大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 14 卷 第 3 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIV, No.3, 267-281. Aug 2004

수학 문장제 해결에 영향을 주는 언어적 · 인지적 요인 -혼합물 문제를 중심으로-

김 선 희*

방정식의 활용 문제로 다루어지는 문장제는 학생들의 흥미를 유도하고 수학의 유용성을 보여줄 수 있는 것이지만, 학생들이 해결하기에는 여러 어려움이 있다. 본 연구는 학생들이 수학 문장제를 해결하는데 영향을 줄 수 있는 요인들을 언어적 측면과 인지적 측면에서 조사하였다. 언어적 요인에는 텍스트 기반, 실세계, 상황 모델이 있었는데, 학생들은 문장의 텍스트 기반에서 방정식의 상황 모델로 해석하는 것을 어렵게 생각하고 있었으며, 상황 모델에서 학생들은 많은 오류를 보였다. 인지적 측면에서는 방정식을 세우는 스키마와 해결 전략, 식의 복잡성 수준을 조사하였는데, 방정식을 세울 때 학생들은 복잡성 수준을 고려하기 보다는 교사의 지도 내용에 따라 전략을 선택하는 경향이 있었다. 그리고 설탕의 양이나 농도, 설탕물의 양을 혼동하는 경향이 강했다. 본 연구의 결과를 통해 문장제에서 학생들에게 제시되는 문제가 해결하기에 얼마나 복잡한지, 학생들이 주로 어떤 전략을 선택하는지, 방정식의 문제 유형별로 발생하는 오류에 대해 알 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

수학에서 문장제는 학생들이 현실적으로 경험하는 상황과 관련된 것으로 수학의 유용성을 드러내는 본질을 갖고 있어 교육적으로 중요하며, 학생들의 흥미를 유도할 수 있다. 하지만 학생들은 문장제의 언어 구조에 대한 이해가 부족하고 문제의 외형적인 정보에만 의존하고 수학적 식을 도출하지 못하여 문장제 해결에 성공하지 못하는 경우가 많다. 뿐만 아니라 학생들은 수학의 유용성과 흥미를 유발하려는 교육적 의도를 깨닫지 못한 채 문장제를 어렵다고 인식하고 해결조차 하지 않으려는 기피 현상을 보이기도 한다. 이러한 경향을 해결하기 위해서는 문장제 해결에 어떤 요인이 영향을 주는 것인지를 살펴봄으로써 학습지도에서 무엇이 중요하고 고려되어야 하는지의 시사점을 얻어야 할 것이다.

지금까지 문장제의 해결에 영향을 주는 요인을 밝히고자 한 연구는 많이 있었다. 문장제에 사용되는 언어 형식에 대한 경험 부족으로 학생들이 의미론적 구조에 대한 암묵적 이해를 하지 못해 문제해결에 성공하지 못한다는 결과를 얻기도 했고(Cummins, 1991), 덧셈 문제를 '결합', '변화'. '비교'로 분류하거나(Carpenter, Moser, Romberg, 1982; De Corte와 Vershaffel, 1981; De Corte, 1985; Nesher 등, 1982), 곱셈 문제를 '비', '비율'. '사상', 'Cartesian multi- plication', '다중 비교'로 분류하여(Greer, 1994; Vergnaud, 1983; Nesher, 1988) 문장제 해결 요인을 구조 파악으로 본

* 이화여자대학교 강사, ilovemath@empal.com

연구도 있었고(Nesher, Herkovitz, & Novotna, 2003, 재인용), Polya의 문제해결 단계에 의해 학생들의 인지적 구조를 정보처리 과정으로 연구하기도 했다(Bransford와 Stein, 1984; 김영채, 1995, 재인용). 이처럼 문장제 해결과 관련된 연구는 학생들이 문장제 자체의 텍스트에서 어려움을 경험할 수 있다는 언어적 측면, 학생이 갖고 있는 지식과 표현, 구조 파악 등의 인지적 요인 등을 주로 조사하였다. 하지만 이 연구들은 언어와 인지적 접근 하나에 초점을 둔 것이었다. 학생들은 문장제의 해결과정에서 문장제 텍스트 자체를 이해하고 그것을 수학 언어로 바꾸는 인지 과정을 경험해야 하므로, 텍스트 자체의 언어적 분석과 학생의 인지 과정에 대한 분석은 문장제에 영향을 주는 요인으로 함께 조사되어야 한다. 이에 본 연구에서는 학생들이 문장제 해결에서 많은 어려움을 겪고 있는(이정은 · 김원경, 1999) 혼합물 문제를 중심으로, 문장제 해결에 영향을 주는 요인을 언어적 측면과 인지적 측면으로 살펴보려 한다.

언어적 측면에서는 학생들이 해석하고 표현해야 하는 문장제 텍스트에서 파악해야 하는 실세계 상황, 문장제 텍스트 자체, 텍스트에서 방정식으로의 해석 세 가지에 초점을 두고 문제해결에 영향을 주는 요인을 조사할 것이다. 문장제는 학생들에게 정보를 제공하는 문제 텍스트에 대한 이해, 그리고 정보 사이의 관계를 방정식으로 표현하여 풀고, 해답을 해석하는 과정으로 해결되는데, 이러한 복잡한 과정은 단순히 알고리즘을 적용하여 해결하는 수학문제와 다른 양상을 지니며 복잡한 인지적 처리를 요구한다. 이렇게 여러 절차를 거치는 과정은 학생들의 문장제 해결을 더 어렵게 할 수도 있으며, 학생들이 선택한 전략과 방정식을 여러 가지로 표현하게 할 수도 있다. 본 연구의 인지적 측면에서는 똑같은 상황을 여러 각도에서 구성한 문제유형을 통해 그 문제를 해결하는데 적용되는 스키마와 해결 과정의 복잡성 정도, 그리고 사용가능한 전략을 분석하여, 학생들이 문제를 해결하는데 영향을 주는 인지적 요인들을 조사하고자 한다.

Ⅱ. 문장제에 대한 선행 연구

문장제는 문제 상황이나 표현이 일상적인 문장으로 서술되어 있어, 그 문제를 해결하기 위해 학생들은 수식이나 기호 등을 써서 일상 언어로 쓰여진 문장제의 텍스트를 수학 언어로 바꾸고 방정식 등을 풀어야 한다. 문장제를 해석하여 수학언어로 표현하고 수학언어의 조작을 통해 해답을 찾고 문제 의미에 맞는지 확인하는 해결 과정에 무엇이 영향을 줄 수 있는지 언어적 측면과 인지적 측면에서 살펴볼 수 있다.

1. 언어적 측면

문제해결에 대해 설명하고 이해하기 위해 언어적 접근을 시도한 Kintsch(1986)는 문장제에서 여러 구인을 발견하였다. 그는 '텍스트 기반(text base)'과 '상황 모델(situation model)'의 개념을 도입하여, 독자나 청자가 이해의 과정에서 구성하는 텍스트의 정신 표상을 텍스트 기반이라 하고, 텍스트로부터 묘사된 상황에 대한 정신 표상을 상황 모델이라 하였다. '텍스트 기반'은 문장의 형식을 취하며 텍스트의 문장과 그 조직 사이의 일관된 관계를 반영하는 것이고, '상황 모델'은 텍스트에 의해 묘사된 것의 정신 지도, 텍스트로부터 도출된 산술 구조, 텍스트에서 주어진 정보로부터 구성된 조작 절

차가 될 수 있다. Kintsch의 아이디어는 문장제와 관련된 여러 연구에 적용되었는데, English & Halford(1995)는 계산 문제의 해결에서 텍스트 기반을 문제-내용 모델, 상황 모델을 문제-상황 모델로 하고 여기에 수학적 모델을 추가하여 문제해결의 도식을 만들었다. 또 Nesher, Hershkovitz, & Novotna(2003)는 문장제의 고찰에서 텍스트 기반과 상황모델 뿐 아니라 '실세계 상황'이 포함되어야 함을 지적하고, 세 가지 양의 비교 문제에서 학생들의 일상생활의 지식에 의한 실세계 해석이 문제해결에 영향을 주었음을 보여주었다.

또, 언어적 측면에서 문장제를 연구한 MacGregor & Price(1999)는 언어적 능숙함을 상징, 구문론, 모호함의 메타-언어적 자각으로 보고, 대수 학습에서의 성공과 언어의 관련성을 조사했다. 이들은 메타-언어적 자각이 낮을 때 성취도 점수가 높지 못하다고 했다. 메타-언어적 자각은 언어 사용자가 텍스트의 구조적, 기능적 특징을 반성하고 정보를 의사소통하는 방법을 선택하는 능력으로, 구조를 분석하고 표현에 대한 선택을 하고 식을 조작하는 것이 수학에 본질적이기 때문에 일상 언어에서의 메타-언어적 자각이 대수 언어에서의 이해에 영향을 줄 수 있다고 했다.

이외에도 Baller & Cunninghan(1982)은 문장제에 쓰인 일상 언어를 수학 언어로 전환함에 있어 학생들이 어려움을 갖고 있음을 지적하였고, Cummins(1991)는 문장제 해결을 위해 문제를 구조로 표현할 때 명확한 용어로 간결하게 사용하는 것이 문제해결에서 성취도 향상에 영향을 줄 수 있음을 시사하였다.

언어적 측면에서 문장제의 해결에 영향을 준 요소에 대한 여러 선행연구를 살펴보면, 어떤 표현으로 나타난 언어를 대상으로 했는지, 그리고 그 언어의 해석을 어떻게 해석했는지, 일상 언어와 수학 언어를 어떻게 연결할 수 있는지와 관련되어 있다. 본 연구는 이를 기호의 요소인 대상체, 표현체, 해석체로 설명하고자 하며, Nesher, Hershkovitz, & Novotna(2003)가 제시한 세 가지 상황에 주목하여 이것을 알아보고자 한다. 문장제의 언어는 그 언어 자체 뿐 아니라 언어를 해석하는 상황과 언어가 담고 있는 의미가 함께 고려되어야 하므로 단순히 문제 자체의 언어에만 주목할 수는 없으며 언어의 표현과 그 언어가 가리키는 대상, 해석과 관련하여 고찰되어야 한다. 문장제의 언어에서 초점을 두어야 할 첫 번째는 실세계가 문장으로 묘사된 텍스트 기반으로, 문제 자체의 언어이다. 둘째는 실세계 상황의 구성원 사이에 존재하는 관계의 상황 모델로, 방정식의 수학 언어이다. 학생들은 문장제에 포함된 내용을 수학적으로 해석하여 상황 모델인 방정식으로 나타내야 하며 방정식 또한 문장제 해결의 언어적 요인이다. 셋째는 실세계 상황의 언어로, 텍스트 기반과 상황 모델의 해석과 표현에 영향을 줄 수 있는 것이다. Kintsch는 텍스트 기반과 상황 모델을 정신적인 표상으로 정의했으나 문제를 이해한 표상은 문제해결 과정에서 외적으로 드러나므로 학생들이 해석하고 표현해야 하는 언어적 요인으로 다루기로 한다. 본 연구에서는 학생들이 이 세 가지 요인을 이해하고 표현해야 하며 이것의 표현과 의미에 대한 해석이 문장제 해결에 동반되어야 하는 것으로 보고, 그에 대한 학생들의 생각과 오류를 조사한다.

2. 인지적 측면

학생들의 인지적 측면에서 문장제와 관련한 연구는 주로 스키마와 학생들이 범하는 오류를 분석해왔다.

스키마는 핵심 개념에 대한 정보, 이 개념을 언제 어떻게 사용할 지에 대한 지식사이의 관계를 포함하는 것으로, 대상이나 사건의 부류가 응집되고 단순화된 표현이다(Fischbein, 1999). Nesher & Herschkovitz(1994)는 학생들의 문장제 해결을 조사하면서, 학생들이 배운 것을 반성하고 실험할 때 구성과 재구성을 통해 수학적 스키마를 수정했고 이 스키마의 상세함 정도가 학생들이 주어진 문제들을 분류하고 해결하는 방법에 영향을 준다고 하였다.

또 Nesher, Hershkovitz & Novotna(2003)는 세 양의 비교를 S-P(공유된 부분) 스키마와 H(위계적) 스키마, S-W(공유된 전체)의 스키마로 나누고, 이 스키마를 통해 복잡성의 수준을 도출하기도 했다. 본 연구에서는 혼합물 문장제에서 똑같은 상황을 여러 유형으로 제시하여 각 문제마다 학생들이 처리해야 하는 인지 과정을 학생이 표현하는 스키마로 알아보고, 학생들이 문제해결에서 접하는 복잡성의 수준과 문제해결의 전략을 살펴볼 것이다.

문장제의 해결에 영향을 미치는 요인은 학생들이 범하는 오류에 의해서도 살펴볼 수 있다. 김영채(1995)는 문제해결에서 발생하는 오류가 문제해결의 접근 방식, 기질 내지 태도에서 유의해야 할 장애와 함정을 철저히 분석하지 않고 생각하고 싶은 대로 생각하고, 해결 방법을 한 가지 방법에 얽매이는 기능 고착, 쉽게 떠오르는 정보에 의지하는 것으로 파악하였다. 오세경(1995)은 수학 학습지도에서 문제해결 과정을 관찰하고 분석하여 오류의 요인을 수학에 대한 두려움, 용어와 정의에 익숙하지 못함, 기호에 익숙하지 못함, 응용력 부족, 논리적 사고 기피, 계산 능력 부족으로 분류한 바 있다. 주익한과 김영국(1997)은 문제해결 과정에서 Polya의 문제해결 단계에 따라 성취도 집단별로 실패 경향과 Bloom의 교육목표에 따른 인지 영역별 실패 경향을 분석했는데, 학생들이 계획 수립에서 가장 많은 실패를 하였다고 한다. 이들의 연구에서는 특히, 상위 집단은 문제의 이해에, 중위 집단은 계획 수립과 실행 단계가 부족하며, 하위 집단은 문제의 이해와 계획 수립에서 많은 실패를 보였다. 이정은과 김원경(1999)은 중학교 1학년생을 대상으로 일차 방정식 문장제에 대하여 문제해결력과 그 사용 전략 및 오류 유형을 분석하였는데, 혼합물의 농도 문제에서 학생들이 특히 낮은 성취를 보였다고 한다. 그리고 학생들이 다양한 전략을 사용하지 못하고 혼합물 문제에 식을 세우지 못하거나 잘못된 식을 세운 경우가 많다고 보고하면서, 문장제 해결을 증진시키기 위해 다양한 스키마 구성을 이용한 학습지도 방안을 제안하였다. 그리고 그 지도방안은 보통 수준의 학생들에게 유의미한 것으로 나타났다고 한다.

본 연구는 인지적 측면의 위 선행연구를 토대로 혼합물 문장제 해결에서의 스키마와 복잡성 수준, 해결 전략을 조사하고, 문장제 해결에 영향을 주는 오류를 살펴볼 것이다.

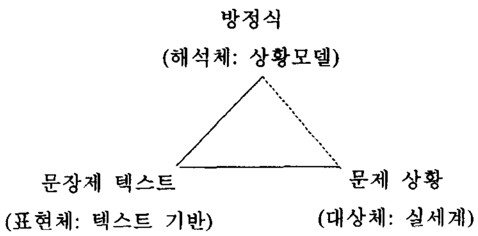
III. 혼합물 문제 해결과 관련된 요인

1. 혼합물 문제 해결에서의 언어적 요인

문장제의 텍스트는 일상 언어로 표현되어 있으나 그 문장제를 해결하는 학생들은 문장제에 포함되어 있는 실세계 의미를 해석하고 수학 언어로 표현하고 조작하여 다시 일상 언어로 해석해야 한다. 즉 학생들은 문장제의 텍스트를 읽고 실세계 상황에 대한 이해와 더불어 수학 언어의 표현을 해야 하며, 이는 텍스트를

그것이 가리키는 실세계 대상과 그에 대한 수학적 해석을 포함한 기호로 보게 한다.

Peirce는 기호(sign)가 대상체(object), 표현체(representamen), 해석체(interpretant)의 삼원적인 요소를 가진 것으로 보고, 표현체와 대상체의 지시 관계가 어떤 해석체에 의해 해석될 때 기호의 존재를 논했다(Trabant, 1996/2001, 재인용). 언어 또한 기호라고 할때, 이를 문장제에 적용하면 [그림 1]과 같이 나타낼 수 있다.



[그림 Ⅲ-1] 기호 모델로 본 문장제의 해결 구조

혼합물 문제의 텍스트는 실세계를 대상체로 한 표현체로 볼 수 있으며, 학습자는 문제 텍스트를 방정식으로 해석하여 문제를 해결해야 한다. 즉, 실세계, 텍스트 기반, 상황 모델로 구성된 문장제는, 실세계라는 대상체를 문장으로 표현한 표현체 텍스트를 문제해결자가 읽고 이해하여 상황모델의 해석체를 구성하고 수학의 방정식으로 해석해내어야 하는 것이다. 문장제를 읽고 해석하고 푸는 과정은 문장제 텍스트의 심층구조를 수학 방정식의 표층구조와 연결시키는 기호화와 해석화 과정이 된다. 본 연구에서는 문장제의 이해와 해결에서 고려되어야 할 언어적 요인이 [그림 1]에 나타난 세 가지 상황이라 보고, 학생들이 혼합물 문제 해결에서 나타난 여러 상황을 이해하는데 어떤 어려움이 있는지와 각각의 요인에서 발생하는 오류를 조사할 것이다.

2. 혼합물 문제의 유형

혼합물 문제는 설탕물이나 소금물 등의 혼합물을 소재로 한 농도 개념을 포함한다. 혼합물과 관련하여 방정식의 활용으로 등장할 수 있는 문제는 세 가지 내용으로 나눌 수 있는데, 첫째는 두 설탕물을 섞어 새로운 설탕물을 만드는 경우, 둘째는 설탕물에 들어있는 물을 증발시키거나 순수한 물을 첨가하여 새로운 설탕물을 만드는 경우, 셋째는 설탕물에 설탕을 첨가하여 새로운 설탕물을 만드는 경우이다. 이 세 가지 내용의 문장제는 세 가지 대상에 의해 구성된 구조를 갖는다. 즉, 첫 번째 혼합 문제의 경우는 설탕물 P와 Q의 합이 설탕물 R이 된다. 두 번째 경우는 설탕물 P에서 물 Q가 증발되거나 첨가되어 설탕물 R이 된다. 설탕을 첨가하는 세 번째 경우는 설탕물 P에 설탕 Q를 첨가하여 설탕물 R이 되는 것을 말한다. 이를 정리하면 <표 Ⅲ-1>과 같으며, 각각의 문제 상황 유형을 A, B, C라 부르기로 한다.

<표 Ⅲ-1> 혼합물 문제의 유형

문제 내용	문제 구조	문제 유형
혼합	P+Q=R	A
물 증발/첨가	P-Q=R	B
설탕 첨가	P+Q=R	C

대개 혼합물 문제에서는 설탕물의 양, 설탕의 양이나 농도 등을 요구하며, 이러한 문제를 해결하기 위해서는 설탕의 양이나 농도를 등가(等價)[1]로 한 방정식을 세우는 전략을 필요로

한다. 방정식을 풀기 위해서는 먼저 설탕물의 양이나 설탕의 양, 농도를 구하는 여러 식을 학생들이 알고 있어야 한다. 혼합물 문제에 필요한 식은 다음과 같이 농도, 설탕의 양, 설탕물의 양 세 가지 중 하나를 구하는 것이다.

- 5%의 설탕물 200g에 들어있는 설탕의 양
- 10g의 설탕이 들어있는 설탕물 200g의 농도
- 10g의 설탕이 들어있는 5% 설탕물의 양

그리고 문장제를 읽고 방정식을 구성하기 위해서는 혼합물 문제에 포함되어 있는 대상을 수와 미지수로 인식하고, 그 관계를 식으로 나타낼 수 있어야 한다. 어떤 요소가 미지수인가에 따라 세 가지 대상 P, Q, R을 포함한 문제 유형은 설탕물의 양이나 설탕의 양을 구하라는 9가지가 나올 수 있다. 즉, 같은 상황에서 미지수를 어느 대상으로 하는가에 따라 <표 Ⅲ-1>의 문제 유형 A, B, C에서 다음의 문제가 나올 수 있다.

A1. 5%의 설탕물 200g이 있다. 여기에 20%의 설탕물 몇 g을 섞으면 10%의 설탕물이 되겠는가?
A2. 5%의 설탕물에 20%의 설탕물 100g을 섞으면 10%의 설탕물이 된다고 한다. 5%의 설탕물은 몇 g 이었나?
A3. 5%의 설탕물 200g에 20%의 설탕물을 섞었을 때 생긴 설탕물 300g에 들어있는 설탕의 양은 몇 g인가?
B1. 5%의 설탕물 200g이 있다. 몇 g의 물을 증발시키면 10%의 설탕물이 될까?
B2. 5%의 설탕물에서 100g의 물을 증발시키면 10%의 설탕물이 된다고 한다. 5%의 설탕물은 몇 g이 있었을까?
B3. 5%의 설탕물 200g에서 물을 증발시켰다. 남은 설탕물 100g에 들어있는 설탕의 양은 몇 g인가?

C1. 5%의 설탕물 200g에 몇 g의 설탕을 첨가하면 20%의 설탕물이 되겠는가?
C2. 5%의 설탕물에 37.5g의 설탕을 첨가하면 20%의 설탕물이 된다. 5%의 설탕물은 몇 g이었을까?
C3. 5%의 설탕물 200g에 설탕을 첨가했다. 결과적으로 설탕물 237.5g에 있는 설탕의 양은 몇 g인가?

위의 문제는 본 연구에서 중1학생과 고2학생을 대상으로 혼합물 문제 해결을 검사할 때 제시되는 문제로 사용되었다. 각각에서 1과 2의 라벨이 붙은 문제(A1, A2, B1, B2, C1, C2)는 설탕물의 양을 구하라는 문제로 덧셈의 교환법칙에 의해 풀이 과정이 유사하지만, 제시되는 정보의 순서와 언어 이해에 있어 학생들이 이해하는 정도가 다를 수 있을 것으로 보고 분리하여 구성하였다. 3의 라벨이 붙은 문제(A3, B3, C3)는 설탕의 양을 구하라는 것으로 한 변에만 미지수가 있는 산술 방정식을 유도한다는 점에서 라벨 1, 2와 다르다.

3. 문장제 해결의 스키마와 전략

혼합물 문제는 구해야 할 것을 미지수의 대상으로 하여, 그 대상이 포함된 방정식을 만들어야 해결된다. 이러한 방정식을 만들기까지 학생들이 만든 표현을 스키마라 본다면, 문제 해결 과정에 필요한 표현들을 고려하여 문장제 해결에 영향을 주는 스키마를 살펴볼 수 있다.

1) 이종희와 김선희(2003)의 등호 개념 분석에 의하면 실제로 같은 값과 관련된 제한된 관계의 등호는 identity의 의미를 가지며 이것을 등가라 한다, 이것은 양변이 동일한 값을 산출한다는 것을 가리키며 (Herscovics & Kieran, 1980), 혼합물 문제에서 세운 방정식의 등호는 양변에 있는 농도나 설탕의 양이 같음을 나타내므로 등가라 할 수 있다.

먼저, 문제를 해결하기 위해 문제 유형에 따라 구해야 할 대상을 미지수 x로 놓는 것을 생각해볼 수 있다. 문제에서 요구하지 않은 대상을 미지수 y로 놓을 때 해결 과정은 복잡하게 바뀌며 복잡한 스키마를 갖게 된다. 예를 들어 A2의 문제에서, 5% 설탕물의 '설탕의 양'을 y라고 하면 문제를 해결한 후 다시 설탕물의 양을 구해야 하는 절차가 생기며, <표 Ⅲ-2>에서 보는 바와 같이 세우는 방정식이 복잡해진다.

<표 Ⅲ-2> A2 문제에서 미지수에 따른 방정식

미지수	방정식
설탕물의양(x)	$\frac{5}{100}x+\frac{20}{100}\times 100=\frac{10}{100}\times(x+100)$
설탕의 양(y)	$y+\frac{20}{100}\times 100=\frac{10}{100}\times(\frac{100}{5}\times y+100)$

본 연구에서 혼합물 문제는 세 가지 대상 P, Q, R로 된 구조를 갖는다. 각 대상의 설탕의 양이나 농도를 표현하는 식은 미지수에 의해 표현되기도 한다. x를 미지수로 하여 설탕의 양을 구하는 식을 $f_P(x)$라 해 보자. <표 Ⅲ-2>에서 설탕물의 양이 x인 경우 5%에 들어있는 설탕의 양은 $f_P(x)=\frac{5}{100}x$가 될 수 있다. 이때 방정식의 우변은 단순히 $f_R(x)$가 아니다. 설탕물의 양을 $h(x)=x\pm a$(a는 상수)라는 식으로 생각하여 구한 후 $f(h(x))$에 의해 표현되는 식이 된다. 즉 문제를 해결하는 과정이 한번에 하나의 공식을 써서 나타내어질 수 없는 복잡한 것이다. 이러한 과정을 문제 유형별로 정리하면 다음 <표 3>과 같다. 단, <표 3>의 내용은 설탕의 양을 등가로 식을 세운 전략에 한하여 분석된 것이다.

<표 Ⅲ-3> 혼합물 문제 해결에서의 스키마 분석

문제번호	미지수	방정식	전략
A1	x	$f_P(x)+f_Q(k)=f_R(h(x))$	SA11
	y	$y+f_Q(k)=f_R(h(f_R^{-1}(y)))$	SA12
A2	x	$f_P(k)+f_Q(x)=f_R(h(x))$	SA21
	y	$f_P(k)+y=f_R(h(f_R^{-1}(y)))$	SA22
A3	x	$f_P(k)+f_Q(h(k))=x$	SA3
B1	x	$f_P(x)-0=f_R(h(x))$	SB1
B2	x	$f_P(k)-0=f_R(-h(x))$	SB2
B3	x	$f_P(k)-0=x$	SB3
C1	x	$f_P(k)+x=f_R(h(x))$	SC1
C2	x	$f_P(x)+k=f_R(h(x))$	SC2
C3	x	$f_P(k)+h(k)=x$	SC3

<표 Ⅲ-3>에서 방정식의 구조는 <표 Ⅲ-1>의 문제 구조를 바탕으로 각 대상의 식을 함수로 표현한 것이며, 문제에서 구하라고 한 것을 미지수로 두었을 때는 x, 그렇지 않을 때는 y이다. $f_P(x)$는 x를 설탕물의 양이라는 미지수로 두었을 때 설탕의 양을 나타내는 식이며, 첨자 $_P$는 미지수의 지정된 대상의 농도에 따라 정해진 것이다. 문제 유형 B와 C는 구하라는 값이 농도나 설탕의 양을 구하는 식과 혼동되지 않으므로 성공에 이르는 스키마 분석에서 미지수를 x만 사용하여 나타내었다.

혼합물 문제를 해결하는 것은 어느 것을 미지수로 선택해야 할지, 그리고 무엇을 등가로 방정식을 세워야 하는지를 결정해야 하며, 이

에 따라 문제해결 전략이 결정된다. <표 Ⅲ-3>에서는 설탕의 양을 등가로 한 것이기에 그 전략은 S(설탕; sugar)로 시작하게 하였으며, 농도를 등가로 방정식을 세우는 전략을 선택한다면 C(농도; concentration)로 시작되는 것이 될 것이다. 각 문제를 해결하기 위한 전략은 복잡성을 가지며, 혼합물 문제 해결의 전략에서 학생들은 복잡성 지수가 낮은 전략을 선택하리라 예상된다.

4. 복잡성 수준

혼합물 문제를 해결하는 복잡한 과정은 어떤 유형의 문제가 더 어렵고, 어떤 전략의 선택이 더 어려운 것인지의 판단을 요구할 수 있다. 본 연구에서는 임의적이기는 하지만 Nesher, Hershkovitz & Novotna(2003)가 세 수의 비교 문제에서 복잡성 수준을 정한 것을 참조하여 각 문제 해결 전략의 복잡성을 측정하려 한다. 여기서 복잡성은 문제를 해결하기 위해 방정식을 세우고 답을 찾아갈 때 처리되는 인지 과정이 얼마나 복잡한지를 말한다.

문제를 해결하기가 복잡하다는 것은 미지수를 가지고 방정식을 나타내는데 여러 단계의 과정이 사용된다는 것을 뜻한다. 예를 들어, A1에서 설탕물의 양을 x로 했을 때 $f_P(x)$는 설탕의 양을 구하는 공식으로, 공식의 암기와 대입을 요구한다. 이것으로 $f_P(x)$는 복잡성 지수 1을 취할 수 있다. x가 아닌 상수 k를 대입하여 설탕의 양을 구하는 $f_Q(k)$에서도 마찬가지이며, 따라서 $f_Q(k)$의 복잡성 지수도 1이다. 그리고 $h(x)$를 구한 후 $f_R(x)$에 합성하는 $f_R(h(x))$는 x에 의해 바로 표현되지 않는 두 단계의 과정을 필요로 하며, $h(x)$의 지수 1에 합성하는 지수 2를 추가하여 복잡성 지수를 3으로 정한다. 그리고 양변을 '어떤 값이 같다'라고 정하는 등가의 등식을 세우는 것을 지수 1로 한다. 따라서 전략 SA11의 복잡성 지수는 1+1+3+1로 6이다. 그리고 전략 SA12의 경우 구하는 양을 미지수로 정하지 않는다면 $f(x)$의 역함수 계산을 하여 구해야 하므로, 지수 2가 추가된다. 이와 같은 복잡성 지수를 <표 Ⅲ-3>의 각 전략에 대하여 구하면 다음 <표 Ⅲ-4>와 같다. 같은 상황에서 어느 것을 미지수로 하는지에 따라 문제를 해결하기 위한 방정식을 세우는 복잡성이 달라질 수 있다. 특히 문제 유형 중에서 R의 대상을 미지수로 한 것은 미지수가 한 변에만 있는 산술방정식으로 해결될 수 있는데, 이것의 복잡성 지수가 다른 것에 비해 낮다.

<표 Ⅲ-4> 각 전략의 복잡성 지수

전략	복잡성 지수
SA11	1+1+3+*1*=6
SA12	1+5+2+*1*=9
SA21	1+1+3+*1*=6
SA22	1+5+2+*1*=9
SA31	1+3+*1*=5
SB1	1+4+*1*=6
SB2	1+3+*1*=5
SB3	1+*1*=2
SC1	1+3+*1*=5
SC2	1+3+*1*=5
SC3	1+1+*1*=3

5. 문장제 해결에서의 오류

학생들은 문장제를 해결하면서 여러 오류를 범하여 문제해결에 성공하지 못할 수 있다. 이러한 오류는 학생들이 문제를 해결하면서 접한

실세계, 텍스트 기반, 상황 모델의 언어적 요인에서 각각 찾아볼 수 있다. 혼합물 문장제의 언어적 구조에 의해 예측되는 오류의 유형은 <표 Ⅲ-5>와 같다.

<표 Ⅲ-5> 혼합물 문제에서 나타날 수 있는 오류

문제 상황	오류 유형	세부 항목
실세계	실생활의 맥락적 의미를 잘못 도입	① 그림으로 제대로 나타내지 못하여 식을 잘못 세운 경우
	수학적 경험	② 예전에 풀었던 전략을 적용
텍스트 기반	문장의 언어를 잘못 해석	③ 방정식에서 다루는 대상이 P, Q, R 세 가지인 것을 인식하지 못함
		④ 각 대상에 주어진 정보를 잘못 이용
상황 모델	개념의 혼동	⑤ 설탕의 양과 농도를 혼동
		⑥ 순수한 물과 설탕을 혼동
		⑦ 설탕의 양과 설탕물의 양을 혼동
		⑧ 설탕물의 양과 농도를 혼동
		⑨ 설탕물에 설탕이 들어있음을 인지하지 않음
		⑩ 하나의 미지수가 여러 대상을 뜻함
	부적절한 수학적 지식	⑪ 설탕의 양 구하는 식을 잘못 앎
		⑫ 농도+농도=농도
	계산상의 기술적 오류	⑬ 풀이과정 없이 수치적 값만 제시했으나 틀림
		⑭ 계산상의 오류
		⑮ 덧셈과 뺄셈의 혼동
	부적절한 전략	⑯ 거꾸로 풀기를 시행하다 실패

실세계에서는 실생활의 지식을 이용하거나 예전에 풀어본 문제해결의 경험이 오류가 되며, 예전에 푼 수학적 경험은 상황 모델에서의 오류를 일으키기도 한다. 텍스트 기반에서의 오류는 문제 자체의 언어를 잘못 해석하는 것이라 할 수 있다.

상황 모델의 오류는 혼합물 문제 해결에 필요한 개념적 대상, 부적절한 수학적 지식, 계산상의 오류나 부적절한 전략 사용에 의해 발생할 수 있다.

Ⅳ. 학생들의 혼합물 문제 해결

이 장에서는 학생들이 문장제 해결에서 실제로 선택한 전략과 복잡성 지수를 조사하고 문제 성공과의 관계를 알아본다. 그리고 각 전략마다 나타난 학생들의 오류도 살펴보고자 한다.

1. 연구 대상

본 연구를 위해 혼합물 문제 해결 과정을 보여준 학생들은 일차방정식의 활용을 학습한 중학교 1학년 학생 85명과, 방정식과 부등식의 활용을 학습한 일반계 고등학교 자연계열 2학년 학생 77명이다. 혼합물 문제 해결은 학생들에게 어려움을 줄 수 있기 때문에, 학습한지 얼마 되지 않는 내용이 되는 학생들을 대상으로 선정하였다. 학생들은 20분 동안 혼합물 문장제를 해결했으며, 문제를 풀지 못하더라도 어떤 전략을 사용하면 될지 문제지에 생각을 적었다. 각 학생들은 A1~C3까지의 문제 중에서 A, B, C 문제 유형 중 임의로 하나의 문제를 배정받아 해결했다. 따라서 학생들이 푼 혼합물 문제는 각 유형에서 하나씩 모두 3개이다.

학생들이 문제를 해결하는 과정에서 사용한 문제해결 전략과 오류가 조사되었고, 학생들에게 문장제가 이해되는지, 친숙한 문제는 무엇인지, 문제를 해결하면서 어떤 점이 어려웠는지를 답하게 하였다.

2. 문장제 해결의 언어적 요인

본 연구는 문장제 해결에 대한 언어적 접근으로 실세계 상황과 텍스트 기반의 문장, 방정식의 상황모델이라는 세 요소를 파악했다. 각각에 대해 학생들이 생각하는 바를 질문한 결과는 다음과 같다.

먼저, 텍스트 기반의 문장제를 읽고 이해할 수 있는지를 질문한 결과 46.5%의 학생들이 문제가 이해하기에 쉽다고 하였다. 명확하고 간결한 문장으로 제시한 문제이기 때문에 학생들이 문제를 이해하는 데에는 별 문제가 없었다. 그러나 문장이 단순하게 설정되어 있었음에도 불구하고, 설탕물에 설탕을 첨가하여 설탕물을 만드는 C유형의 문장제를 이해하기 어렵다고 대답한 학생들이 17%가 있었다.

문제의 텍스트가 가리키는 실세계 상황에 대하여 학생들의 생활이나 수학적 경험과 친숙한지를 질문했을 때, 학생들은 각 문제를 보통 이하의 친숙한 정도라고 했다. 5단계 척도로 친숙함의 정도를 나타내었을 때, A유형은 3.09, B유형은 2.90, C유형은 2.69의 평균이었으며, 중·고등학생 사이에서 C유형의 친숙 정도가 유의수준 .05에서 다르게 나타났다. 고등학생들이 C유형을 더 친숙하게 생각하고 있었다. 하지만 이러한 혼합물 문제가 실세계나 과학실험 등의 경험에서 친숙하기 보다는 수학 시간에 많이 풀어본 문제라는 점에서 친숙하다는 대답을 하여 문장제가 수학에서만 활용되는 정형화된 것임을 알 수 있었다. 따라서 혼합물 문장제 해결에서 학생들이 실세계 경험에서 갖고 있는 지식이 활용되지는 않았다.

상황을 표현한 텍스트 문장을 해석하여 방정식으로 표현하는 것은 문제해결에서 중요한 과정이다. 방정식의 상황 모델을 표현하고, 방정식을 푸는 일은 문제해결 과정에 필수적인 일이며, 이러한 상황 모델에 대해서 거의 모든 학생들은 방정식을 푸는 것보다 방정식을 세우는 것이 어렵다고 하였다. 방정식을 세우고 푸는데 있어 나타난 오류는 나중에 분석된다.

방정식의 활용에서 많이 등장하고 있는 혼합물 문제를 해결하는 데에는 텍스트 기반, 실생활, 상황 모델의 세 가지 언어적 요인이 있으나, 혼합물 문제 자체는 학생들의 실생활과 괴리가 있는 것으로 실세계 지식이 별로 적용되지 않으며, 텍스트 기반인 문제를 이해하는 것에 학생들이 큰 어려움을 갖고 있지는 않았다. 하지만 상황 모델인 방정식을 세우는 것을 어렵게 여기고 있었다.

3. 학생들의 문제해결 스키마와 전략

각 문제 유형별로 학생들이 문장제를 성공적으로 해결했는지를 요약해보면 다음 <표 Ⅳ-1>과 같다. 같은 상황에서 다른 대상을 미지수로 하여 문제를 세 가지로 제시했을 때, A유형에서는 A3, A1, A2의 순으로 학생들이 문제해결에 성공하는 경향이 있었다. 하지만 고2학생들은 A1을 더 해결하지 못하는 경향이 있었다. B유형에서는 B1, B3, B2의 순서였고, 고2학생들은 B3을 잘 해결한 반면 중1학생들은 B1의 성공률이 더 높았다. C유형에서는 성공률이 C3, C1, C2의 순이었다. 같은 상황이 주어지더라도 어느 대상을 미지수로 하는가에 따라 문제해결의 성공률이 달라질 수 있다는 것은 문제에서 제공하는 정보의 순서를 조직하는 것이 중요함을 의미한다 하겠다. 그리고 A1과 B1의 유형을 제외하면 중1학생들의 문제해결 성공률이 좋지 않았다. 고등학생들보다 혼합물 문제를 해결한 수학적 경험이 부족한 탓으로 보인다.

학생들은 문제가 주어지면 구해야 할 것을 미지수로 하여, 무엇을 등가로 등식을 세울지

<표 Ⅳ-1> 혼합물 문제 해결에서의 성공율

	A1	A2	A3
고2	58.3%	70.4%	88.0%
중1	65.5%	42.3%	56.7%
전체	62.3%	56.6%	70.9%
	B1	B2	B3
고2	52.0%	33.3%	76.0%
중1	65.5%	15.4%	33.3%
전체	59.3%	24.5%	52.7%
	C1	C2	C3
고2	32.0%	22.2%	91.7%
중1	16.7%	7.7%	51.9%
전체	23.6%	15.1%	70.6%

(단, %는 학년 내에서의 성공 비율)

전략을 결정하고, 방정식을 세우고, 해결하여 답을 얻는 과정을 경험해야 한다.

이러한 과정을 본 연구에서는 스키마에 의해 조사하였다. 먼저, 학생들이 문장제 해결을 위해 미지수를 잘 결정하는지를 조사했다. A1유형에서 구하라는 것이 아닌 것을 미지수로 한 중1학생 1명을 제외하면, 학생들은 대개 미지수를 잘 정하였다. 70%이상의 학생들이 문제에서 구하라는 것을 미지수로 결정하여 전략을 세웠다. 나머지는 미지수를 보여주지 않거나 문제해결 시도를 하지 않은 학생들이다.

학생들이 문제를 해결할 때 선택하는 전략은 크게 두 가지이다. 설탕의 양을 등가로 방정식을 세우는 전략 S와 농도를 등가로 방정식을 세우는 전략 C이다. 어떤 전략을 세우는지 밝혀지지 않거나 미지수를 정한 후 어떠한 접근도 보이지 않은 학생을 제외하고, 문제 유형별로 학생들이 어떤 전략을 사용했는지를 <표 Ⅳ-2>과 같이 조사했다.

학생들이 어떤 전략을 사용하는가에 따라 방정식을 세우는 복잡성의 정도가 달라진다. 고2 학생들은 A3, B3, C3의 문제에서만 설탕물의 양을 등가로 방정식을 세우는 S전략을 사용한 적이 있었고, 다른 문제에서는 주로 C전략을 사용했다. 중학생들은 모든 문제에서 S전략을 사용하는 경향이 있었다. 혼합물 문장제를 해결하면서 학생들이 되도록 복잡성이 낮은 전략을 사용할 것이라 기대되었으나, 학생들의 문제해결 결과를 볼 때 교사의 교수 접근이 학생들의 문제해결 전략이 더 큰 영향을 주고 있는 것으로 나타났다. 연구에 참여한 학생들을 지도한 교사와 면담을 나눈 결과 고등학교 교사는 방정식의 활용문제를 전략 C로, 중학교 교사는 전략 S로 설명을 했다고 한다. 따라서 학생들이 복잡하지 않은 전략을 선호하기 보다는 교사에게서 배운 것을 따라 전략을 선택하는 경향이 있었다.

<표 Ⅳ-2> 혼합물 문제 해결에서 사용된 전략

학생	전략	A1	A2	A3
고2	S	8.3%	38.5%	92.0%
	C	66.7%	53.8%	8.0%
중1	S	89.3%	73.1%	83.3%
	C	0.0%	11.5%	0.0%
전체	S	51.9%	55.8%	87.3%
	C	30.8%	32.7%	3.6%
	전략	B1	B2	B3
고2	S	4.0%	23.1%	73.9%
	C	52%	42.3%	26.1%
중1	S	82.8%	50.0%	70.0%
	C	0.0%	3.8%	0.0%
전체	S	46.3%	36.5%	71.7%
	C	24.1%	23.1%	11.3%
	전략	C1	C2	C3
고2	S	4.0%	14.8%	95.5%
	C	56.0%	37.0%	0.0%
중1	S	73.3%	50.0%	79.3%
	C	3.3%	3.8%	0.0%
전체	S	41.8%	32.1%	86.3%
	C	27.3%	20.8%	0.0%

(단, %는 학년 내에서의 문제 해결 전략 비율)

다음으로, 학생들의 전략이 문제해결의 성공에 영향을 주는지 조사하였다. 학생들이 어느

전략을 선택했는지에 따라 성공에 차이가 있었는지 교차분석을 통해 검증한 결과 B2, C1의 문제에서 유의미한 결과가 나타났다. B2문제에서는 전략 S를 사용했을 때 성공률이 21.1%이고 전략 C를 사용했을 때 성공률이 66.7%로 전략 C를 사용하는 것이 유리하다고 할 수 있다. B2의 문제에서 전략 S나 C를 사용했을 때 복잡성 지수는 모두 5로 어느 전략을 사용하든지 식이 복잡해지는데 차이가 없으나 성공에서는 차이를 보였다. C1의 문제에서는 전략 S를 사용했을 때 성공률이 17.4%이고 전략 C를 사용했을 때 성공률이 60%로, 전략 C를 사용하는 것이 유리했다. 그리고 전략 S의 복잡성은 5이고 전략 C의 복잡성은 6으로 전략 C가 식을 세우는데 더 복잡하지만, 복잡성의 정도가 문제해결의 성공에 영향을 주는 요소가 아니었다. 이를 볼 때, 학생들이 혼합물 문제에서 성공하는가는 식의 복잡성이 아니라 그 식을 세우고 해결하는 과정에서의 오류가 더 결정적인 역할을 하리라 본다.

4. 혼합물 문제 해결에서의 오류

학생들이 혼합물 문제를 해결하면서 예측된 오류는 <표 Ⅲ-5>와 같았다. 그리고 학생들이 실제로 문제를 해결하면서 보여준 오류의 발생 빈도를 조사하였을 때 <표 Ⅳ-3>과 같았다. 예전에 풀었던 전략을 그대로 적용한 오류 ②는 ⑤~⑨의 오류와 중복된 것이다.

문제 유형마다 학생들이 이해해야 하는 내용과 방정식은 다르다. 여기에서 나타나는 오류로 설탕물에 설탕물을 섞는 A유형에서는 설탕과 농도를 혼동하는 사례(⑤)가 많았다. 즉 설탕의 양을 등가로 식을 세울 때, 설탕의 양에 농도를 더하거나, 농도를 등가로 식을 세울 때 설탕의 양 대신 농도를 대입하는 경우, 설

<표 Ⅳ-3> 혼합물 문제에서 나타날 수 있는 오류 빈도수

세부 항목	A유형	B유형	C유형
① 그림으로 제대로 나타내지 못하여 식을 잘못 세운 경우	1	1	·
② 예전에 풀었던 전략을 적용	20	17	28
③ 방정식에서 다루는 대상이 P, Q, R 세 가지인 것을 인식하지 못함	3	2	·
④ 각 대상에 주어진 정보를 잘못 이용	4	10	2
⑤ 설탕의 양과 농도를 혼동	10	2	4
⑥ 순수한 물과 설탕을 혼동	·	10	·
⑦ 설탕의 양과 설탕물의 양을 혼동	1	5	1
⑧ 설탕물의 양과 농도를 혼동	1	·	1
⑨ 설탕물에 설탕이 들어있음을 인지하지 않음	8	·	22
⑩ 하나의 미지수가 여러 대상을 뜻함	4	6	4
⑪ 설탕의 양 구하는 식을 잘못 앎	4	2	3
⑫ 농도+농도=농도	2	·	·
⑬ 풀이과정 없이 수치적 값만 제시했으나 틀림	·	1	2
⑭ 계산상의 오류	2	4	5
⑮ 덧셈과 뺄셈의 혼동	2	4	1
⑯ 거꾸로 풀기를 시행하다 실패	·	·	1

탕에 농도를 더하여 어떤 식을 도출하려 하거나, 설탕의 양끼리 더하여 농도라고 식을 세운 경우 등이 있었다. 혼합물 문제에서 어떤 전략을 사용하든지, 그것을 방정식으로 나타내는 과정에서 이러한 오류가 발생할 수 있었다. 설탕물에서 물을 증발시키거나 첨가하는 B유형에서는 물을 설탕으로 인식하여 식에 사용하거나(⑥), 다른 대상에 주어진 정보를 그 대상에 사용하여(④) 정보를 잘못 이용하는 오류가 많았다. 교과서의 문제에서도 흔히 볼 수 있는 문제 유형임에도 불구하고, 학생들은 등가의 식을 세우는 과정에 옳지 않은 식과 잘못된 정보를 적용한 것이다. 설탕물에 설탕을 첨가하는 C유형에서는 설탕물의 양과 설탕의 양을 혼동하는 오류(⑨)가 특히 많았다. 설탕물의 양

에 설탕의 양을 더하여 새로운 설탕물의 양을 구해야 하지만, 첨가되는 설탕의 양을 무시하거나 설탕물의 양 안에 설탕이 없는 것으로 인식하는 식이 나왔다.

학생들의 오류 대부분은 개념을 혼동하고, 구해야할 대상을 무시하는 상황 모델에서의 오류였다. 이러한 오류는 식을 세울 때 '설탕의 양이 서로 같다'든가 '농도가 서로 같다'라는 등가 개념이 부재하여 눈에 보이는 정보를 혼합해서 알고 있는 식을 세운 경향으로 보인다. 학생들이 해결 과정을 쓴 글을 보면, 어떤 해결 전략을 고수하는 경향이 있을 때 그런 전략을 사용했던 수학적 경험에 의해 설탕물의 양임에도 설탕의 양이라 하고 설탕의 양인데도 농도로 하여 식을 세우는 경향이 있었다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 방정식의 활용에서 학생들이 많은 어려움을 갖는 혼합물 문제에 초점을 두어 문장제 해결에 영향을 주는 요인을 언어적, 인지적 측면으로 살펴보았다. 언어적 요인에서는 실세계, 텍스트 기반, 상황 모델의 세 가지를 중심으로 학생들이 느끼는 어려움이나 오류를 조사했다. 혼합물 문제에서는 실생활 경험보다는 그와 관련된 문제를 해결한 수학적 경험이 학생들의 문제에 대한 친숙함과 오류에 영향을 주는 것으로 나타났으며, 단순하게 정련된 문장의 텍스트 기반은 학생들이 문제를 이해하는데 별 어려움이 없었다. 하지만 방정식의 상황 모델을 만드는 것을 학생들은 어려워했다. 그리고 상황 모델에서는 등가의 개념으로 방정식을 세워야 하는데 여기서 학생들의 오류가 많이 나타났다.

인지적 측면에서는 혼합물 문제의 여러 유형에서 방정식을 세우는 스키마와 해결 전략, 식의 복잡성 수준을 설정하고 그에 대한 학생들의 응답을 분석하였다. 학생들은 복잡성이 낮은 해결 전략을 선택하여 문제를 해결할 것이 기대되었으나 그보다는 교사의 교수에 의한 전략에 더 많이 의존하였다.

그리고 혼합물 문제 해결에서 학생들의 오류를 조사해 보았을 때 설탕의 양이나 농도, 설탕물의 양의 대상을 혼동하는 경향이 강했으며, 특히 유형 C에서는 설탕물에 첨가되는 설탕의 양을 무시하고 식을 세우는 경향이 있었다.

본 연구는 혼합물 문제를 해결하면서 나타나는 언어와 인지적 과정과 학생들의 오류에 대하여 자세한 분석을 실시하였다. 일반적으로 방정식의 해결에서 발생하는 오류의 유형이나 지도 방법의 효과에 대한 연구들이 있었으나 단순한 문제 하나라도 학생들에게 제시되는 언어나 학생들의 언어 해석과 표현, 그리고 문제를 해결하면서 겪게 되는 인지적 경험 등을 자세히 알아보고 그를 통해 학생들이 어떤 아이디어를 갖고 문제를 해결할지, 얼마나 복잡하게 전개될지 예측해 보고, 학생들이 범할 수 있는 오류에 대하여 자세한 분석을 하는 것은 문장제의 학습 지도에 도움이 될 것이다.

본 연구의 결과를 통해 학생들은 문제 자체의 언어 보다는 그에 대한 방정식의 상황 모델을 만들고 다루는 것을 더 어려워하고 거기서 많은 오류를 범하는 것을 알 수 있었다. 그리고 학생들에게 제시되는 문제 유형이 얼마나 복잡한지, 어떤 전략을 선택할 때 문제해결에 성공할 수 있는지, 방정식의 문제 유형별로 발생하는 오류에 대해서도 알 수 있었다. 단순히 혼합물 문제에 한정하여 분석된 내용이지만, 어떤 개념이나 문제해결의 지도에 있어 본 연구와 같은 이러한 시도를 계속해 간다면 학생

들이 느끼는 어려움과 오류 등을 통해 학습지도에 대한 시사점을 구체적으로 얻을 수 있을 것이다.

그리고 본 연구에서 파악하지 못했던 문제해결이나 개념 형성에 영향을 주는 요인을 좀더 구체적인 언어적 접근과 인지적 접근의 분석으로 다루어야 할 것이다.

참고문헌

김영채(1995). **사고와 문제 해결 심리학**. 서울: 박영사.

오세경(1995). **수학 학습 지도에 있어서의 오류 유형이 분류 및 그 지도 방안**. 충북대학교 교육대학원 석사학위논문.

이정은 · 김원경(1999). 중학생들의 일차 방정식에 관한 문장제 해결 전략 및 오류 분석. **수학교육, 38**(1), 77-85.

이종희 · 김선희(2003). 등호 개념의 분석 및 학생들의 등호 이해 조사. **수학교육학연구, 13**(3), 287-307.

주익한 · 김영국(1997). 문장제 풀이의 실패 유형 분류와 그 경향의 연구. **수학교육, 36**(2), 161-169.

Baller, H., & Cunninghan, J. H.(1982). Dignosting strengths and weaknesses of sixth-grade student in solving word problem. *Journal for Research in Mathematics Education. 13*(3), 202-210.

Cummins, D. D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and Instruction, 8,* 261-289.

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathmatical reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 38,* 11-50.

Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher, 1980 November,* 572-580.

Kintsch, W. (1986). Learning from text. *Cognition and Instruction, 3*(2), 87-108.

MacGregor, M., & Price, E. (1999). An exploration of aspects of language proficiency and algebra learning. *Journal for Research of Mathematics Education, 30*(4), 449-467.

Nesher, P., & Herschkovitz, S. (1994). The role of schemes in two-step problem: analysis and research finding. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 1-23.

Nesher, P., Hershkovitz, S., & Novotna, J. (2003). Situation model, text base, and what else? Factors affecting problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 52,* 151-176.

Trabant, J. (2001). **기호학의 전통과 경향.** (안정오 역). 서울: 인간사랑. (독어 원본은 1996년에 출판).

Linguistic and Cognitive Factors that Affect Word Problem Solving

Kim, Sun Hee (Ewha Womans University)

Many students feel the word problems are very difficult. This study analyzes the linguistic and cognitive factors that affect word problem solving so that we help students bring through the difficulty. There are a text base, a situation model, and a real world in the linguistic aspects. Students have a difficulty at the transition from text base to situation model(equation), and make lots of errors at the situation model. In the cognitive aspects, I investigated problem solving schemes, strategies, and complexity level. Students are likely to choose strategy by the contents which teacher instructed, but not by low complexity level, and mix up the amount of sugar and sugar water, and concentration.

We can recognize how complex the types of word problems are to solve, which strategies students choose largely, and what errors that students make in the problem solving are.

* **Key words** : word problem(문장제), situation model(상황모델), text base(텍스트 기반), real world(실세계), complexity level(복잡성)

논문접수 : 2004. 7. 1
심사완료 : 2004. 7. 20