

제한된 구동기 용량을 갖는 선형 시스템의 스케줄링 H_∞ 제어기 설계

論 文

53D-9-2

Design of Scheduled H_∞ Control for Linear Systems with Limited Actuator Capacity

宋龍熙* · 金鎮勳†

(Yong-Heui Song · Jin-Hoon Kim)

Abstract - In practical control systems, the capacity of actuators is limited and this degrades the system performances and it is often a source of instability. To use full capacity of actuators, we adopt the gain scheduled control permitting the over saturation in controls. The basic idea of gain scheduled control is to use a higher gain control when the state variables are smaller and a lower gain control when the state variables are larger. First, we derive a constant H_∞ control and a reachable set while satisfying the degree of over saturation. Next, we divide this set into nested subsets and find H_∞ controls at each subsets while satisfying the degree of over saturation. Finally, the control gain is applied according to the status of states. Note that all procedures are done by solving linear matrix inequalities(LMI). Finally, we show the validity and applicability of our proposed control using the simulations of a six-story building subjected to the earthquake excitation.

Key Words : Actuator Capacity, Over-Saturation, Scheduled Control, LMI, Earthquake

1. 서 론

실제 제어 시스템에서 제어기 출력 신호를 받아 제어 대상 플랜트의 입력 신호로 변환하여 주는 구동기(actuator)는 필수적으로 사용된다. 그러나 이들 구동기는 용량이 제한되어 있으므로, 용량 내에서는 입력에 비례한 출력을 내지만 용량을 초과한 입력에 대하여는 일정한 출력을 내는 포화(saturation)특성을 가진다. 따라서 구동기의 용량을 무시하고 설계된 제어기를 사용하게 되면 전체 시스템의 성능 저하 뿐만 아니라 안정성까지도 보장되지 않는 것이 일반적이다. 이러한 제한된 구동기 용량을 가지는 제어시스템 문제는 지난 수 년 동안 활발히 연구가 진행되었고, 현재에도 매우 활발히 연구되어지고 있는 주제이다[3][5].

이러한 제한된 구동기 용량을 가지는 시스템 제어 방법으로 대표적으로 다음의 것들이 있다. 첫째는 구동기의 용량제한을 무시한 선형제어기를 설계한 후, 제어기의 이득을 줄여서 제어성능을 최소한도로 저하시키도록 하는 엔티-와인드업(anti-windup) 제어방법이다[7]. 두 번째의 방법은 제어기를 설계할 때 절대로 구동기의 용량을 초과하지 않도록 하는 저이득(low-gain) 제어기를 설계하는 것으로 이의 방법은 주어진 구동기의 용량을 충분히 이용하지 못하는 관계로 제어시

스템 성능이 매우 낮다[4]. 세 번째의 방법은 제어기 출력이 구동기의 용량을 초과하지만 주어진 성능 및 안정성을 보장하도록 하는 고이득(high-gain) 제어방법이다[4]. 마지막으로 최근에 구동기의 용량을 최대한 이용하기 위하여 시스템의 상태에 따른 제어기 이득을 달리하는 스케줄링제어 방법이 제시되었다. 이 스케줄링 제어는 시스템의 상태(state)가 큰 경우에는 상대적으로 작은 이득의 제어기를 이용하고, 반대로 상태가 매우 작은 경우에는 큰 이득의 제어기를 이용하는 기법이다[5].

포화 구동기를 갖는 시스템의 문제는 초기에는 이의 안정성 또는 안정성을 보장하는 초기 영역을 구하는 문제에 집중되었다가[1][2], 최근에는 외란이 있는 경우에 이 외란으로부터 측정출력까지의 외란 감쇠 문제에 대한 활발한 연구가 진행되고 있다[5][6][11]. 이런 외란 감쇠 문제는 초기에는 고정된 하나의 제어기를 갖는 상수 제어 방법을 이용하였으나[4][6], 최근에는 상태의 크기에 따라 제어 이득을 달리 하는 스케줄링제어 방법에 관하여 연구가 진행되고 있다[5]. 이러한 스케줄링 제어 기법은 작은 상태의 경우 큰 제어 이득을 이용하고, 큰 상태의 경우 작은 제어 이득을 이용하여 구동기 용량을 최대한 이용하는 장점이 있어, 하나의 제어 이득만을 이용하는 상수 제어에 비하여 성능이 우수하다[8].

본 논문에서는 제어기 출력의 포화를 허용하는 고이득 제어 기법에 기반을 둔 스케줄링 제어기의 설계를 통하여 기존의 결과보다 우수한 성능의 외란 감쇠 제어기를 설계하는 것이 목적이다. 제시된 제어기 설계 방법은 6층의 빌딩에 지진이 인가되었을 때, 기존의 제어방법들과 층간 변위(inter-story drift)를 비교함으로써 이의 우수성을 보인다.

* 學生會員 : 忠北大學校 大學院 制御計測工學科 博士課程

† 교신저자, 正會員 : 忠北大學校 電氣電子工學部 副教授 · 工博

E-mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr

接受日字 : 2004年 2月 10日

最終完了 : 2004年 7月 16日

2. 문제 기술 및 예비 결과

다음의 포화구동기를 갖는 외란이 있는 선형 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w + B_2sat(u(t)), x(0) = 0 & (1) \\ z(t) &= Cx(t) & (2) \end{aligned}$$

여기서 $x \in R^n$ 은 시스템의 상태, $u \in R^m$ 은 제어 입력이며, $z \in R^p$ 는 측정출력이고, 행렬 A, B_1, B_2 는 적당한 차원을 갖는 상수행렬이다. 그리고 외란 $w \in R^d$ 는 이의 최대 크기 정도만이 알려진 미지의 시간적 특성을 갖는 다음을 만족하는 것이고

$$w^T(t)w(t) \leq u_{max}^2, \quad (3)$$

각 제어입력 u_i 에 대한 구동기 용량은 u_i^0 이다. 즉, 제어 입력 u_i 에 대한 구동기 출력은 다음의 포화 함수로 표시된다.

$$sat(u_i) = \begin{cases} u_i^0 & , \text{if } u_i > u_i^0 \\ u_i & , \text{if } |u_i| \leq u_i^0 \\ -u_i^0 & , \text{if } u_i < -u_i^0 \end{cases} \quad (4)$$

잘 알려진 외란 감쇠제어인 H_∞ 제어는 각각의 제어 u_i 에 대한 구동기 용량이 u_i^0 로 주어진 시스템 (1)에서 최대 크기만이 알려진 외란 (3)이 인가되었을 때 외란 w 로부터 (2)의 측정출력 z 까지의 L_2 이득, 즉, 다음이

$$\gamma = \left(\int_0^\infty z^T z dt \right)^{1/2} / \left(\int_0^\infty w^T w dt \right)^{1/2}$$

최소가 되도록 하는 제어기를 설계하는 것이다. 이러한 목적의 연구로는 하나의 상수이득 상태피환 제어기 $u(t) = Kx(t)$ 를 이용하여 제어 입력이 절대로 포화가 되지 않도록 ($|u_i| \leq u_i^0$) 제어기를 설계하는 저 이득(low-gain) 제어방법과, 제어입력의 과포화를 허용하는 ($|u_i| \leq \frac{1}{r_i} u_i^0$, $r_i \in (0, 1)$) 고이득(high-gain) 제어방법이 있다[4][11]. 그러나 이의 방법은 구동기의 용량을 최대로 이용하지 못하는 관계로 좋은 외란 감쇠 성능을 얻지 못하는 것이 사실이다. 이를 극복하기 위하여 상태 영역을 나눈 후, 각각의 영역에서 외란으로부터 측정출력까지의 L_2 이득이 최소가 되도록 제어기를 구한 후, 상태가 속한 영역에 따라 선택적으로 제어기 이득을 사용하는 스케들링 제어 방법이 제시되었고, 이들 방법은 제어의 포화를 절대로 허용하지 않는 저 이득(low-gain) 제어 방법에 기초를 두었다[5][8].

다음의 상수 이득 상태피환 제어기를

$$u(t) = Kx(t) \quad (5)$$

시스템 (1)에 적용하면 다음으로 표시되는 페루프 시스템을 얻는다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2sat(Kx(t)) + B_1w(t) \quad (6)$$

본 논문에서는 상태변수 $x(t)$ 가 속하는 영역에 따라 제어 이득 K 를 다르게 함으로써 외란 w 로부터 측정출력 z 까지의 L_2 이득을 최소화하는 스케들링제어 방법을 제시하고 이의 유용성을 예제를 통하여 보인다. 제시된 설계방법은 먼저, 제어의 과포화를 허용하는 고이득(high-gain)제어방법을 이용하여 L_2 이득을 최소로 하는 H_∞ 제어 (5)와 (3)을 만족하는 외란 하에서 상태 $x(t)$ 가 도달할 수 있는 최대의 셋(reachable set) Ω 를 구한다. 다음으로 이 최대의 셋을 적당한 크기의 여러 서브-셋(sub-set)으로 나눈 후, 각각의 서브셋에서 과포화를 허용하면서 L_2 이득을 최소로 하는 H_∞ 제어 이득들을 구한다. 마지막으로, 시스템 동작 시 제어는 상태변수가 속하는 각 서브셋에 해당하는 제어 이득을 취하는 H_∞ 스케들링 제어기 설계방법을 제시한다. 여기서 모든 제어기들은 선형행렬부등식(LMI)를 이용하여 구하여지므로 매우 유용한 설계방법이다. 끝으로, 제시된 설계 방법은 대표적인 외란 감쇠제어 문제인 6층 빌딩에 지진이 인가된 경우의 시뮬레이션을 통하여 이의 유용성을 보인다.

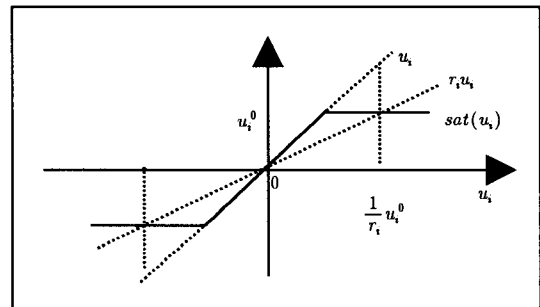


그림 1. 포화함수 $sat(u_i)$

Fig. 1. Saturation function $sat(u_i)$

다음은 페루프 시스템 (6)이 컨벡스-헐(convex-hull)로 표시됨을 보인다. 이를 위하여 $\phi_i(x) = \frac{sat(u_i)}{u_i}$ 라 하고(만약 $u_i = 0$ 이면 $\phi_i(x) = 1$ 이다), 대각행렬 $\Phi \in R^{m \times m}$ 를 $\Phi(x) = diag\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)\}$ 라 하면, 시스템 (6)은 다음으로 기술된다[2].

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\Phi(x)Kx(t) + B_1w(t) \quad (7)$$

그림 1에서 보듯이 $|u_i(t)| \leq \frac{1}{r_i} u_i^0$ 인 영역에서는 $\phi_i(x) = \frac{sat(u_i)}{u_i} \in [r_i, 1]$ 가 되어, 만약 제어입력이 $|u_i(t)| = \frac{1}{r_i} u_i^0, \forall t \geq 0$ 를 항상 만족한다고 가정하면, 시스

템 (7)은 등가적으로 다음의 컨벡스-헐(convex-hull)의 형태로 표시된다.

$$\dot{x}(t) = A(\xi)x(t) + B_1w(t) \quad (8)$$

여기서 $A(\xi)$ 는 다음으로 주어지고

$$A(\xi) = \sum_{i=1}^{2^m} \xi_i(A + B\bar{\Phi}_iK), \quad \sum_{i=1}^{2^m} \xi_i = 1 \text{ and } \xi_i \geq 0$$

상수대각행렬 $\bar{\Phi}_i \in R^{m \times m}$, $i = 1, 2, \dots, 2^m$ 은 두 개의 대각행렬 $diag(r_1, r_2, \dots, r_m)$ 과 $diag(1, 1, \dots, 1)$ 로 이루어지는 인터벌 행렬(interval matrix)의 i 번째 꼭지점(vertex) 행렬이다. 예를 들면 두개의 대각행렬 $diag(r_1, r_2)$ 와 $diag(1, 1)$ 로 이루어지는 인터벌 행렬의 꼭지점 행렬은 다음의 4개의 대각행렬들이다.

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1 &= diag(r_1, r_2), \bar{\Phi}_2 = diag(r_1, 1), \\ \bar{\Phi}_3 &= diag(1, r_2), \bar{\Phi}_4 = diag(1, 1). \end{aligned}$$

위의 내용을 정리하면, 만약 제어입력이 $|u_i(t)| = |Kx(t)| \leq \frac{1}{r_i}u_i^0, \forall t \geq 0$ 를 항상 만족하면 포화함수를 갖는 시스템 (6)은 꼭지점 행렬의 컨벡스-헐로 표시된 (8)로 기술된다.

보조정리 1: 만약 다음이 성립하면

$$X_i = X_i^T < 0, i = 1, 2, \dots, L \text{ and } \sum_{i=1}^L \xi_i = 1, \xi_i \geq 0$$

항상 $\sum_{i=1}^L \xi_i X_i < 0$ 이다.

증명: 먼저 $X_i = X_i^T < 0$ 이고 $0 \leq \xi_i \leq 1$ 이므로 $X_i \leq \xi_i X_i < 0$ 이다. 그리고 임의의 두 대칭행렬 $U, V < 0$ 에 대하여 $U + V < 0$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^L X_i \leq \sum_{i=1}^L \xi_i X_i < 0 .$$

이 논문에서, $diag(\cdot)$ 은 대각행렬(diagonal matrix)를 의미하며, $|\cdot|$ 은 절대값을 나타낸다. 그리고 두 대칭 행렬 X, Y 에 대하여 $X < Y$ 는 $X - Y$ 가 음확정행렬(negative definite matrix)임을 의미한다. 그리고 $0_{l \times m}$, $I_{l \times l}$ 은 각각 $l \times m$ 영(zero)행렬과 $l \times l$ 항등행렬(identity matrix)를 나타낸다.

3. 상수 제어기의 설계

여기에서는 페루프 시스템 (6)에 대하여 주어진 상수 $r_i \in (0, 1]$ 에 대하여 항상 제어입력이 $|u_i(t)| = |Kx(t)|$

$\leq \frac{1}{r_i}u_i^0$ 를 만족하면서, 외란 w 로부터 측정출력 z 까지의 L_2 이득이 최소가 되도록 하는 상태궤환제어기 (5)를 설계한다. 다음의 정리 1은 이에 대한 선형행렬부등식(주어진 상수 $\alpha, \beta > 0$ 에 대해)으로 표시된 결과이다.

정리 1: 제어 (5)를 갖는 페루프 시스템 (6)을 생각하자. 그리고 2^m 개의 대각행렬 $\bar{\Phi}_i$ 를 (8)에 정의된 것이라 하자. 만약 다음의 $(2 \times 2^m + m)$ 개의 행렬 부등식을 동시에 만족하는 행렬 $Q = Q^T \in R^{n \times n}$, $Y \in R^{m \times n}$ 과, 양의 스칼라 $\alpha, \beta > 0$ 이 존재하면,

$$i) \begin{bmatrix} Q & Y_j^T \\ Y_j & \frac{\beta}{r_j^2} \begin{pmatrix} u_j^0 \\ w_{\max} \end{pmatrix}^2 \end{bmatrix} > 0, j = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

$$ii) A Q + A Q^T + B_2 \bar{\Phi}_i Y + Y^T \bar{\Phi}_i B_2 + \alpha Q + \frac{\beta}{\alpha} B_1 B_1^T < 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2^m \quad (10)$$

$$iii) \begin{bmatrix} A Q + Q A^T + B_2 \bar{\Phi}_i Y + Y^T \bar{\Phi}_i B_2 & Q C^T & B_1 \\ C Q & -I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2^m \quad (11)$$

다음의 상태궤환 제어기는

$$u(t) = Kx(t); K = YQ^{-1} \quad (12)$$

다음 세 가지 성질을 항상 만족한다.

$$(a) |u_i(t)| = |Kx(t)| \leq \frac{1}{r_i}u_i^0, \forall t \geq 0$$

$$(b) x(t) \in \Omega = \left\{ x : x^T Q^{-1} x \leq \frac{1}{\beta} w_{\max}^2, \forall t \geq 0 \right\}$$

(c) 외란 w 로부터 측정출력 z 까지의 L_2 이득은 $\gamma > 0$ 보다 작다.

증명: 증명은 다음의 순서로 진행된다. i) 성질 (b)하에서 조건 (9)는 성질 (a)를 보장함을 보인다. ii) 성질 (a)하에서 조건 (10)은 성질 (b)를 보장함을 보인다. iii) 모순법(by contradiction)으로 (9)와 (10)을 만족하면 반드시 (a)와 (b)를 동시에 만족함을 보인다. (iv) 조건 (9), (10) 하에서 조건 (11)은 성질 (c)를 만족함을 보인다.

(i) 슈어-컴플리먼트(shur-complement) 성질[11]에 의하여 다음의 동치 관계를 얻고

$$(9) \leftrightarrow Q^{1/2} K^T K Q^{1/2} < \frac{\beta}{u_{\max}^2} \begin{pmatrix} u_i^0 \\ r_i \end{pmatrix}^2$$

이를 이용하면 성질 (b)하에서 다음을 얻는다.

$$|u_i|^2 = |K_i x|^2 = x^T K_i^T K_i x = x^T Q^{-1/2} (Q^{1/2} K_i^T K_i Q^{1/2}) Q^{-1/2} x \leq \frac{\beta}{w_{\max}^2} \left(\frac{u_i^0}{r_i} \right)^2 x^T Q^{-1} x \leq \left(\frac{u_i^0}{r_i} \right)^2. \quad (13)$$

따라서 성질 (b)하에서 조건 (9)는 성질 (a)를 보장한다.

ii) 행렬 $W_i, i = 1, 2, \dots, 2^m$ 을 다음으로 정의하면

$$W_i = \begin{bmatrix} (A + B_2 \bar{\Phi}_i K) Q + Q(A + B_2 \bar{\Phi}_i K) + \alpha Q & B_1 \\ B_1^T & -\frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix}$$

조건 (10)에 슈어-کمپل리먼트 성질을 적용하면 $W_i < 0, i = 1, 2, \dots, 2^m$ 이다. 그리고 성질 (a)하에서는 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V(x) + \alpha V(x) - \frac{\alpha}{\beta} w^T w \\ &= x^T \left[A^T(\xi) Q^{-1} + Q^{-1} A(\xi) \right] + 2x^T Q^{-1} B_1 x \\ & \quad + \alpha x^T Q^{-1} x - \frac{\alpha}{\beta} w^T w \\ &= \sum_{i=1}^{2^m} \xi_i \left(x^T (A + B_2 \bar{\Phi}_i K)^T Q^{-1} x + x^T Q^{-1} (A + B_2 \bar{\Phi}_i K) x \right. \\ & \quad \left. + 2x^T Q^{-1} B_1 w + \alpha x^T Q^{-1} x - \frac{\alpha}{\beta} w^T w \right) \\ &= \sum_{i=1}^{2^m} \xi_i [x^T Q^{-1} : w^T] W_i \begin{bmatrix} Q^{-1} x \\ w \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (14)$$

따라서 러처블 셋의 성질[14]에 의해 성질 (a)하에서 조건 (10)은 성질 (b)를 만족한다.

iii) 다음으로 조건 (9)와 (10)을 만족하면, 항상 (a)와 (b)를 만족함을 모순법으로 보인다. 이를 위해 조건 (9)와 (10)이 동시에 만족함에도 불구하고 (a) 또는 (b)가 만족하지 않는다고 가정하자. 그러면 3가지의 경우가 발생된다.

- (A) (a)는 만족하지 않지만 (b)는 만족하는 경우
- (B) (a)는 만족하지만 (b)는 만족하지 않는 경우
- (C) (a)와 (b)가 동시에 만족하지 않는 경우

그러면 (A)의 경우는 위의 증명 i)에 위반되고, (B)의 경우는 증명 ii)에 위반된다. 그리고 (C)의 경우는 $x(0) \in \Omega$ 이고 x 가 연속이므로 (A)의 경우를 거쳐야하나 위에서 보인 바와 같이 이는 i)의 증명에 위배된다. 따라서 (9)와 (10)을 동시에 만족하면 항상 (a)와 (b)를 만족한다.

iv) 조건 (9)와 (10)으로부터 $|u_i(t)| \leq \frac{1}{r_i} u_i^0$ 이므로 우리는 페루프 시스템 (6) 대신 (8)를 이용하면 되고, L_2 이득이 γ 보다 작게 됨을 보이기 위해서는 $V(x) = x^T Q^{-1} x$ 라 할 때 다음이 성립함을 보이면 된다[11].

$$\frac{d}{dt} V(x) + z^T z - \gamma^2 w^T w < 0 \quad (15)$$

이를 위하여 행렬 $X_i, i = 1, 2, \dots, 2^m$ 을 다음으로 정의하면

$$X_i = \begin{bmatrix} (A + B_2 \bar{\Phi}_i K) Q + Q(A + B_2 \bar{\Phi}_i K) + Q C^T C Q & B_1 \\ B_1^T & -\gamma^2 \end{bmatrix}$$

조건 (11)과 슈어-کمپل리먼트 성질에 의하여 $X_i < 0, i = 1, 2, \dots, 2^m$ 이다. 다음으로 시스템 (8)에 따라 (15)를 계산하면 다음을 얻게 되어

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V(x) + z^T z - \gamma^2 w^T w \\ &= x^T \left[A^T(\xi) Q^{-1} + Q^{-1} A(\xi) \right] x + 2x^T Q^{-1} B_1 w \\ & \quad + x^T Q C^T C Q x - \gamma^2 w^T w \\ &= \sum_{i=1}^{2^m} \xi_i \left(x^T (A + B_2 \bar{\Phi}_i K)^T Q^{-1} x + x^T Q^{-1} (A + B_2 \bar{\Phi}_i K) x \right. \\ & \quad \left. + 2x^T Q^{-1} B_1 w + x^T Q C^T C Q x - \gamma^2 w^T w \right) \\ &= \sum_{i=1}^{2^m} \xi_i [x^T Q^{-1} : w^T] X_i \begin{bmatrix} Q^{-1} x \\ w \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

외란 w 로부터 측정 출력 z 까지의 L_2 이득이 γ 보다 작음을 의미한다. 끝으로 조건 (9), (10), (11)을 동시에 만족하면 성질 (a), (b), (c)를 동시에 만족한다. 이것으로 증명을 마친다.

Remark 1: 위의 정리 1의 행렬 부등식 (9), (10), (11)은 고정된 스칼라 $\alpha > 0$ 에 대하여 모두 선형행렬부등식(linear matrix inequalities)이 되므로, 스칼라 α 에 대한 1차원탐색(line-search)를 통하여 L_2 이득을 최소로 하는 제어기 이득 K 를 구하며, 이는 잘 알려진 MATLAB™의 LMI 툴박스(toobox)에 있는 함수 mincx를 이용하여 쉽게 구하여진다.

4. 스케줄링 제어기의 설계

다음은 과포화 상수제어기에 바탕을 둔 H_∞ 스케줄링 제어기를 설계하는 과정을 소개한다.

Step 1: 포화가 일어나는 정도 r_i (즉, $|u_i| \leq \frac{1}{r_i} u_i^0$ 을 만족하는 r_i) 및 몇 개의 제어기를 이용한 스케줄링 제어를 행할 것인지의 제어기 개수 N 을 결정한다. $0 < r_i < 1$ 은 제어기 출력의 포화를 허용함을 의미하고, $r_i = 1$ 은 절대로 포화가 일어나지 않음을 의미한다.

Step 2: 정리1을 이용하여, 제어입력이 항상 $|u_i| \leq \frac{1}{r_i} u_i^0$ 이 되면서 시스템의 L_2 이득 γ 를 최소로 하는 제어기 $u = Kx$ 와 러처블셋(reachable set) $\Omega = \left\{ x : x^T Q^{-1} x \leq \beta \right\}$ 를 구한다. 다음으로 $K(N) = K, \Omega(N) = \Omega, \gamma(N) = \gamma$ 라 놓는다. 이 제어기 $u(t) = K(N)x(t)$ 를 이용하면 항상 L_2 이득은 $\gamma(N)$ 보다 작으며 시스템의 상태는 항상 $x \in \Omega$ 이다.

Step 3: 위의 리치블셋 $\Omega(N)$ 을 이용하여 서브-셋 $\Omega(1), \Omega(2), \dots, \Omega(N-1)$ 을 다음과 같이 구한다.

$$\Omega(k) = \left\{ x : x^T Q^{-1} x \leq \delta(k) \frac{1}{\beta}, k = 1, 2, \dots, N-1. \right.$$

여기서 $0 < \delta(1) < \delta(2) < \dots < \delta(N) = 1$ 이다. 다음의 그림 2는 $N=3$ 인 경우에 대한 리치블 셋 $\Omega(3)$ 와 각 서브셋 $\Omega(1), \Omega(2)$ 를 보여준다.

Step 4: 각 서브셋 $\Omega(k), k=1, 2, \dots, N-1$ 에 대하여, 각각의 제어입력이 항상 $|u_i| \leq \frac{1}{r_i} \lim$ 이 되면서 시스템의 L_2 이득을 최소로 하는 제어 $u = K(k)x$ 를 구한다. 즉, 다음의 $(2^m + m)$ 개의 행렬 부등식을 만족하면서 $\gamma(k)$ 를 최소로 하는 제어기 이득 $K(k)$ 를 구한다.

$$i) \begin{bmatrix} Q & Y_j^T \\ Y_j & \frac{\beta}{\delta(k)r_j^2} \left(\frac{u_j^0}{w_{\max}} \right)^2 \end{bmatrix} > 0, j = 1, 2, \dots, m$$

$$ii) \begin{bmatrix} A Q + Q A^T + B_2 \bar{\Phi}_i Y + Y^T \bar{\Phi}_i^T B_2 & Q C^T & B_1 \\ C Q & -I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\gamma^2(k) \end{bmatrix} < 0, \\ i = 1, 2, \dots, 2^m$$

이렇게 구한 제어기 $u = K(k)x$ 는 $x \in \Omega(k)$ 일 때 L_2 이득이 $\gamma(k)$ 보다 작음을 보장하며, 또한 $|u_i| \leq \frac{1}{r_i} \lim$ 임을 보장한다. 여기서, $0 < \delta(1) < \delta(2) < \dots < \delta(N) = 1$ 이므로 각 서브셋의 L_2 이득은 항상 $\gamma(1) < \gamma(2) < \dots < \gamma(N)$ 을 만족한다. 이는 작은 영역에 상태가 머무르게 되면 L_2 이득이 작게 됨을 의미한다.

Step 5: 설계된 스케줄링 제어기를 다음의 방법으로 적용한다

$$u(t) = Kx(t); K = K(i) \text{ if } x \in \Omega(i) \text{ and } x \notin \Omega(i+1)$$

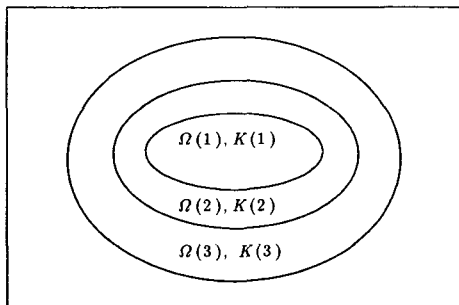


그림 2. 리치블셋의 분할($N=3$)
Fig. 2. Partition of the reachable set($N=3$)

Remark 2: 위의 과정을 거쳐 설계된 스케줄링 제어는, 초기에는 $x(0) = 0$ 이므로(즉 $x \in \Omega(1)$), 제어기는 $u = K(1)x$

를 이용하게 되며, 외란의 작용으로 상태가 $x \in \Omega(2)$ 로 변하면, 제어기는 $u = K(2)x$ 를 이용하게 된다. 즉, 일반적으로 상태가 $x \in \Omega(j)$ 이면 제어는 $u = K(j)x$ 를 적용한다. 이렇게 외란의 크기 변화에 따라 상태가 머무르는 곳이 변화하게 되며 이에 따른 제어기 이득도 변환하게 된다. 극단적으로 외란이 매우 커져서 상태가 $x \in \Omega(N)$ 에 도달하면 제어기는 $u = K(N)x$ 를 이용하게 되며, 주어진 외란이 $w^T w \leq w_{\max}^2$ 을 만족하는 한 상태는 $\Omega(N)$ 을 벗어나지 못하게 된다.

5. 수치 예제

다음은 제안된 스케줄링 제어기의 수치 예제로써, 제안된 제어기의 성능과 기존의 제어 방법과의 비교를 통하여 새로이 제안된 과포화된 스케줄링 제어방법의 우수성을 보인다. 대상 시스템은 6층의 쉬어빔(shear beam) 빌딩 모델로써 각층이 모두 같은 빌딩이다. 그리고 1층과 3층에 그림 1에 보인 것과 같은 2개의 브레이싱(bracing) 제어 구동기가 있다[9].

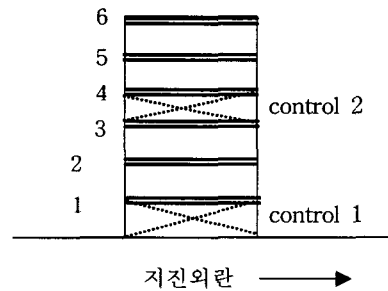


그림 3. 지진하 6 층 빌딩
Fig. 3. 6-story building subject to earthquake

문제를 간단히 하기 위하여 구동기의 동적특성과 빌딩과 구동기의 상호연결 동적특성은 무시한다. 이러한 6층시스템의 상태방정식은 지표면에 지진(earthquake) 외란이 가하여진 경우, 각 층간의 변위(drift)를 $q(t)$ 라 하고 상태벡터를 $x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}$ 라 하면 다음의 상태 방정식으로 기술된다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 \text{sat}(u)$$

여기서 행렬 A, B_1, B_2 는 다음으로 주어진다.

$$A = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & I_{6 \times 6} \\ -M_0^{-1} K_0 & -M_0^{-1} C_0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 1} \\ M_0^{-1} b_1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 2} \\ M_0^{-1} b_2 \end{bmatrix}$$

또한, 동일한 각층의 무게, 스티프니스(stiffness), 댐핑상수(damping constant)가 각각, $m_0 = 345.6$ [metric ton], $k_0 = 340, 400$ [kN], $c_0 = 2,937$ [kN · s/m]라면, 다음의 행렬 값을

가진다.

$$M_0^{-1}K_0 = \frac{k_0}{m_0} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_0^{-1}C_0 = \frac{k_0}{m_0} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_0^{-1}b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, M_0^{-1}b_2 = \frac{1}{m_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

다음으로 구동기의 용량 및 외란의 최대값은 각각 다음으로 주어졌다고 하고

$$u_1^0 = u_2^0 = 1500 [kN], w_{max} = 0.4 [g],$$

구하고자하는 스케들링 제어는 5단계의(N=5)의 제어기를 이용한다고 하자. 이를 위하여 리처블셋은 다음의 상수들을

$$[\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5] = \left[\frac{1}{5000}, \frac{1}{1500}, \frac{1}{500}, \frac{1}{300}, 1 \right]$$

이용하여 다음과 같이 5개의 서브셋으로 나눈다.

$$\Omega(k) = \left\{ x : x^T Q^{-1} x \leq \delta_k \frac{1}{\beta} w_{max}^2, k = 1, 2, 3, 4, 5. \right.$$

다음 표1은 포화정도를 나타내는 $r_1 = r_2 = r$ 을 각각 1, 0.5, 0.1로 하였을 때의 각 영역 $\Omega(k)$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ 에서의 L_2 이득을 나타낸다.

표 1. 각 영역에서의 L_2 이득

Table 1. The L_2 gain at each regions

| | $r = 1$ | $r = 0.5$ | $r = 0.1$ |
|-------------|---------|-----------|-----------|
| $\Omega(1)$ | 0.0507 | 0.0513 | 0.0543 |
| $\Omega(2)$ | 0.0640 | 0.0645 | 0.0653 |
| $\Omega(3)$ | 0.0780 | 0.0780 | 0.0783 |
| $\Omega(4)$ | 0.0850 | 0.0850 | 0.0850 |
| $\Omega(5)$ | 0.1393 | 0.1393 | 0.1393 |

먼저 주의할 것은 위의 표1에서 서로 다른 $r_1 = r_2$ 에 대한 리처블셋 $\Omega(5)$ 는 서로 모양 및 크기가 다르며(왜냐하면 정리1에서 구한 행렬 Q 및 상수 β 가 다름), 또한 각각의 서브셋의 모양 및 크기도 다르다. 표1에서 $r_1 = r_2 = 1$ 은 제어기의 출력이 항상 포화가 일어나지 않도록 설계된 저이득(low-gain) 제어기이며, $r_1 = r_2 = 0.5$ 또는 $r_1 = r_2 = 0.1$ 은 과포화를 허용하는 고이득(high-gain)제어기이다. 위의 표에서 보듯이 작은 영역의 서브셋으로 갈수록(즉, $\Omega(5) \rightarrow \Omega(1)$) L_2 이득이 작어짐을 알 수 있고, 같은 서브셋 영역에서 포화정도를 크게 하면(즉, $r_1 = r_2 = 1 \rightarrow r_1 = r_2 = 0.1$) L_2 이득이 증가함을 보인다. 이는 시스템을 기술할 때 컨벡스-헐(convex-hull) 함수를 이용하였기에 $r_1 = r_2 < 1$ 영역에서는 실제 sat(u)보다 꼭지점(vertex) 함수를 이용하여 기술한 것의 영역이 더 커지기 때문에, 이들의 L_2 이득은 포화가 일어나지 않는($r_1 = r_2 = 1$) 경우보다 커지기 때문이다.

표 2. 여러 종류의 제어기에 대한 최대 층간 변위(cm):

$$w_{max} = 0.4 [g]$$

Table 2. Maximum inter-story drifts(cm) for various controllers: $w_{max} = 0.4 [g]$

$$(r_1 = r_2 = r)$$

| | open-loop | $r = 1$ | | $r = 0.5$ | | $r = 0.1$ | |
|-------|-----------|-----------|-------------|-----------|---------|-----------|---------|
| | | 상수 제어 [5] | 스케들링 제어 [8] | 상수 제어 | 스케들링 제어 | 상수 제어 | 스케들링 제어 |
| x_1 | 4.29 | 4.18 | 2.78 | 4.09 | 2.59 | 3.42 | 2.79 |
| x_2 | 4.02 | 3.91 | 2.68 | 3.83 | 2.51 | 3.22 | 2.68 |
| x_3 | 3.53 | 3.42 | 2.45 | 3.36 | 2.31 | 2.82 | 2.46 |
| x_4 | 2.84 | 2.75 | 1.99 | 2.69 | 1.87 | 2.25 | 2.13 |
| x_5 | 1.99 | 1.94 | 1.46 | 1.88 | 1.41 | 1.59 | 1.52 |
| x_6 | 1.02 | 1.00 | 0.79 | 0.98 | 0.77 | 0.84 | 0.85 |

다음은 외란을 직접 가하였을 때, 실제 빌딩의 층간 변위를 보인다. 이를 위하여 가하여지는 지진은 미국의 캘리포니아 El Centro지역에 1940년 5월 18일에 발생한 진도 7.1의 지표 가속도(ground acceleration) 지진 데이터를 $w_{max} = 0.4 [g] = 0.4 \times 9.8 [m/s^2]$ 로 스케일링하여 이용하였으며, 다음 그림 4는 스케일링된 El Centro 지진이다.

다음의 표 2는 위의 지진이 빌딩에 가하여진 경우 각 층간의 변위(inter-story drift)의 최대 크기를 각각의 제어기를 이용하였을 때 나타낸 것이다. 위의 표 2에서 보듯이 포화를 시키지 않는 저이득 제어($r_1 = r_2 = 1$) 포화를 허용하는 제어들($r_1 = r_2 < 1$)에 비하여 성능이 떨어짐을 알 수 있으며, 또한 하나의 제어기를 이용하는 상수 제어보다는 상태의 크기에 따라 제어를 달리하는 스케들링 제어의 성능이 우수함을 알 수 있다.

다음으로는 스케들링 제어의 경우($r_1 = r_2 = 0.5$)에 대한 시간적 특성을 보이도록 한다.

다음의 그림 5는 $r_1 = r_2 = 0.5$ 의 스케들링 제어기를 이용하였을 때 1층(x_1)의 시간에 따른 변위를 나타낸다.(점선 :

제어를 행하지 않은 경우, 실선 : 스케들링 제어가 행하여진 경우)

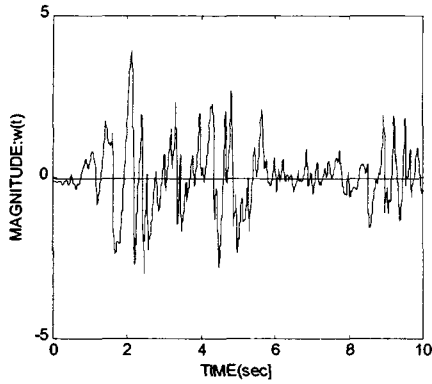


그림 4. 0.4 [g] 엘센트로 지진
Fig. 4. 0.4 [g] El Centro Earthquake

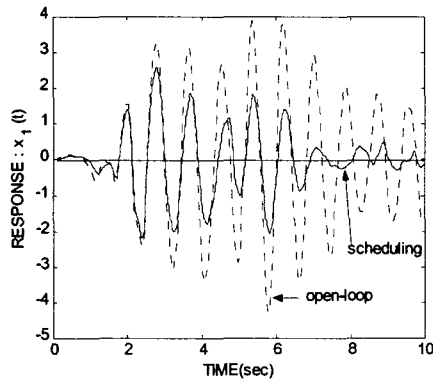


그림 5. 1층의 변위
Fig. 5. Drift of 1st Floor

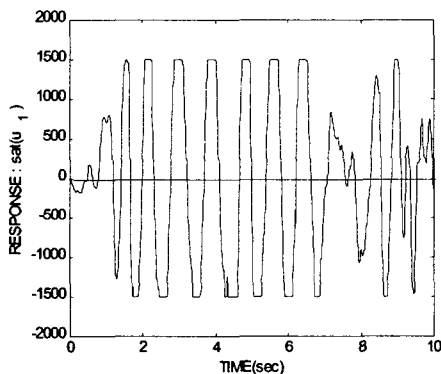


그림 6. u_1 의 구동기 출력
Fig. 6. Actuator output of u_1

그림 6은 이 때 1층에 존재하는 구동기 출력($sat(u_1)$)를 나타낸다. 그림에서 보듯이 제어 u_1 은 과포화 특성을 가지며,

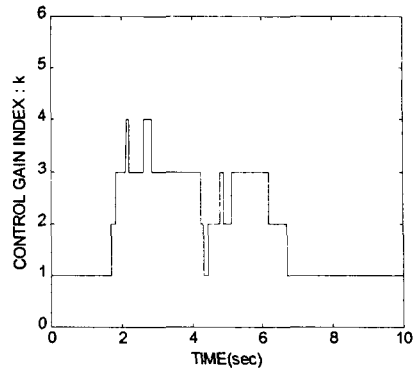


그림 7. 사용된 제어 이득의 인덱스
Fig. 7. Index of used control gain

다른 구동기 출력($sat(u_1)$)도 거의 비슷한 특성을 가진다. 마지막으로 그림 7은 스케들링 제어를 행할 때 이용된 제어기의 인덱스(k)를 나타낸다. 즉 임의의 시간에 인덱스가 $k=3$ 이라는 것은, 이 시간에 상태는 $x \in \Omega(3)$ 에 존재하며, 제어는 제어 이득 $K(3)$ 을 이용한 $u(t) = K(3)x(t)$ 임을 의미한다.

6. 결 론

이 논문에서는 제한된 용량의 구동기를 갖는 선형 시스템의 외란 감쇠 제어 문제를 다루었다. 제안된 제어 방법은 제어의 과포화를 허용하면서 상태의 크기에 따라 제어기 이득을 달리하는 스케들링 H_∞ 제어 방법이다. 이의 설계 방법은 먼저 주어진 과포화 정도를 만족하면서 외란으로부터 측정출력까지의 L_2 이득을 최소화 하는 상수제어 및 이의 리치블셋을 구한 후, 이 리치블셋을 여러 개의 서브셋으로 나누고 각 서브셋에서 과포화정도를 만족하면서 L_2 이득을 최소화 하는 각각의 제어 이득을 구한 후, 제어는 상태가 머무르는 서브셋의 제어 이득을 이용하는 방법이다. 특히 각각의 제어이득은 선형행렬 부등식으로 표시된 조건들의 만족을 확인함으로써 쉽게 얻을 수 있는 장점이 있다. 제안된 스케들링 제어 방법은 빌딩에 지진이 인가되었을 때, 각 층간의 변위를 기존의 여러 제어 방법들과의 비교를 통하여 우수함을 보였다.

참 고 문 헌

- [1] P.O. Gutman and P. Hagander, "A new design of constrained controllers for linear systems," IEEE Transactions on Automatic control, vol. 30, pp. 22-33, 1985.
- [2] J.-H. Kim and Z. Bien, "Robust stability of uncertain linear systems with saturating actuators", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 39, pp. 202-207, 1994.
- [3] D.S. Bernstein and A.N. Michel(Eds.), "Special issue: saturating actuators", Int. J. of Robust and Nonlinear Control, vol. 5, pp. 375-540, 1995.

- [4] Z. Lin and A. Saberi, "A semi-global low-and-high gain design technique for linear systems with input saturation-stabilization and disturbance rejection", Int. J. of Robust and Nonlinear Control, vol. 5, pp.381-398, 1995.
- [5] S. Srivastava and F. Jabbari, "Scheduled controllers for disturbance attenuation of systems with bounded inputs", Proc. of American Control Conference, Chicago, pp. 735-739, 2000.
- [6] T. Hu and Z. Lin, "An anlysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance", Proc. of American Control Conference, Chicago, pp. 725-729, 2000.
- [7] L. Zaccarian and A. R. Teel, "A common framework for anti-windup, bumpless transfer and reliable design", Automatica, vol.38, pp.1735-1744, 2002.
- [8] 송용희, 김진훈, 포화구동기를 갖는 선형시스템의 이득 스케줄링 제어기 설계, 대한전기 학회 논문지, vol. 52D, pp. 511-519, 2002.
- [9] T. Nguyen, F. Jabbari and S. de Miguel, "Controller design for seismic-excited buildings with bounded actuators", J. Eng. Mech., vol.128, pp.857-865, 1998.
- [10] T. Hu and Z. Lin, Control systems with actuator saturation, Birkhauser, 2001.
- [11] S. Boyd, El Ghaoui, L.E. Feron and V. Balakrishnan, Linear matrix inequalities in system and control theory, SIAM, 1994.

저 자 소 개



송용희(宋龍熙)

1976년 10월 22일생. 2000년 충북대학교 전기전자공학부 졸업. 2002년 충북대학교 대학원 제어계측공학과 졸업(석사). 2002년~현재 충북대 대학원 제어계측공학과 박사과정.
Tel : 043-235-2468
E-mail : yhsong@just.chungbuk.ac.kr



김진훈(金鎭勳)

1961년 10월 8일생. 1985년 서울대 전기공학과 졸업. 1985년~1987년 신영전기 (주) 연구원. 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1993년 동 전기 및 전자공학과 졸업(공학박사). 1993년~1994년 경상대 공대 제어계측공학과 전임강사. 1998년~1999년 미국 UCI 방문교수. 현재 충북대 공대 전기전자 및 컴퓨터공학부 부교수.
Tel. : 043-261-2387, Fax : 043-268-2386
E-mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr