할 수 있다.

옳은 증명을 한 학생들도 옳지 않은 증명을 한 학생들처럼 R_2에 의해 간접적인 영향을 받았지만, 옳지 않은 증명을 한 학생들이 R_2를 오도 요인으로 작동시키는 것과 달리, C_5로부터 R_2로의 역의 인과관계가 성립하는 것으로 보아 연역적 증명 체계를 그림에 비춰 다시 검증해 보는 것을 알 수 있었다.

정리하면, 옳지 않은 증명에서 오류를 저지르는 학생들은 개념노드의 선택과 연결에서 오도 요인 R_2와 C_2의 영향을 받아 잘못된 수행을 하고 있으며 증명에 필요한 개념노드도 충분하게 인출하지 못하는 것으로 볼 때, 주어진 명제에서 정보를 해석할 때 F조작자의 영향을 강하게 받음으로써 오류를 범하는 것으로 보인다. 즉, 증명과정에서 학생들이 증명문제에서 이해한 바를 그림으로 그려서 증명하는 방법이 그 문제에 내포된 수학적 개념을 완전히 이해하고 도출할 수 있음을 의미하지 않는다는 것을 보여준다. 또한, 가정과 결론을 구분하지 않거나 증명에 불필요한 정리를 이용하여 옳지 않은 증명을 한 학생들은 L조작자에 의해 나름대로 논리적·연역적 체계로 증명을 구성하려고 하지만, 관련 개념노드를 선택하거나 정교화 시키지 못하고 C조작자에 의해 관련 내용을 분화시켜 개념노드를 만들어 연결하는 LC 학습을 하였다. 이는 증명 알고리듬은 증명문제에 대한 실재적 이해 없이 적용될 수 있으며, 이러한 LC 학습으로 인해 형성된 학생들의 인지구조는 LC 학습구조로 견고하고 일관성 있는 오류가 형성된다는 것을 보여준다.

이상의 결과에서, 표준적인 교육과정에서는 가정과 결론으로 주어진 명제를 나누어 기호적 언어로 서술하고 증명을 위한 정리 등을 연역적·종합적으로 서술하고 있는 반면, 학생들은 옳은 증명이든 옳지 않은 증명이든 관계없이 증명에 필요한 개념노드를 연결하여 연역적 증명을 하기 이전에 나름대로 관련 개념을 인출하여 이를 그림을 그려보거나 삼각형의 합동조건과 같이 자신의 증명 전략으로서 인지구조에 숨은 개념에 비춰 확인해보는 분석적인 증명을 하고 있음을 알 수 있다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 기존의 수학적 오류에 대한 연구들이 취했던 학생들의 현재 상태를 바탕으로 다양한 오류를 분석하는 방식이 아니라 학생들이 문제해결과정에서 범하는 수학적 오류를 인지심리학의 관점에서 분석가능한지를 모색하는 것을 목적으로 하였다.

이에, 본 연구는 Pauscal-Leone의 신피아제 이론을 중심으로 Schoenfeld의 구조 분석 단계 모형에 따라 FCM을 활용하여 학생의 증명 문제해결 과정에서 나타나는 오류를 분석하였다. 또한 Pauscal-Leone의 신피아제 이론을 바탕으로 수학적 오류를 분석할 때 학생의 문제해결 과정과 인지구조의 상호 작용 과정을 설명하기

위하여, 오류발생의 인지심리학적 원인과 학생들의 오류를 도출하는 오도 요인 및 그 작동기제를 분석하였다. 보다 세밀한 분석을 위해, Schoenfeld의 구조 분석 단계 모형과 FCM을 활용한 결과, FCM은 학생이 학습과정에서 나타나는 다양하고 복잡한 지식 상태를 인과성에 중점을 두고 행렬이나 네트워크 표현으로 잘 표상할 수 있음을 제시하였다. 특히 여러 개의 FCM 행렬을 결합할 수 있는 확장성을 통해 유연성 있게 오류에 대한 분석과 오도 요인을 진단할 수 있었다.

8학년 학생 80명을 대상으로 '평행사변형의 성질'에 대한 증명문제해결과정에서 발생하는 오류를 분석한 결과를 요약하면 다음과 같다. 증명문제해결과정에서 오류를 범하는 학생들은 개념노드의 선택과 연결에서 오도 요인의 영향을 받아 개념노드 간에 인과관계가 없음에도 불구하고 이를 논리적으로 연결하여 잘못된 증명을 하였다. 오도 요인은 주어진 명제에서 정보를 해석할 때 F조작자가 강하게 활성화되어 나타났으며, 오도 요인으로 인하여 증명에 필요한 개념노드도 충분하게 인출하지 못하고 있었다. 증명구성을 위해 각 개념노드를 연결할 때는 L조작자에 의해 나름대로 논리적·연역적 체계로 증명을 구성하려고 시도는 하지만, C조작자에 의해 옳은 증명을 위한 관련 개념노드를 정교화 시키지 못하고 오도 요인과 관련하여 불필요한 개념을 분화시키는 LC 학습을 행하였다.

따라서 오류와 관련된 인지구조는 학생 나름대로의 논리적 알고리듬에 의한 LC 학습의 결과로 형성된 LC 학습구조이다. 이러한 학습의 결과로 LC 학습구조로 인한 학생들의 오류는 학습자 스스로 구성했으므로 견고성과 일관성을 띠게 된다.

본 연구를 토대로 앞으로의 연구에 대한 제언은 다음과 같다. 첫째, 본 연구의 대상이 특정 지역의 8학년 여학생만을 대상으로 실시한 제한점이 있으나, 인간의 문제해결과정에 대한 이해가 인간 자체에 대한 이해의 한 요인임을 고려한다면, 동일 수준의 내용 지식의 문제해결과정에서 학생 개개인의 수학적 오류가 발생할 때, 학습자의 오도 요인에 이끌리는 정도의 차이에 대한 연구가 있어야 할 것이다.

둘째, 증명은 대부분의 학생들이 어려워하는 분야로, 학생들마다 개인차가 많이 나타날 수 있지만 본 연구 결과를 활용하거나 다른 문제해결과정에도 적용한다면 교사가 오류 처방을 위한 학습지도의 시작점을 적절하게 선택할 수 있을 것이다.

셋째, 학생 개개인의 수준에 알맞아 학생 스스로 증명을 구성할 수 있고 동시에 교육과정상 이수해야 하는 증명학습의 필수내용도 적절하게 수업에 조직되어 현장에 쉽게 적용할 수 있는 학습-지도 방법이 연구·개발되어야 할 것이다.

참고문헌

김언주(1989). **신피아제론**. 서울: 배영사

나귀수(1998). **증명의 본질과 지도 실제의 분석: 중학교 기하단원을 중심으로**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

류성림(1998). **피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도방법 탐색**. 한국교원대학교 대학원 박사학위 논문.

박선화(2000). 수열의 극한 개념에 대한 인지적 장애의 극복 방안 연구. **수학교육학연구, 10**(2), 247-262.

박종원·최경희·김영민(2001). **물리교육학 총론I**. 서울: 북스힐.

서동엽(1999). **증명의 구성요소 분석 및 학습 지도 방안 탐색.** 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

송진웅 · 김익균 · 권성기 · 김영민 · 오원근 · 박종원(2003). **학생의 물리 誤槪念 地圖를 위한 표준검사 도구의 개발 및 데이터베이스 구축.** 한국학술진흥재단 2000년도 협동연구 결과 보고서.

신현정(2000). **개념과 범주화.** 서울: 아카넷.

이종희 · 김부미(2004). 증명학습에서 생성-수렴 수업 모형의 개발과 적용. **학교수학, 6**(1), 59-90.

조완영(2000). **탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명 활동에 관한 사례 연구.** 한국교원대학교 대학원 박사 학위 논문.

Artigue, M., & Viennot, L. (1987). Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials. *Proceedings of the Second International Seminar Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematic, 3,* 1-8.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors.* NJ: Ablex Publishing Corporation.

Borgen, K. L., & Manu, S. S. (2002). What do students really understand? *Journal of Mathematical Behavior, 21,* 151-165.

Clements, M. A., & Del Campo, G. (1987). Fractional understanding of fractions: variations in children's understanding of fractional concepts, across embodiments. *Proceedings of the Second International Seminar Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematic, 3,* 98-110.

Cole, J. R,. & Persichitte, K. A. (2000). Fuzzy Cognitive Mapping: Applications in Education. *International Journal of Intelligent Systems, 15,* 1-25.

Cornu, B. (1991). Limit. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking.* Kluwer Academic Publishers.

Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, 4.* National Council of Teachers of Mathematics, INC.

Johnson, P., Goldsmith, T., & Teague, K. (1995). Similarity, structure and knowledge: A representational approach to knowledge. In P. Nichols, S. Chipman & R. Brennan (Eds.), *Cognitively diagnostic assessment.* NJ: Earlbaum.

KierKegaard, S. (1980). **관점/현대의 비판.** (임춘갑, 역). 서울: 종로서적. (영어 원작은 1859년 출판).

Kosko, B. (1995). **퍼지식 사고.** (이호연 · 공성곤, 역). 김영사. (영어 원작은 1993년 출판).

Novak, J. (1990). Concept mapping: A useful tool for science education. *Journal of Research in Science Teaching, 27*(10), 937-949.

Pascaul-Leone, J. (1970). A mathematical model for the transition rule in Piaget's developmental stages. *Acta Psychologica, 32,* 301-345.

(1987). Organismic processes ~~for neo-piage~~tian theoris: Dialectical casual account of cognitive development. *International Journal of Psychology22,* 531-570.

Piaget, J. (1977). *The development of thought: Equilibration of cognitive structures.* New York: Viking.

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education, 66*(2), 211-227.

Pressley, M. & McCormick, C. (1995). *Advanced educational psychology for educators, researchers, and policymakers.* New York: Harper Collins.

Schoenfeld, A. (1989). Exploring the process problem space: Motes on the description and analysis of mathematical process. In C. Maher, G. Goldin & R. Davis (Eds.), *Proceedings of the eleventh PME_NA Conference* (pp.95-120). NJ: Rutergers Center for Mathematics, Science and Computer Education.[ED411133]

Steffe, L. P., Thompson, P. W., & Glasersfeld, E. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In Anthony E. Kelly & Richard A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp.267-306), New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers,

Stylios, C. D., & Groumpos, P. P. (1998). The challenge of modelling supervisory system using fuzzy cognitive maps. *Journal of Intelligent Manufacturing, 9,* 339-345.

Tall, D. & Vinner, S.(1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 31-54.

Cognitive Psychological Approaches on Analysing Students' Mathematical Errors

Kim, Bu Mi (Ewha Womans University, Graduate School)

This article presents new perspectives for analysing and diagnosing students' mathematical errors on the basis of Pascaul-Leone's neo-Piagetian theory. Although Pascaul-Leone's theory is a cognitive developmental theory, its psychological mechanism gives us new insights on mathematical errors.

We analyze mathematical errors in the domain of proof problem solving comparing Pascaul-Leone's psychological mechanism with mathematical errors and diagnose misleading factors using Schoenfeld's levels of analysis and structure and fuzzy cognitive map(FCM). FCM can present with cause and effect among preconceptions or misconceptions that students have about prerequisite proof knowledge and problem solving.

Conclusions could be summarized as follows:

1) Students' mathematical errors on proof problem solving and LC learning structures have the same nature.

2) Structures in items of students' mathematical errors and misleading factor structures in cognitive tasks affect mental processes with the same activation mechanism.

3) LC learning structures were activated preferentially in knowledge structures by F operator. With the same activation mechanism, the process students' mathematical errors were activated firstly among conceptions could be explained.

* **Key words** : Mathematical errors(수학적 오류), Pascaul-Leone's neo-Piagetian theory (Pascaul-Leone의 신피아제 이론), Fuzzy cognitive map(퍼지 인지 맵), levels of analysis and structure(구조분석단계), LC learning structures (LC 학습구조), Misleading factor(誤導요인).

논문접수 : 2004. 7. 2
심사완료 : 2004. 7. 29