



운동방정식 유도를 위한 케인의 방법론

유 흥 희*

(한양대학교 기계공학부)

이 글은 우리학회 2004년도 소음진동 춘계학술대회(경주) Tutorial 세션에서 "케인 동역학"으로 강연된 내용을 토대로 운동방정식의 유도방법으로 20세기 들어 가장 최근 개발된 케인의 운동방정식 유도과정과 주요 절차를 그리고 그 방법의 특징 및 장점에 대해 서술 하였다.

기초강좌

1. 머리말

동역학에서 운동방정식의 유도를 위해 등장하는 방법들은 여러 가지가 있다. 그러나 모든 방법의 배경을 이루는 원리는 물론 뉴턴의 운동 법칙이며 이것은 하나의 질점에 대해서 힘과 질량 그리고 가속도 사이의 관계를 나타내는 법칙으로 물체의 운동이 빛의 속도에 비해 현저히 작은 값을 가질 때 상당히 정확하게 성립된다고 알려져 있다. 이 법칙은 뉴턴에 의해 제기된 이래 현재까지 널리 공학계 분야에서 사용되어 왔다. 20세기 들어서 아인슈타인에 의해서 상대성 원리가 발표되면서 물체의 운동 속도가 빛의 속도에 접근하여 가면 뉴턴의 운동의 법칙이 성립하지 않을 수 있다는 것이 밝혀지기는 했으나 그러한 속도로 움직이는 물체는 가끔 천체 관측자들 사이에 보고되는 경우 이외에는 인류가 공학적으로 제작한 물체 중에는 존재하지 않아 뉴턴의 운동법

칙은 공학인들에게 여전히 진리로서 받아들여지고 있다.

뉴턴의 운동 법칙은 그것이 처음 발표된 이래 그 사용의 편리성을 위해 계속하여 발전되어 왔다. 우리가 흔히 인용하고 사용하는 방법들 중에서도 달랑베르의 원리, 운동량 원리, 가상 일의 법칙, 라그랑지 방정식이 있으며 그 외에도 이제는 거의 사용되고 있지 않는 해밀톤 방정식, 볼츠만-함멜 방정식, 짐스 방정식 등의 방법들도 있다. 이들 방법들은 모두 뉴턴 방법의 적용을 좀 더 편리하게 하기 위하여 제시된 방법들로서 이들 방법에 대한 종합적 비교는 참고문헌⁽¹⁾에서 케인에 의해 이루어지고 있다. 이 참고문헌에서는 결론적으로 케인 방법의 비교우위를 실제 문제에 대한 방정식 유도 과정을 펼쳐보임으로써 독자들에게 보여주고 있다. 본 글에서는 케인에 의해서 제시된 (앞으로 케인 방법이라 부름) 운동 방정식 유도방법이 제시되는과정과 주요절차 그리고 그 방법의 특징과 장점을 규명하는데 목적을 두고 있다.

* hhyoo@hanyang.ac.kr tel: 02-2290-0446



2. 케인 방법론의 유도

운동방정식의 유도는 그 대상 시스템이 질점인가 강체인가 또는 변형이 가능한 물체로 구성되었는가에 따라 그 구체적인 과정은 차이가 발생하게 된다. 그러나 모든 시스템들은 질점의 집합으로 구성되므로 본 글에서는 케인 방법의 유도과정을 하나의 질점에 대해서 기술하기로 한다. 이러한 기술방법은 이론적으로도 정확성에 문제가 없으며 동시에 설명의 편의상 매우 유용하다고 판단된다.

뉴턴의 운동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

여기서 \vec{F} 는 그 시스템의 대표 질점에 작용하는 힘의 합을 나타내며 m 은 그 질점의 질량을 나타낸다. 이 방정식은 다음과 같이 변형이 가능하다.

$$\vec{F} - m\vec{a} = 0 \quad (2)$$

식 (2)는 단순히 식 (1)의 우변 항을 좌변으로 이항한 것으로 보일 수도 있으나 아주 중요한 의미를 갖는다. 이 식은 ‘달랑베르 원리’라 불리며 좌변에 나타나는 $-m\vec{a}$ 는 관성력이라는 용어로 소개되며 \vec{F} 는 작용력이라 불린다. 이 관성력은 실재하는 힘이 아니나 이러한 가상적인 힘을 가정함으로써 동역학적인 문제를 정역학적인 문제로 변환하여 풀이할 수 있다는 것이 달랑베르 원리의 핵심을 이룬다. 이 원리는 또한 다음의 더 발전된 원리의 전개를 가능케 했다는 점에서 그 역사적 중요성을 갖는다.

$$(\vec{F} - m\vec{a}) \cdot \delta\vec{r} = 0 \quad (3)$$

이식은 가상 일의 원리라 불린다. 여기서 $\delta\vec{r}$ 는

가상 변위라 하며 다음 세 특성을 갖는다. 첫째, 미소 크기를 갖는다. 둘째, 임의 방향성을 갖는다. 셋째 경계조건을 만족한다. 식 (3) 역시 당연한 듯 하나 이 식은 내용상 중요한 의미를 담고 있다. 즉 가상변위가 주어졌을 때 발생하는 가상 일의 양이 0이 되는 위치는 동적인 평형위치라는 사실이다. 이는 가상 일 원리의 주요내용을 형성한다. 가상 일의 원리는 그대로는 운동방정식을 유도하는데 사용될 수 없으므로 다음과 같이 케인법칙을 이용하여 변환한다.

$$(\vec{F} - m\vec{a}) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad (4)$$

여기서 q_i 는 시스템 기술에 필요한 최소 개수로 이루어진 변수인 일반좌표를 의미한다. 그러므로 q_i 는 서로 독립이며 다음 식들이 성립해야 한다.

$$(\vec{F} - m\vec{a}) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = 0 \quad (5)$$

따라서 이 식들의 개수는 일반좌표의 개수와 같다. 좌변에서 작용력과 관련된 항을 일반 작용력이라 부르고 관성력과 관련된 항을 일반 관성력이라고 부른다. 식 (5)는 가상 일의 원리에 의해 운동방정식을 유도할 때 잘 쓰이는 방정식인데 이 방법의 문제점은 시스템의 운동에 회전운동이 연관될 때 발생한다. 변위나 가상변위가 모두 벡터 성질을 갖는데 반해 가상 각 변위는 벡터가 아니라는 점이다. 이 문제로 인해서 3차원 회전운동을 하는 강체를 포함하는 시스템의 운동방정식은 가상 일 원리를 사용하는 것이 일반적으로 용이하지 않다. 식 (5)는 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$(\vec{F} - m\vec{a}) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (6)$$



식 (6)이 성립하는 것은 다음 식이 성립하기 때문이다.

$$\frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad (7)$$

이 기하학적 관계식을 Dot Cancellation Law라고 부른다. 최종적으로 식 (6)을 다시 한번 체인 법칙을 적용하여 다음의 형태로 변환한다.

$$(\bar{F} - m\bar{a}) \cdot \frac{\partial \dot{F}}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (8)$$

식 (8)로부터 다음 식을 유도할 수 있다.

$$(\bar{F} - m\bar{a}) \cdot \frac{\partial \dot{F}}{\partial u_j} = 0 \quad (9)$$

식 (9)가 성립하려면 다음 조건을 만족해야 한다.

$$\det \left[\frac{\partial u_j}{\partial \dot{q}_i} \right] \neq 0 \quad (10)$$

식 (8)에 처음 나타난 u_j 를 일반속력이라 부르며 식 (9)를 케인의 운동방정식이라고 부른다. 케인의 운동방정식은 식 (10)의 조건을 만족시킬 수 있는 일반속력을 사용하기만 하면 유도되어질 수 있는 것이다. 식 (9)에서 작용력 및 관성력과 내적되는 좌변 값을 편속도라고 부르는데 작용력과 편속도 내적 값을 일반작용력, 관성력과 편속도의 내적 값을 일반관성력이라 각각 부른다.

식 (5)의 가상 일의 원리와 다르게 식 (9)의 케인의 방정식은 3차원 회전운동을 다룰 때, 각 변위가 아닌 각속도가 사용되는데 이것은 벡터이므로 그 사용이 아무런 문제점을 발생시키지 않는다.

3. 케인 방법론을 이용한 운동방정식의 유도과정

2절에서는 케인 방법론이 어떤 과정으로 유도 되어졌는지를 하나의 질점을 갖는 질점 계에 대해 보여주었다. 이는 기존 방법론들과 케인 방법론이 어떤 연관성이 있는지를 간명하게 보여주기 위한 목적에서 이루어진 것이며 모든 동적 시스템들이 질점 집합으로 이루어지므로 이러한 설명은 또한 이론적으로도 아무런 문제를 발생시키지 않는다. 모든 동역학 이론의 전개는 이와 같이 질점계에 대해 증명하는 것이 가장 일반적이므로 그와 같은 형태로서 이루어진다(참고문헌²⁾ 참조). 그러나 실제적인 시스템이 주어질 경우에 운동방정식을 유도하는 과정들은 실용적이며 체계적인 형태가 되어야 하므로 본 절에서는 이 과정을 설명하려 한다. 케인 방법론의 큰 장점 중 하나로 제시되는 내용이 바로 운동방정식의 유도 과정이 일정하며 체계적이라는 점이다.

운동방정식의 유도는 다음의 단계로 이루어진다. 첫째, 주어진 시스템의 형태를 기술하는데 필요한 좌표를 선정한다. 선정된 좌표들이 시스템 형태를 기술하기 위한 최소 개수로 이루어진다면 그러한 좌표를 일반좌표라 부른다. 시스템의 자유도 수는 호로계의 (holonomic systems) 경우 일반좌표 수와 일치하며 비로계의 (nonholonomic systems) 경우는 자유도보다 더 많은 일반좌표 수가 시스템 형태의 기술을 위해 필요하다. 경우에 따라서 일반좌표 이외의 좌표들을 사용하는 것이 필요할 때가 있는데 그림 1은 그러한 예제를 보여준다. 이 예제는 4절 기구를 나타내며 그 자유도가 1이므로 일반좌표의 수도 1개이다. 그러나 그림에 보이는 3개 좌표 중 하나만 사용하여 이 시스템을 기술하려면 매우 곤란하므로 3개를 모두 시스템 형태를 기술하는데 사용한다. 이 때 세 좌표 중 하나를 일반좌표로 정하면 나머지 2개의 좌표들은 유사일반좌표가 된다.



둘째, 시스템의 운동방정식 유도에 필요한 일반좌표 수 만큼의 일반 속력을 가장 효율적으로 정의하기 위하여 핵심이 되는 속도와 각속도 정보들을 선정한다. 이 때 강체들이 3차원 운동을 한다면 주요 강체의 각속도를 우선 선정하는 것이 통상적이다. 그 외의 일반속력을 정의하기 위한 특정한 점의 속도는 문제에 따라 결정해야 한다.

셋째, 둘째 단계에서 선정된 각속도나 속도로부터 일반속력을 정의한다. 일반속력의 적절한 정의는 전단계에서 선택된 각속도나 속도의 형태를 간단하게 할 수 있게 이루어진다. 일반적으로 각속도 성분을 먼저 일반속력으로 차출하여 정의한다.

넷째, 정의된 일반속력을 이용하여 운동방정식의 유도에 필요한 속도와 각속도들의 운동기하 정보들을 모두 구한다.

여기서 필요한 운동기하 정보들이란 모든 강체의 각속도, 편각속도, 각가속도와 강체 질량중심점의 속도, 편속도, 가속도, 그리고 작용력이 작용하는 점들의 속도와 편속도를 의미한다.

다섯째, 시스템에 작용하는 작용력들을 확인한 후 그 작용력의 작용점들의 편속도와 내적하고 합산하여 일반작용력을 구한다. 당연히 이 과정에서 작용토크에 의한 일반작용력은 토크가 작용하는 강체의 편각속도를 내적하여 구한다.

여섯째, 시스템을 구성하는 강체 및 질점에 의한 관성력들을 구한 후에 해당 강체의 편각속도 및 질점의 편속도와 내적하고 합산하여 일반관성력을 구한다. 이 과정을 효과적으로 수행하기 위해서는 강체에 의한 질량의 분포를 정량적으로 나타낼 수 있어야 하며 관성행렬이나 관성 다이아드에 대한 이해 및 사용이 잘 이루어져야 한다.

일곱째, 일반작용력과 일반관성력의 합이 0이라는 관계가 바로 운동방정식이며 이 방정식 수는 일반좌표 수 (혹은 자유도의 수) 만큼 얻어지게 된다.

이상에서 언급된 7개의 단계들은 운동방정식을 유도하려는 시스템이 어떠한 시스템이든 동일한 순서와 체계를 따라 일정하게 이루어진다.

4. 설명 예제

앞에서 설명된 운동방정식 유도과정이 실제로 어떻게 적용되는지를 살펴보기 위해 평면 상에서 구름과 미끄럼이 다 발생하며 운동하는 디스크를 선택하였다. 이 시스템은 언제나 5개 일반좌표의 사용이 필요하며 미끄럼이 발생하면 자유도는 5, 발생하지 않으면 자유도는 3이 된다. 여기서는 설명 편의상 항상 미끄럼이 발생한다고 가정하기로 한다.

두번째 단계로서 필요한 내용은 디스크의 중

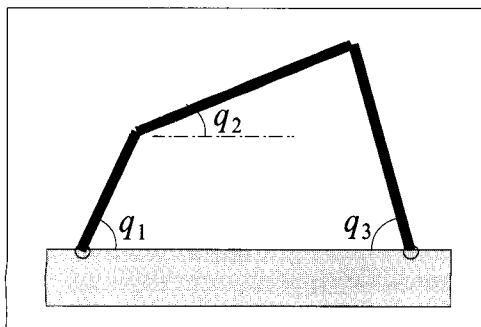


Fig.1 Pseudo-generalized coordinates for a 4-bar mechanism

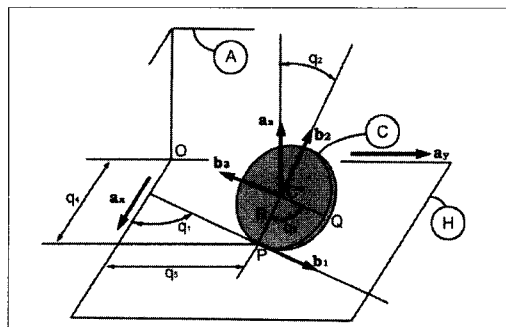


Fig.2 Disk moving on a plane



기초강좌

심점 및 접촉점의 속도와 디스크의 각속도이다. 우선 강체의 각속도는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^A\vec{\omega}^C &= {}^A\vec{\omega}^B + {}^B\vec{\omega}^C = \dot{q}_1\hat{a}_z - \dot{q}_2\hat{b}_1 + \dot{q}_3\hat{b}_3 \\ &= -\dot{q}_2\hat{b}_1 + \dot{q}_1 \csc q_2\hat{b}_2 + (\dot{q}_3 + \dot{q}_1 \sec q_2)\hat{b}_3 \end{aligned} \quad (11)$$

또한 문제에서 평면과 디스크의 접촉점의 속도는 다음과 같다.

$$\vec{v}^P = \dot{q}_4\hat{a}_x + \dot{q}_5\hat{a}_y \quad (12)$$

여기서 P 점은 디스크 C 에 속한 점도 아니며 지면에 속한 점도 아니다. 이 점은 눈에는 보이지 않지만 좌표계 \hat{b}_i 's 들이 고정된 가상강체 B 에 고정된 점이다. 가상강체 B 는 디스크 C 의 자기 중심점에 대한 회전운동만 제외한 강체이다. 즉

$${}^A\vec{\omega}^B = -\dot{q}_2\hat{b}_1 + \dot{q}_1 \csc q_2\hat{b}_2 + \dot{q}_1 \sec q_2\hat{b}_3 \quad (13)$$

이제 세 번째 단계로 이 문제에 대해 일반속력은 다음 5개로 정할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_1 &= -\dot{q}_2 & u_2 &= \dot{q}_1 \csc q_2 & u_3 &= \dot{q}_3 + \dot{q}_1 \sec q_2 \\ u_4 &= \dot{q}_4 & u_5 &= \dot{q}_5 \end{aligned} \quad (14)$$

이제 4번째 단계로서 이 일반속력들을 이용하여 디스크의 각속도 및 그 중심점 그리고 평면과의 접촉점의 속도를 표기해야 한다. 이와 아울러서 디스크의 각속도와 중심점의 가속도를 구해야 하며 편각속도와 편속도도 구해야 한다.

강체 C 의 각속도는 이제 다음과 같이 표기된다.

$${}^A\vec{\omega}^C = u_1\hat{b}_1 + u_2\hat{b}_2 + u_3\hat{b}_3 \quad (15)$$

그런데 강체 C 의 질량중심점을 구하려니 C 점

과 P 점이 가상강체 B 상에 속한 점이므로 ${}^A\vec{\omega}^B$ 를 구해야 한다. 이를 구하면,

$${}^A\vec{\omega}^B = u_1\hat{b}_1 + u_2\hat{b}_2 + u_2 \tan q_2\hat{b}_3 \quad (16)$$

따라서

$${}^A\vec{v}^{C^*} = {}^A\vec{v}^P + {}^A\vec{\omega}^B \times \vec{r}^{PC^*} \quad (17)$$

앞의 결과들을 이용하여 식 (17)의 결과를 구하면

$$\begin{aligned} {}^A\vec{v}^{C^*} &= (u_4c_1 + u_5s_1 - Ru_2 \tan q_2)\hat{b}_1 \\ &\quad + (u_5c_1s_2 - u_4s_1s_2)\hat{b}_2 \\ &\quad + (u_4s_1c_2 - u_5c_1c_2 + Ru_1)\hat{b}_3 \end{aligned} \quad (18)$$

다시 마찰력이 작용하는 디스크 C 상의 접촉점 \hat{C} 의 속도는 이제 다음과 같이 구할 수 있다.

$${}^A\vec{v}^{\hat{C}} = {}^A\vec{v}^{C^*} + {}^A\vec{\omega}^C \times \vec{r}^{C^*\hat{C}} \quad (19)$$

식 (19)의 결과를 구하면

$$\begin{aligned} {}^A\vec{v}^{\hat{C}} &= (u_4c_1 + u_5s_1 - Ru_2 \tan q_2 + Ru_3)\hat{b}_1 \\ &\quad + (u_5c_1s_2 - u_4s_1s_2)\hat{b}_2 \\ &\quad + (u_4s_1c_2 - u_5c_1c_2)\hat{b}_3 \end{aligned} \quad (20)$$

질량중심점 C^* 의 가속도와 디스크의 각속도는 위에 구해진 속도와 각속도를 다음 식에 따라서 시간에 대해 한번 더 미분함으로써 구할 수 있다.

$${}^A\vec{a}^{C^*} = {}^A\vec{a}^P + {}^A\vec{\alpha}^B \times \vec{r}^{PC^*} + {}^A\vec{\omega}^B \times {}^A\vec{\omega}^B \times \vec{r}^{PC^*} \quad (21)$$

$${}^A\vec{\alpha}^C = \frac{{}^A d^A \vec{\omega}^C}{dt} = \frac{{}^B d^A \vec{\omega}^C}{dt} + {}^A\vec{\omega}^B \times {}^A\vec{\omega}^C \quad (22)$$



위에서 가속도를 구하기 위해 필요한 강체 B 의 각가속도는 식 (16)에 주어진 강체 B 의 각속도를 시간에 대해 미분하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$${}^A\ddot{\alpha}^B = \dot{u}_1\hat{b}_1 + \dot{u}_2\hat{b}_2 + (\dot{u}_2 \tan q_2 - u_1u_2 \sec^2 q_2)\hat{b}_3 \quad (23)$$

식 (15), (18), (20)에서 구한 각속도와 속도들을 일반속력으로 편미분하면 편각속도와 편속도를 구할 수 있다. 이 과정들은 단순하므로 여기서는 상세 내용의 기술을 생략하도록 한다.

다음은 작용력과 관성력을 구하는 과정인데 이 문제의 경우 작용하는 작용력은 중력과 마찰력뿐이다. 물론 이 디스크가 구름 운동을 하려면 마찰력은 일을 하지 않는 힘이 되어서 운동방정식에 나타나지 않게 된다. 또한 관성력과 관성토크는 다음과 같이 구해진다.

$$\vec{F}^* = -m\vec{a}^C \quad (24)$$

$$\vec{T}^* = -\vec{I} \cdot {}^A\ddot{\alpha}^C - {}^A\vec{\omega}^C \times \vec{I} \cdot {}^A\vec{\omega}^C \quad (25)$$

여기서 \vec{I} 는 디스크의 질량분포를 나타내는 관성 다이어타이다. 디스크에 작용하는 중력을 \vec{W} 라 하고 마찰력을 \vec{R} 이라 하면 일반작용력과 일반관성력은 다음과 같이 구해진다.

$$F_r = {}^A\vec{v}_r^{C*} \cdot \vec{W} + {}^A\vec{v}_r^C \cdot \vec{R} \quad (26)$$

$$F_r^* = {}^A\vec{v}_r^{C*} \cdot \vec{F}^* + {}^A\vec{\omega}_r^C \cdot \vec{T}^* \quad (27)$$

이제 운동방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$F_r + F_r^* = 0 \quad (r=1,2,\dots,5) \quad (28)$$

이상의 과정에서 아직 기술되지 않은 것은 마찰력 \vec{R} 을 구하는 과정이다. 쿨롱의 마찰의 법칙에 따르면 미끄럼 발생 시 마찰력은 수직항력의

값에 운동마찰 계수를 곱한 값으로서 주어지며 방향은 접촉점간 상대속도 방향의 반대방향으로 주어진다. 즉 마찰계수를 μ_k 라고 하면, 디스크에 작용하는 마찰력은 다음과 같이 구해진다.

$$\vec{R} = -\mu_k N \frac{{}^A\vec{v}^C}{|{}^A\vec{v}^C|} \quad (29)$$

여기서 수직항력 N 과 같이 일을 하지 않는 비공헌력을 구하는 과정은 다음 절에 기술하기로 한다.

5. 비공헌력 구하기

비공헌력이란 시스템에 작용하는 힘 중 일을 하지 않는 작용력들을 말한다. 이들은 일을 하지 않기 때문에 일반적으로 가상 일의 원리나 그로부터 발전된 케인 방법론에 의해 유도된 운동방정식에는 나타나지 않는 경우가 통상적이다. 그러나 앞 절 예제에서 보듯이 미끄럼 마찰이 작용하는 경우는 마찰력은 일을 하는 힘이며 그를 구하기 위해서는 수직항력 계산이 필수적이다. 그런데 수직항력은 일을 하는 힘이 아니므로 운동방정식에 나타나지 않으므로 이것을 구하기 위한 추가적인 방정식의 도입이 필요하게 된다. 이렇게 운동방정식에 필요한 비공헌력이 있는가 하면 운동방정식에는 필요하지 않으나 그 비공헌력이 설계의 목적을 위해 구해져야 하는 경우도 많다. 예를 들어 4절 링크 조인트에 작용하는 힘은 운동방정식에는 나타날 필요가 없으나 4절 기구의 강도설계를 위해서는 필요하다. 이같이 비공헌력의 계산은 여러 이유로 필요할 수 있다. 다음은 이 비공헌력을 계산하기 위한 케인 방법론의 절차를 보여준다.

첫째, 구해야 하는 비공헌력과 관련된 일반속력을 추가로 도입한다. 이 때, 일반좌표의 추가 도입은 필요하지 않다. 이 때 도입되는 일반속력



기초강좌

은 비공헌력이 작용력일 때는 그 작용력이 작용하는 점의 속도와 관련되며 작용토크일 때는 그 토크가 작용하는 강체의 각속도와 관련된다.

둘째, 추가로 도입된 일반속력과 관련된 편속도를 (혹은 편각속도) 구한다.

셋째, 추가 도입된 일반속력과 관련된 일반작용력 및 일반관성력을 구해 추가 운동방정식을 구한다. 이 때, 구하려는 비공헌력은 일반작용력으로 나타나게 되며, 그 값은 이렇게 유도된 추가 운동방정식에 의해 구해질 수 있다.

앞 절에서 주어진 디스크 예제에 대해 수직항력을 구하기 위해 제시된 절차를 따르면 다음과 같다.

수직항력과 관련된 일반속력은 다음 속도로부터 추가로 다음과 같이 도입된다.

$${}^A\bar{v}^P = u_4\hat{a}_x + u_5\hat{a}_y + u_6\hat{a}_z \quad (30)$$

따라서 ${}^A\bar{v}^{C^*}$ 와 ${}^A\bar{v}^{\hat{C}}$ 에도 식 (30) 우변의 마지막 항이 나타나게 된다. 따라서 추가 운동방정식의 유도를 위한 편속도들은 다음과 같다.

$${}^A\bar{v}_6^{C^*} = \hat{a}_z \quad {}^A\bar{v}_6^{\hat{C}} = \hat{a}_z \quad (31)$$

마지막 단계로 수직항력을 구하기 위한 운동방정식은 다음과 같이 유도되어진다.

$${}^A\bar{v}_6^{\hat{C}} \cdot (N\hat{a}_z) + {}^A\bar{v}_6^{C^*} \cdot (-mg\hat{a}_z) + {}^A\bar{v}_6^{C^*} \cdot (-m{}^A\bar{a}^{C^*}) = 0 \quad (32)$$

위 식에서 관성토크나 마찰력 관련 항들은 관련 편각속도가 0이거나 관련 편속도와 내적하여 0이 되므로 나타나지 않는다.

6. 케인 방법의 특징 및 장점

케인의 방법의 특징은 기존 방법과 비교하여

일반속력 및 편속도의 (혹은 편각속도) 개념이 존재한다는 점이다. 일반속력의 도입은 결국은 방정식을 효율적으로 유도할 수 있도록 하는 장점으로 연결된다. 특별히 각속도 성분들을 일반속력으로 정의함으로써 회전 운동과 관련된 방정식들의 형태가 매우 간명해진다. 케인의 운동방정식은 작용력 및 관성력을 편속도와 내적하여 구한 항들로서 구성되므로 Power method라는 별칭도 가지고 있다. 이는 가상일의 원리에 의한 운동방정식에는 힘에 가상변위를 곱한 항들이 나타나고 일은 에너지와 같은 차원을 가지므로 Energy method라고 불리는 것과 동일한 이유이다.

케인 방법의 장점은 첫째로 운동방정식의 유도가 시스템의 자유도와 구성 요소의 수가 늘어날수록 다른 방법들에 비해 훨씬 효율적이라는 점이다. 두 번째 장점은 그를 적용하는 방법 및 절차들이 일정하고 체계적이어서 이 방법을 자주 사용하면 사용할수록 사용자가 익숙해지게 된다는 점이다.

세 번째 장점은 유도된 운동방정식의 형태가 그 방정식을 수치적으로 처리하기 용이한 형태라는 점이다. 이는 물론 사용자가 케인 방법론에 익숙하여 일반속력을 잘 정의할 때 가능한 일이다.


마지막으로 네 번째의 장점은 연속체에 대한 구조동역학 방정식을 유도할 때, 매우 편리하게 사용될 수 있다는 점이다. 구조 동역학적 운동방정식 유도 방법 및 예제는 본 글에서는 소개하지 않았으나 참고문헌^(3,4)에는 대표적 구조물인 보의 운동방정식 유도과정을 보여주고 있다. 케인 방법론의 장점, 특히 효율성에 대한 검증은 참고문헌⁽⁴⁾에 잘 설명되어 있으므로 참조할 수 있다. 마지막으로 언급할 점은 이러한 장점들은 오로지 대상 시스템이 복잡할수록 부각되며 간단한 시스템에 대해서는 오히려 뉴턴의 방법과 같이 상대적으로 더 단순한 방법들을 사용하는 것이 좋다는 점이다.



7. 맺음말

본 글에서는 동적 시스템의 운동방정식을 유도하기 위한 케인 방법론의 유도과정 및 그 적용 방법, 그리고 예제를 통한 적용예시를 보였으며 마지막으로 방법론의 장점을 기술하였다. 케인 방법론에 대한 소개를 간략히 정해진 지면 안에 하려다가 보니 여러 가지 면에서 부족한 점이 많다고 판단된다. 이 방법론에 대해 학문적인 연구가 필요한 독자들은 참고문헌⁶⁾를 중심으로 연구 문헌을 조사해보는 것이 좋을 것이다. 케인의 방법론은 아직까지는 대중적으로 널리 쓰이지는 않으나 그 우수성으로 인해 점점 더 널리 사용되어질 것으로 저자는 예측한다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계신기술센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다. 

참고문헌

- (1) Kane, T. R. and Levinson, D. A., 1980, "Formulation of Equations of Motion for Complex Spacecraft," J. of Guidance and Control, 3(2), pp. 99~112.
- (2) Kane, T. R. and Levinson, D. A., 1985, Dynamics: Theory and Application, McGraw-Hill Book Company.
- (3) Yoo, H. H., Ryan, R. R., and Scott, R. A., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motion," J. of Sound and Vibration, 181(2), pp. 261~278.
- (4) Seo, S. and Yoo, H. H., 2002, "Dynamic Analysis of Flexible Beams Undergoing Overall Motion Employing Linear Strain Measures," AIAA Journal, 40(2), pp. 319~326.
- (5) Kane, T. R., 1961, "Dynamics of Nonholonomic Systems," J. of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, pp. 574~578.