

비선형 저차화 관측기의 설계기법 및 구보시스템에의 적용

論文

53D-9-3

A Nonlinear Reduced Order Observer Design and Its Application to Ball and Beam System

趙南熏[†]
(Nam-Hoon Jo)

Abstract - In this paper, we present a local reduced-order observer for a class of nonlinear systems that have full robust relative degree. The proposed observer utilizes the coordinate change which transforms a nonlinear system into an approximate normal form. The proposed reduce order observer is applied to a ball and beam system, and simulation results show that substantial improvement in the performance was achieved compared with the jacobian linearization observers.

Key Words : Nonlinear System, Reduced-order Observer, Robust Relative Degree, Ball and Beam System

1. 서 론

대부분의 물리적인 시스템은 비선형 모형식으로 표현되며, 이러한 시스템의 비선형성을 고려하여 고성능의 제어기를 설계하고자 하는 연구가 매우 활발히 진행되어 왔다. 비선형 제어기 설계기법에 대해서는 궤환 선형화(feedback linearization), 입출력 선형화(input output linearization), 역진제어기법(backstepping)등의 성공적인 연구결과가 발표되었으며[1-3], 이를 출력제어에 응용하기 위한 비선형관측기에 대한 연구도 최근 매우 활발히 진행되고 있다.[4-9] 비선형 관측기를 설계하는 대표적인 기법중 하나는 좌표변환 $z = [h, L_f h, \dots, L_f^{j-1} h]^T$ 을 사용하는 것이다.[5-7] 하지만, 그림1의 구보시스템(Ball and Beam system)과 같은 경우 상대차수가 잘 정의되지 않아[10] 이러한 기법을 적용하는 것은 적절하지 않다는 것이 알려져 있다. 이러한 시스템에 대해서는 참고문헌 [8]에서 제시한 것처럼 강인상대차수(robust relative degree)개념에 기초한 상태변환을 사용한 상태관측기가 기존의 다른 관측기보다 훨씬 뛰어난 성능을 보인다는 것이 알려져 있다. 본 논문에서는 참고문헌 [8]에서 제시한 관측기의 저차화관측기에 대한 연구를 수행하고자 한다. 즉, 강인상대차수가 시스템의 차수와 같다면, 거의 대부분의 경우 국소적 저차화관측기(local reduced order observer)를 설계할 수 있다는 것을 본 논문에서는 보이고자 한다. 시스템의 출력은 항상 측정 가능하므로, 측정되지 않는 상태변수만을 추정하는 관측기를 설계할 수 있는데, 이를 저차화관측기라고 한다. 저차화관측기를 사용하면 관측기의 차수를 줄일 수 있어서 더 간단하고 더 경제적인 관측기를 설계할 수 있으며 결과적으로 더 경제적인 보상기를

설계할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2장에서는 제안된 저차화관측기에 사용될 상태변환을 소개하고, 제시된 관측기의 안정성을 입증할 때 사용될 보조정리를 소개한다. 3장에서는 제안된 저차화관측기를 소개하고 관측오차의 안정성에 대한 결과를 제공한다. 4장에서는 제안된 관측기를 구보시스템에 적용하여 모의실험한 결과를 소개하며, 마지막으로 5장에서는 본 논문에 대한 결론을 제시한다.

시작하기 전에, 본 논문에서 사용될 주요용어를 소개한다: 적절한 정수 $n > 0$ 과 실수 $r > 0$ 에 대해서 B_r 과 \bar{B}_r 을 $B_r := \{x \in R^n : \|x\| < r\}$, $\bar{B}_r := \{x \in R^n : \|x\| \leq r\}$ 로 정의한다. 어떤 함수 $f(x)$ 에 대해서 $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|^n}$ 이 존재하고 0이 아닌 경우 $f(x) \in O(x)^n$ 로 표기한다. 또한, x, u 의 함수로서 $O(x)^2, O(xu)$ 과 $O(u)^2$ 의 합으로 표현 가능한 함수를 $O(x, u)^2$ 로 표기한다. 어떤 벡터장 $f: R^n \rightarrow R^n$ 와 평활한 함수 $h: R^n \rightarrow R$ 에 대해서 $L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} f$ 이고 $L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h)$, $i \geq 2$ 이다.

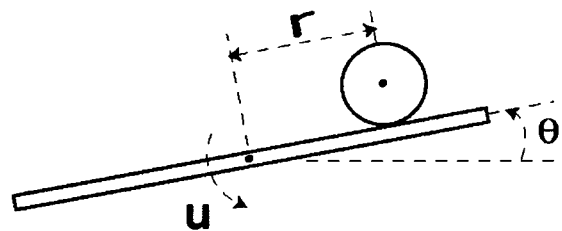


그림 1 구보(Ball and Beam) 시스템
Fig. 1 Ball and Beam system

[†] 교신저자, 正會員 : 崇實大 工大 電氣制御시스템工學部 助教授

E-mail : nhjo@ssu.ac.kr

接受日字 : 2004年 4月 22日

最終完了 : 2004年 7月 4日

2. 준비 지식과 상태변환

본 논문에서는 다음과 같은 단일출력 단일입력 비선형 시스템을 고려한다 :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x \in R^n$, $u, y \in R$ 이고 f, g 는 평활한 벡터장 (smooth vector fields)이며 $h: R^n \rightarrow R$ 는 평활한 함수이다. 또한, 본 논문에서는 $f(0) = 0, h(0) = 0$ 를 가정하며, 이는 $0 \in R^n$ 가 평형점(equilibrium point)임을 의미한다.

비선형 시스템 (1)의 상대차수[1]가 잘 정의되지 않는 경우, 기존의 입출력 선형화기법을 사용한 제어기 설계기법은 사용될 수 없다. 실제로 구보시스템의 모형식은 (2)와 같이 주어지는데[10]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ Bx_1x_4^2 - G\sin x_3 \\ x_4 \\ -\frac{2Mx_1x_2x_4 + MGx_1\cos x_3}{Mx_1^2 + J + J_b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{Mx_1^2 + J + J_b} \end{bmatrix} u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (2)$$

입출력선형화를 수행해보면

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{y} &= x_2 \\ \ddot{y} &= Bx_1x_4^2 - BG\sin x_3 \\ y^{(3)} &= b_0(x) + a_0(x)u \end{aligned} \quad (3)$$

이며 여기서

$$\begin{aligned} a_0(x) &= \frac{2Bx_1x_4}{Mx_1^2 + J + J_b} \\ b_0(x) &= Bx_2x_4^2 - BGx_4\cos x_3 - \frac{2Bx_1x_4}{Mx_1^2 + J + J_b} \times \\ &\quad (2Mx_1x_2x_4 + MGx_1\cos x_3) \end{aligned}$$

이다. (3)에서 $y^{(3)}$ 를 살펴보면 $x_1=0$ 이거나 $x_4=0$ 인 경우에는 u 의 계수 $a(x)$ 가 0이 되어 상대차수[1]가 잘 정의되지 않는다. 이러한 경우 \ddot{y} 에서 고차항인 $Bx_1x_4^2$ 항을 무시하고 입출력선형화를 수행한 근사시스템

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_2 =: \xi_2 \\ \xi_2 &= -BG\sin x_3 + Bx_1x_4^2 =: \xi_3 + Bx_1x_4^2 \\ \xi_3 &= -BGx_4\cos x_3 =: \xi_4 \\ \xi_4 &= b(x) + a(x)u \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} a(x) &= -\frac{1}{Mx_1^2 + J + J_b} BG\cos x_3 \\ b(x) &= \frac{BG\cos x_3}{Mx_1^2 + J + J_b} - (2Mx_1x_2x_4 + MGx_1\cos x_3) \\ &\quad + BGx_4^2\sin x_3 \end{aligned}$$

을 고려 할 수 있는데, 여기서는 원점근방(neighborhood of the origin)에서 u 의 계수 $a(x)$ 가 0이 되지 않아 (3)에서와 같은 문제가 발생하지 않는다. 이를 이용한 제어기 설계방법이 근사입출력 선형화이며 참고문헌 [10]에서 제안된 강인상대차수의 개념이 기초가 된다 :

정의 2.1[10] : (5)를 만족하는 평활한 함수 $\phi_i(x), i=1, \dots, r$ 와 $O(x, u)^2$ 인 함수 $\psi_i(x, u), i=0, \dots, r$, 그리고 $O(x)^0$ 인 함수 $a(x)$ 가 존재하면 비선형 시스템 (1)은 $x=0$ 근처에서 강인상대차수 r 을 갖는다고 말한다.

$$\begin{aligned} h(x) &= \phi_1(x) + \phi_0(x, u) \\ L_{f+gu}\phi_i(x) &= \phi_{i+1}(x) + \psi_i(x, u) \quad i=1, \dots, r-1 \\ L_{f+gu}\phi_r(x) &= b(x) + a(x)u + \psi_r(x, u) \end{aligned} \quad (5)$$

만약, 비선형 시스템(1)이 강인상대차수 n 을 갖으면, 좌표변환

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi(x) \\ &= [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]^T \end{aligned} \quad (6)$$

이 국소 미분동형사상(local diffeomorphism)이 되고, 시스템 (1)을 근사 입출력 표준형 (7)

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + B[b(\Phi^{-1}(\xi)) + a(\Phi^{-1}(\xi))u] + \psi(\Phi^{-1}(\xi), u) \\ y &= C\xi \end{aligned} \quad (7)$$

로 변환시킨다는 것이 알려져 있다[10]. 여기서 행렬 $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times 1}, C \in R^{1 \times n}$ 은

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (8)$$

이고

$$\psi(x, u) = \begin{bmatrix} \psi_1(x, u) \\ \psi_2(x, u) \\ \vdots \\ \psi_n(x, u) \end{bmatrix} \quad (9)$$

이다. 참고문헌[8]에서는 (6)의 상태변환을 사용하여 제어기 설계가 아닌 완전차수(full order) 관측기를 성공적으로 설계하였다. 이에 대해 본 논문에서는 저차화관측기를 제시하는데, 이는 추가적인 상태변환을 필요로 한다. 새로운 함수

$$\begin{aligned} z_1 &= \phi_2 - k_1y \\ z_2 &= \phi_3 - k_2y \\ &\vdots \\ z_{n-1} &= \phi_{n-1} - k_{n-1}y \end{aligned} \quad (10)$$

를 정의하면, (5)로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 &= L_{f+gu}\phi_2 - k_1 L_{f+gu}\phi_1 \\ &= \phi_3 + \phi_2 - k_1(\phi_2 + \phi_1) \\ &= -k_1(\phi_2 - k_1 y) + (\phi_3 - k_2 y) - k_1^2 y - k_1 \phi_1 + \phi_2 + k_2 y \\ &= -k_1 z_1 + z_2 + (k_2 - k_1^2)y + \phi_2 - k_1 \phi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{z}_2 &= L_{f+gu}\phi_3 - k_2 L_{f+gu}\phi_1 \\ &= \phi_4 + \phi_3 - k_2(\phi_2 + \phi_1) \\ &= -k_2(\phi_2 - k_1 y) + (\phi_4 - k_3 y) - k_1 k_2 y - k_2 \phi_1 + \phi_3 + k_3 y \\ &= -k_2 z_1 + z_3 + (k_3 - k_1 k_2)y + \phi_3 - k_2 \phi_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{n-2}^* &= -k_{n-2} z_1 + z_{n-1} + (k_{n-1} - k_1 k_{n-2})y + \phi_{n-1} - k_{n-2} \phi_1 \\ z_{n-1}^* &= L_{f+gu}\phi_n - k_{n-1} L_{f+gu}\phi_1 \\ &= b(x) + a(x)u + \phi_n - k_{n-1}(\phi_2 + \phi_1) \\ &= -k_{n-1}(\phi_2 - k_1 y) - k_1 k_{n-1} y + b(x) + a(x)u \\ &\quad + \phi_n - k_{n-1} \phi_1 \\ &= -k_{n-1} z_1 + b(x) + a(x)u - k_1 k_{n-1} y + \phi_n - k_{n-1} \phi_1 \end{aligned} \tag{11}$$

저차화관측기의 상태변수로 사용될 변수

$$z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{n-1}]^T \tag{12}$$

와 관측기 이득 $K \in R^{(n-1) \times 1}$

$$K = [k_1 \ \dots \ k_{n-1}]^T \tag{13}$$

와 새로운 함수

$$\Gamma(x) = \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} - Ky \tag{14}$$

를 정의하면, (6), (10)으로부터

$$\begin{aligned} \xi &= [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]^T \\ &= \begin{bmatrix} \phi_1 \\ z + Ky \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

를 얻을 수 있다. 또한, 행렬 $A \in R^{(n-1) \times (n-1)}$, $B \in R^{(n-1) \times 1}$, $C \in R^{1 \times (n-1)}$ 를 (8)와 같은 형태로 정의하면 (9), (11), (12), (13)로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (A - KC)z + (A - KC)Ky + B[a(x)u + b(x)] \\ &\quad + \psi(x, u) - K\psi_1(x, u) \end{aligned} \tag{16}$$

일반적으로, 출력 $y = h(x)$ 은 x 의 선형함수로 주어지는 경우가 대부분이며, 이러한 경우 다음 조건을

$$\psi_0(x, u) = 0 \tag{17}$$

만족한다.(물론, 선형함수가 아니더라도 (17)을 만족하는 경우가 상당수 존재한다) 조건 (17)을 만족하면 (5), (15)로부터

$$\xi = \Phi(x) = \begin{bmatrix} y \\ z + Ky \end{bmatrix} \tag{18}$$

이므로

$$x = \Phi^{-1}(y, z + Ky)$$

로 표현할 수 있다. 따라서 (16)으로부터 저차화관측기 표준형(reduced-order observer canonical form) (19)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (A - KC)z + (A - KC)Ky \\ &\quad + B[a(\Phi^{-1}(y, z + Ky))u + b(\Phi^{-1}(y, z + Ky))] \\ &\quad + \psi(x, u) - K\psi_1(x, u) \end{aligned} \tag{19}$$

다음 장에서는 제안된 저차화관측기 표준형 (19)를 이용하여 비선형 시스템 (1)의 국소적 상태관측기(local state observer)를 설계할 것이다. 이를 위하여, 참고문헌 [11],[12]

와 유사한 방식으로 다음과 같이 비선형 저차화관측기(reduced order observer)를 정의한다.

정의 2.2 : 임의의 양의 상수 $\alpha > 0$ 와 시스템 (20)에 대해서

$$\begin{aligned} \dot{w} &= a_1(w, y, u), \quad w \in R^l \\ \dot{\hat{x}} &= a_2(w, y, u), \quad \hat{x} \in R^n \end{aligned} \tag{20}$$

적절한 양의 상수 $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ 가 존재하여 다음을 만족하면 시스템 (20)을 시스템 (1)의 국소적 상태관측기(local state observer)라고 한다 : $\|x(t)\| < \delta_1$, $\|u(t)\| < \delta_2$, $\forall t > 0$ 이고 $\|\hat{x}(0) - x(0)\| < \delta_3$ 이면

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \beta \|\hat{x}(0) - x(0)\| e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0$$

이다. 또한, K n 인 경우, 시스템 (20)을 국소적 저차화관측기(local reduced order observer)라고 한다. □

마지막으로, 제안된 관측기의 수렴성을 증명할 때, Vandermonde 행렬이 사용된다. 벡터 $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}]^T$ 에 대해서 Vandermonde 행렬

$$V(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-3} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1}^{n-2} & \lambda_{n-1}^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

을 정의하면 다음과 같은 성질이 알려져 있다.[8]

보조정리 2.3 : 임의의 $a > 0$ 와 $c > 0$ 에 대해서

$$\|V^{-1}(\lambda)\| \leq 2$$

$$\lambda_1 + \|V^{-1}(\lambda)\| c + \|V^{-1}(\lambda)\| \|V(\lambda)\| \varepsilon = -a$$

을 만족하는 $\lambda_{n-1} < \lambda_{n-2} < \dots < \lambda_1 < 0$ 과 $\varepsilon > 0$ 이 존재한다. □

3. 저차화관측기 설계

이제 강인상대차수가 시스템의 차수와 동일한 경우에 2장에서 유도한 저차화관측기 표준형 (19)를 이용하여 국소적 저차화관측기를 설계하도록 하자.

정리 3.1 : 비선형 시스템 (1)의 강인상대차수가 n 이고 $\psi_0(x, u) = 0$ 라고 가정하자. 그러면, 시스템

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= (A - KC)\hat{z} + (A - KC)Ky \\ &\quad + B[a(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + Ky))u + b(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + Ky))] \\ &\quad + \psi(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + Ky), u) \\ &\quad - K\psi_1(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + Ky), u) \\ \hat{x} &= \Phi^{-1}(y, \hat{z} + Ky) \end{aligned} \tag{22}$$

가 비선형 시스템 (1)의 국소적 저차화관측기가 되는 관측기 이득 $K \in R^{n-1}$ 가 존재한다.

증명 : 우선, 정의 2.2에서 사용되는 양의 상수 $\alpha > 0$ 와 임의의 $a_1 > 0$ 이 주어졌다고 하자. 강인상대차수의 정의로부터 상태변환 $\xi = \Phi(x)$ 이 국소적 미분동형사상이 되는 원점 근방(neighborhood of the origin) U 가 존재한다.[10] 이제, 원점 근방 U 에 대해서

$$B_{r_1} \subset U$$

을 만족하도록 양의 상수 $r_1 > 0$ 을 선택하자. 또한, 함수 $(h(x), \Gamma(x))$ 가 원점근방 U 에서 동형사상이므로,

$$B_{3r_2} \subset h(U) \times \Gamma(U)$$

$$h^{-1}(B_{3r_2}) \times \Gamma^{-1}(B_{3r_2}) \subset B_{r_1}$$

을 만족하는 양의 상수 $r_2 > 0$ 가 존재한다. 또한, 함수 ϕ 가 국소적 미분동형사상이고 f, g, h 가 평활하므로 함수 $a(\phi^{-1}(y, z + Ky))$, $b(\phi^{-1}(y, z + Ky))$ 가 집합 $h(U) \times \Gamma(U)$ 에서 평활하고, 결과적으로, 집합 $h(U) \times \Gamma(U)$ 에서 (또는, B_{3r_2} 에서) 균일(uniformly) Lipschitz이다.[13] 따라서

$$\sup_{\|z\| < q_1} \|b(\phi^{-1}(y, \hat{z} + Ky)) + ua(\phi^{-1}(y, \hat{z} + Ky)) - b(\phi^{-1}(y, z + Ky)) - ua(\phi^{-1}(y, z + Ky))\|$$

$$\leq M\|(y, \hat{z} + Ky) - (y, z + Ky)\|$$

$$\leq M\|\hat{z} - z\|, \quad z, \hat{z} \in B_{3r_2}, \quad y \in B_{3r_2}$$

(23)

을 만족하는 양의 상수 $M > 0$ 이 존재한다. 한편, (21)와 같은 Vandermonde 행렬을 $V(\lambda)$ 로 표기하면 보조정리 2.3으로부터

$$\|V^{-1}(\lambda)\| \leq 2$$

$$\lambda_1 + \|V^{-1}(\lambda)\| \sqrt{n-1}M + \|V^{-1}(\lambda)\| \|V(\lambda)\| L_p = -\alpha$$

(24)

를 만족하는 벡터 $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}]^T$ (단, $\lambda_{n-1} < \lambda_{n-2} < \dots < \lambda_1 < 0$)와 양의 상수 L_p 가 존재한다. 또한,

$$A = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}]$$

를 정의하고 $(A - KC)$ 의 고유치가 $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}]^T$ 가 되도록 관측기 이득 K 를 선정하면 동반행렬(companion matrix) $(A - KC)$ 는 Vandermonde 행렬 $V(\lambda)$ 에 의하여 대각화 가능하므로[14]

$$e^{(A-KC)t} = V^{-1}(\lambda)e^{At}V(\lambda)$$

(26)

을 만족한다. 이제, 새로운 함수

$$\Psi(y, z, u) \triangleq \phi(\phi^{-1}(y, z + Ky), u)$$

$$\Psi_1(y, z, u) \triangleq \phi_1(\phi^{-1}(y, z + Ky), u)$$

를 정의하고 이를 이용하여 $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0$ 에 대해서

$$l(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \triangleq \sup_{(y, z, u) \in B_{\alpha_1} \times B_{\alpha_2} \times B_{\alpha_3}} \left\| \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial z_1}(y, z, u) \\ \vdots \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z_{n-1}}(y, z, u) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial u}(y, z, u) \end{bmatrix} \right\|$$

을 정의하자. 그러면, $\phi^{-1}(0, 0) = 0$ 이고 $\phi(x, u)$ 는 $\alpha(x, u)^2$ 이므로

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z_i}(0, 0, 0) = 0, \quad i=1, \dots, n-1$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u}(0, 0, 0) = 0$$

이며, 따라서 $l(0, 0, 0) = 0$ 이다. 또한, 함수 $\frac{\partial \Psi}{\partial z_i}, i=1, \dots, n-1$ $\frac{\partial \Psi}{\partial u}$ 는 $h(U) \times \Gamma(U) \times B_{q_1}$ 에서 연속이고 $h(x)$ 는 U 에서 연속이므로

$$l(3r_3, 3r_3, q_2) \leq \frac{L_p}{1 + \|K\|}$$

(27)

을 만족하는 $0 < r_3 \leq r_2$ 과 $0 < q_2 \leq q_1$ 가 존재한다. 이제

$$l_p = l(3r_3, 3r_3, q_2)$$

(28)

를 정의하면 Lipschitz 성질에 의하여[13] $(y, z, u), (y, \hat{z}, u) \in B_{3r_3} \times B_{3r_3} \times B_{q_2}$ 인 모든 x, z, \hat{z}, u 에 대해서

$$\|\Psi(y, \hat{z}, u) - \Psi(y, z, u)\| \leq l_p \|\hat{z} - z\|$$

$$\|\Psi_1(y, \hat{z}, u) - \Psi_1(y, z, u)\| \leq l_p \|\hat{z} - z\|$$

(29)

을 만족한다.

다시 양의 상수 $r_4 > 0$ 를

$$B_{r_4} \subset U$$

$$h(B_{r_4}) \times \Gamma(B_{r_4}) \subset B_{r_3}$$

(30)

을 만족하도록 선택하자. (결과적으로 $x \in B_{r_4}$ 이면 $y \in B_{r_3}$ 는 자동으로 만족되어 (23)와 (29)를 만족하기 위하여 필요했던 y 의 조건을 $x \in B_{r_4}$ 의 조건으로 교체할 수 있다.) 이제,

$$\|x(t)\| < r_4, \quad \|u(t)\| < q_2, \quad \forall t \geq 0,$$

(31)

$$\|\hat{z}(0) - z(0)\| \leq \min\left(r_3, \frac{1}{2\|V(\lambda)\|} r_3\right),$$

(32)

인 경우,

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \beta \|\hat{x}(0) - x(0)\| e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0$$

를 만족하는 $\beta > 0$ 가 존재한다는 것을 보이도록 하자. (30)과 (31)에 의하여

$$\|z(t)\| < r_3, \quad \forall t \geq 0$$

(33)

이고 (32)와 (33)로부터

$$\|\hat{z}(0)\| < 2r_3$$

이다. 또한, $\|\hat{z}(t)\|$ 는 시간 t 에 대해서 연속이므로, 적절한 시간 $T > 0$ 가 존재하여

$$\|\hat{z}(t)\| < 3r_3, \quad 0 \leq t < T$$

를 만족한다. (이러한 T 가 유일하지 않으면 그들 중에서 최대값을 선택한다.) 즉, $0 \leq t < T$ 에서는 항상 (23)과 (29)를 만족함을 알 수 있다. (실제로는, 증명의 마지막 부분에서 $T = \infty$ 일 수 밖에 없음을 보일 것이다.) 이제, 관측오차

$$e = \hat{z} - z$$

를 정의하면 (19)와 (22)로부터

$$\begin{aligned} \dot{e} = & (A - KC)e \\ & + B[a(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + Ky))u + b(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + Ky))] \\ & - B[a(\Phi^{-1}(y, z + Ky))u + b(\Phi^{-1}(y, z + Ky))] \\ & + \Psi(y, \hat{z}, u) - \Psi(y, z, u) \\ & - K\Psi_1(y, \hat{z}, u) + K\Psi_1(y, z, u) \end{aligned}$$

를 얻을 수 있고

$$\begin{aligned} e(t) = & e^{(A-KC)t}e(0) + \int_0^t e^{(A-KC)(t-\tau)} B[a(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + Ky))u \\ & + b(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + Ky)) - a(\Phi^{-1}(y, z + Ky))u \\ & - b(\Phi^{-1}(y, z + Ky))]d\tau \\ & + \int_0^t e^{(A-KC)(t-\tau)} [\Psi(y, \hat{z}, u) - \Psi(y, z, u)]d\tau \\ & - \int_0^t e^{(A-KC)(t-\tau)} K[\Psi_1(y, \hat{z}, u) - \Psi_1(y, z, u)]d\tau \end{aligned}$$

을 얻는다. (26)를 사용하면

$$\begin{aligned} V(\lambda)e(t) = & e^{At}V(\lambda)e(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}V(\lambda) \\ & B[a(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + Ky))u + b(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + Ky)) \\ & - a(\Phi^{-1}(y, z + Ky))u - b(\Phi^{-1}(y, z + Ky))]d\tau \\ & + \int_0^t e^{A(t-\tau)}V(\lambda)[\Psi(y, \hat{z}, u) - \Psi(y, z, u)]d\tau \\ & - \int_0^t e^{A(t-\tau)}V(\lambda)K[\Psi_1(y, \hat{z}, u) - \Psi_1(y, z, u)]d\tau \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} \|V(\lambda)e(t)\| \leq & \|V(\lambda)e(0)\|e^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\|V(\lambda)B\| \\ & \|a(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + Ky))u + b(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + Ky)) \\ & - a(\Phi^{-1}(y, z + Ky))u - b(\Phi^{-1}(y, z + Ky))\|d\tau \\ & + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\|V(\lambda)\| \cdot \|\Psi(y, \hat{z}, u) - \Psi(y, z, u)\|d\tau \\ & - \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\|V(\lambda)\| \cdot \|K\| \cdot \|\Psi_1(y, \hat{z}, u) \\ & - \Psi_1(y, z, u)\|d\tau \end{aligned}$$

이다. (23)과 (29)를 사용하면

$$\begin{aligned} \|V(\lambda)e(t)\| \leq & \|V(\lambda)e(0)\|e^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\sqrt{n}M\|\hat{z} - z\|d\tau \\ & + \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\|V(\lambda)\|L_p\|\hat{z} - z\|d\tau \\ & - \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\|V(\lambda)\| \cdot \|K\|L_p\|\hat{z} - z\|d\tau \\ \leq & \|V(\lambda)e(0)\|e^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\sqrt{n}M\|V^{-1}(\lambda)V(\lambda)e(\tau)\|d\tau \\ & + \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\|V(\lambda)\|L_p\|V^{-1}(\lambda)V(\lambda)e(\tau)\|d\tau \\ & - \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\|V(\lambda)\| \cdot \|K\|L_p\|V^{-1}(\lambda)V(\lambda)e(\tau)\|d\tau \\ \leq & \|V(\lambda)e(0)\|e^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\|V^{-1}(\lambda)\|\sqrt{n}M\|V(\lambda)e(\tau)\|d\tau \\ & + \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\|V^{-1}(\lambda)\| \cdot \|V(\lambda)\|L_p\|V(\lambda)e(\tau)\|d\tau \\ & - \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\|V^{-1}(\lambda)\| \cdot \|V(\lambda)\| \cdot \|K\|L_p\|V(\lambda)e(\tau)\|d\tau \\ \leq & \|V(\lambda)e(0)\|e^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\|V(\lambda)e(\tau)\| \cdot \\ & [\|V^{-1}(\lambda)\|\sqrt{n}M + \|V^{-1}(\lambda)\| \cdot \|V(\lambda)\|L_p(1 + \|K\|)]d\tau \end{aligned}$$

이고, 양쪽에 $e^{-\lambda_1 t}$ 를 곱하여 Gronwall의 보조정리[15]를 적용하면

$$\begin{aligned} \|V(\lambda)e(t)\| \leq & \|V(\lambda)e(0)\| \exp[(\lambda_1 + \|V^{-1}(\lambda)\|\sqrt{n-1}M \\ & + \|V^{-1}(\lambda)\|\|V(\lambda)\|L_p(1 + \|K\|))t] \end{aligned}$$

이며, 다시 (25), (27)와 (28)를 사용하면

$$\begin{aligned} \|V(\lambda)e(t)\| \leq & \|V(\lambda)e(0)\| \exp[(\lambda_1 + \|V^{-1}(\lambda)\|\sqrt{n-1}M \\ & + \|V^{-1}(\lambda)\|\|V(\lambda)\|L_p)t] \\ = & \|V(\lambda)e(0)\|e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

을 얻을 수 있다. 또한, (24)를 사용하면

$$\begin{aligned} \|e(t)\| \leq & \|V^{-1}(\lambda)\| \cdot \|V(\lambda)e(0)\|e^{-\alpha t} \\ \leq & 2\|V(\lambda)\|\|e(0)\|e^{-\alpha t} \end{aligned} \quad (34)$$

을 얻는다. 즉, $0 \leq t < T$ 이면 (34)를 만족하고, (32)를 이용하면

$$\|e(t)\| \leq r_3 e^{-\alpha t} \leq r_3$$

이므로 $0 \leq t < T$ 에서

$$\begin{aligned} \|\hat{z}(t)\| \leq & \|z(t)\| + \|e(t)\| \\ \leq & r_3 + r_3 \leq 2r_3 \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이는 T 의 정의에 모순이며, 따라서 $T = \infty$ 일 수 밖에 없어서 모든 $t \geq 0$ 에 대해서 (34)가 성립한다는 것을 보장할 수 있다.

마지막으로 모든 $t \geq 0$ 에 대해서 $\|x(t)\| < r_1$, $\|z(t)\| < 3r_3$, $\|\hat{z}(t)\| < 3r_3$ 이고 Φ 가 U 에서 미분동형사상이므로

Φ, Φ^{-1} 이 균일 Lipschitz이다.[13] 따라서, (34)로부터

$$\begin{aligned} & \|\hat{x}(t) - x(t)\| \\ &= \|\Phi^{-1}(y(t), \hat{z}(t) + Ky(t)) - \Phi^{-1}(y(t), z(t) + Ky(t))\| \\ &\leq l_{\Phi^{-1}} \|\hat{z}(t) - z(t)\| \\ &\leq 2l_{\Phi^{-1}} \|V(\lambda)\| \cdot \|\hat{z}(0) - z(0)\| e^{-at} \\ &\leq 2l_{\Phi^{-1}} \|V(\lambda)\| \cdot \|(y(0), \hat{z}(0) + Ky(0)) \\ &\quad - (y(0), z(0) + Ky(0))\| e^{-at} \\ &\leq 2l_{\Phi^{-1}} \|V(\lambda)\| \cdot \|\Phi(\hat{x}(0)) - \Phi(x(0))\| e^{-at} \\ &\leq 2l_{\Phi^{-1}} l_{\Phi} \|V(\lambda)\| \cdot \|\hat{x}(0) - x(0)\| e^{-at}, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

을 만족하는 양의 상수 $l_{\Phi^{-1}} > 0$ 와 $l_{\Phi} > 0$ 이 존재한다. 정리하면, (24)와 (26)을 만족하도록 K 를 선정하면 시스템 (22)가 비선형시스템 (1)의 저차화관측기가 되는 것을 알 수 있다.

4. 구보(Ball and Beam)시스템에의 적용

제안된 관측기의 설계방법을 설명하기 위하여 [8,10]에서 고려한 구보시스템(Ball and Beam system)에 대한 저차화 관측기를 설계해 보도록 하자. 시스템의 동역학은 (2)와 같은 비선형식으로 주어지며, 2장에서 살펴본 것처럼 $Bx_1x_4^2$ 항 때문에 상대차수가 잘 정의되지 않아 참고문헌 [10]에서는 제어기를 설계하기 위하여 입출력 선형화에서 $Bx_1x_4^2$ 항을 무시하는 방법을 제안하였다. 즉, (4)에서와 같이

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -BG \sin x_3 \\ -BGx_4 \cos x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} \quad (35)$$

로 선택하면, 시스템 (2)는 원점근처에서 강인상대차수 4를 갖으며 $\phi_0(x, u) = 0$ 를 만족한다는 것을 알 수 있다. 본 논문에서는 관측기를 설계하기 위하여 상태변환 $\xi = \Phi(x)$ 와 이로부터 유도되는 또 다른 상태변환을 사용할 것이다. 실제로, 상태변환 $\xi = \Phi(x)$ 을 사용하면 시스템 (2)은 다음과 같은 표준형으로 변환 된다 :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_2 \\ \xi_2 &= \xi_3 + \psi_2(x) \\ \xi_3 &= \xi_4 \\ \xi_4 &= b(x) + a(x)u \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= Bx_1x_4^2 \\ a(x) &= -\frac{1}{Mx_1^2 + J + J_b} BG \cos x_3 \\ b(x) &= \frac{BG \cos x_3}{Mx_1^2 + J + J_b} (2Mx_1x_2x_4 + MGx_1 \cos x_3) \\ &\quad + BGx_4^2 \sin x_3 \end{aligned} \quad (36)$$

이다. 좌표변환 (35)에 의하여

$$\Phi^{-1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ -\arcsin\left(\frac{\xi_3}{BG}\right) \\ -\xi_4(B^2G^2 - \xi_3^2)^{-1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

이고 (18)에 의하여

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z_1 + k_1y \\ z_2 + k_2y \\ z_3 + k_3y \end{bmatrix}$$

이므로

$$\begin{aligned} x &= \Phi^{-1}(y, z + Ky) \\ &= \begin{bmatrix} y \\ z_1 + k_1y \\ -\arcsin\left(\frac{z_2 + k_2y}{BG}\right) \\ -(z_3 + k_3y)[(BG)^2 - (z_2 + k_2y)^2]^{-1/2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

을 얻을 수 있다. 따라서, 제안된 저차화관측기 (22)는

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= -k_1z_1 + z_2 + (k_2 - k_1^2)y + Bx_1x_4^2 \\ \hat{x}_2 &= -k_2z_1 + z_3 + (k_3 - k_2k_1)y \\ \hat{x}_3 &= -k_3z_1 - k_3k_1y + a(\Phi^{-1}(y, z + Ky))u \\ &\quad + b(\Phi^{-1}(y, z + Ky)) \end{aligned}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{z}_1 + k_1y \\ -\arcsin\left(\frac{\hat{z}_2 + k_2y}{BG}\right) \\ -(\hat{z}_3 + k_3y)[(BG)^2 - (\hat{z}_2 + k_2y)^2]^{-1/2} \end{bmatrix}$$

로 주어진다. 여기서, $a(x)$ 와 $b(x)$ 는 (36)에서 정의된 함수이며 관측기 이득 k_1, k_2, k_3 는 다항식 $s^3 + k_1s^2 + k_2s + k_3 = 0$ 이 Hurwitz가 되도록 선정한다. 모의실험을 통하여 기존 선형관측기와의 성능을 비교하기 위하여 시스템 매개변수를 $M=0.05, R=0.01, J=0.02, J_b=2 \times 10^{-6}, G=9.81, B=0.7143$ 로 정하였다.[10] 또한, 플랜트의 초기조건, 제안된 관측기의 초기조건, 선형관측기의 초기조건은 각각

$$\begin{aligned} x(0) &= [0.4 \ 0.1 \ x_3(0) \ 0.3]^T \\ \hat{z}(0) &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ \hat{x}(0) &= [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \end{aligned}$$

로 선정하였으며, $x_3(0)$ 의 값을 변화시켜가면서 두 관측기의 성능을 비교하였다. 제어입력 u 는 출력 y 가 기준궤적 $y_R = \cos \frac{\pi}{2} t$ 를 추적하도록 근사 입출력제어기[10]를 사용하여 구현하였다. 제안된 관측기와 선형관측기의 이득은 관측오차시스템의 극점이 모두 -7에 위치하도록 선정하여 공정한 비교가 이루어지도록 하였다. 그림 2는 플랜트의 초기조건이 $x_3(0) = 0.1$ 일 때의 x_2 와 그 추정치, x_4 와 그 추정치를 각각 도시한 것으로, 선형관측기에 비해서 제안된 저

차화관측기가 좋은 성능을 보여주고 있다. 또한, 그림 3은 $x_3(0)=0.23$ 일 때의 결과로서, 제안된 관측기의 관측오차는 1초 이후 바로 0으로 수렴하는 반면에, 선형관측기의 출력은 매우 불안정한 형태를 보여주고 있다. 추가적인 모의실험 결과, 선형관측기는 $x_3(0)>0.35$ 인 경우에는 관측기의 출력이 발산하나, 제안된 관측기는 $x_3(0)\leq 1.57$ 까지는 관측오차가 0으로 수렴한다는 것을 확인할 수 있었다. 따라서, 제안된 저차화관측기는 선형관측기에 비해서 보다 넓은 영역에서 우수한 성능을 보여줄 수 있다.

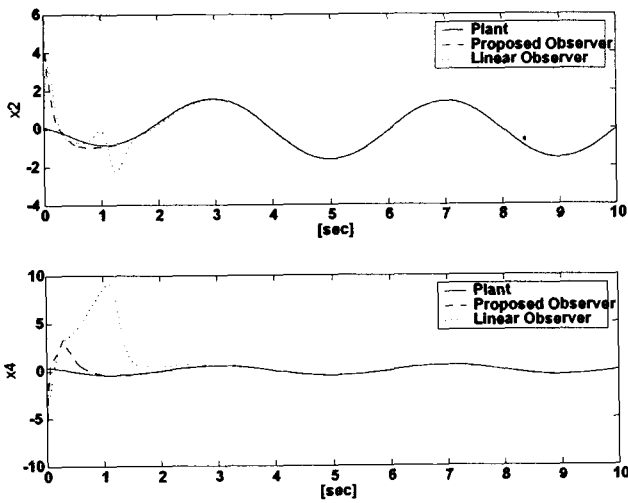


그림 2 $x_3(0)=0.1$ 일 때의 관측기 성능 비교
Fig. 2 Observer output comparison for $x_3(0)=0.1$

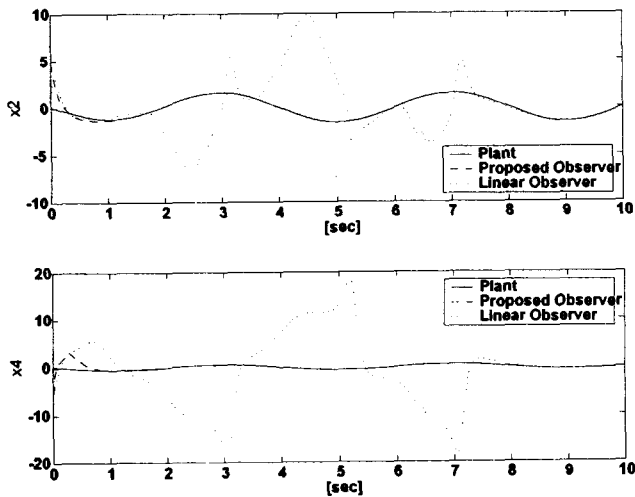


그림 3 $x_3(0)=0.23$ 일 때의 관측기 성능 비교
Fig. 3 Observer output comparison for $x_3(0)=0.23$

5. 결 론

본 논문에서 제안된 비선형 저차화관측기는 상대차수가

잘 정의되지 않는 비선형시스템에 대한 새로운 시도라고 할 수 있다. 모의실험결과, 기존의 선형관측기와 비교하여 보다 넓은 영역에서 시스템의 상태를 추정할 수 있는 능력이 있음을 입증하였다. 제안된 저차화관측기는 출력에 해당하는 상태변수는 추정하지 않으므로 일반적인 비선형 관측기보다 간단한 구조를 갖을 것으로 예상되지만, 본 연구 결과를 실제 실험에 적용할 때 발생할 수 있는 문제점에 대한 추가적인 연구가 필요할 것으로 보인다.

감사의 글

본 연구는 숭실대학교 교내연구비 지원으로 수행되었음.

참 고 문 헌

- [1] A. Isidori, Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [2] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft, Nonlinear Dynamical Control Systems. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [3] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic, Nonlinear and Adaptive Control Design, John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [4] A. J. Krener, and A. Isidori, "Linearization by output injection and nonlinear observers," Systems and Control Letters, vol. 3, pp. 47-52, 1983.
- [5] J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman, "A Simple Observer for Nonlinear Systems: Application to Bioreactors," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 37, pp. 875-880, 1992.
- [6] G. Ciccarella, M. Dallamora, and A. Germani, "A Luenberger-like observer for nonlinear systems," Int. J. Contr., vol. 57, no. 3, pp. 537-556, 1993.
- [7] N. H. Jo, and J. H. Seo, "Input output linearization approach to state observer design for nonlinear systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 45, pp. 2388-2393, 2000.
- [8] N. H. Jo, and J. H. Seo, "A state observer for nonlinear systems and its application to ball and beam systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 45, pp. 968-973, 2000.
- [9] N. H. Jo, and J. H. Seo, "Observer design for nonlinear systems that are not uniformly observable," Int. J. Control, vol. 75, pp. 369-380, 2002.
- [10] J. Hauser, S. Sastry, and P. Kokotovic, "Nonlinear control via approximate input output linearization: The ball and beam example," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 37, pp. 875-880, 1992.
- [11] R. Marino, and P. Tomei, Nonlinear Control Design, Prentice Hall, London, 1995.

- [12] M. Vidyasagar, Nonlinear Systems Analysis, 2nd edition, Prentice Hall, New Jersey, 1993.
- [13] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1976.
- [14] T. Kailath, Linear systems, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1980.
- [15] H. K. Khalil, Nonlinear systems, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1996.

저 자 소 개



조 남 훈 (趙南薰)

1992년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 2000년 서울대 대학원 전기공학부 졸업(공박). 2000년~2001년 서울대 자동화시스템공동연구소 연구원. 2001년~2002년 삼성전자 DVS사업부 책임연구원. 2002년~현재 숭실대학교 전기제어시스템공학부 조교수.

Tel : 02-820-0643

E-mail : nhjo@ssu.ac.kr