

논문 2004-41TC-8-8

MIMO 시스템의 채널 용량에 대한 채널 추정 오차의 영향 분석

(Effect of Channel Estimation Error on Capacity of MIMO Systems)

함재상*, 심세준*, 이충용**, 박현철***, 홍대식**

(Jaesang Ham, Seijoon Shim, Chungyong Lee, Hyuncheol Park, and Daesik Hong)

요약

채널 추정 오차가 존재하는 상황에서 MIMO 시스템의 채널 용량을 수식적으로 분석한다. 수식적인 분석에 의해, 채널 용량은 평균 신호 대 잡음비 (SNR) 와 함께 채널 추정 오차 (MSE)에 영향을 받음을 알 수 있다. 또한, 본 논문에서는 평균 SNR 과 채널 용량의 손실량이 제한되어 있을 경우, 허용가능한 채널 추정 오차를 구함으로써 주어진 시스템에 적합한 채널 추정 기법을 선택하는 기준을 제시한다. 실험 결과로부터 1 bps/Hz 채널용량의 손실에 대해 허용 가능한 채널 추정 오차는 20dB와 40dB의 평균 신호 대 잡음비에서 각각 10^{-2} 와 10^{-4} 임을 확인 할 수 있다.

Abstract

The capacity of MIMO systems is numerically analyzed when channel estimation error exists. The analysis shows that the capacity is influenced by Mean Square Error (MSE) as well as average Signal to Noise Ratio (SNR). Furthermore, in this paper we present the standard selecting a channel estimator suitable to a system owing to get a tolerable channel estimation error in a given average SNR and channel capacity loss. The simulation results show that the tolerable MSEs for 1 bps/Hz capacity loss are about 10^{-2} and 10^{-4} at 20 dB and 40 dB average SNR, respectively.

Keywords : MIMO systems, channel capacity, channel estimation error, mean square error

I. 서론

대역 제한된 시스템에서 데이터의 전송 용량을 늘리거나 공간 다이버시티(spatial diversity)를 획득하여 데이터의 오차 확률을 개선시키기 위해서 MIMO (Multiple Input Multiple Output) 기법에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다^{[1][2]}. 이론적으로 MIMO 시스템에서 채널 용량은 송신 안테나 수의 증가에 비례하여 증대된다^[3].

게다가, 송신단에서 채널상태를 정확히 알 때 시스템

의 성능을 최적화시킬 수 있게 된다. 그러나 실제 환경에서는 통신채널상태를 정확히 알 수 없기 때문에 추정된 채널 정보를 이용하여 신호를 검출하고, 추정된 채널에 근거한 적응 기법을 사용하므로 추정 오차에 의한 시스템의 성능열화가 발생하게 된다. 그러므로, 본 논문에서는 추정된 채널의 오차가 MIMO 시스템의 채널 용량에 미치는 영향에 대한 분석을 통해 주어진 채널 용량에 따라 시스템에서 허용하는 채널 추정 오차 범위를 찾고자 한다.

II. 본론

1. 시스템 모델

송수신 안테나가 각각 M_T 개와 M_R 개인 MIMO 시스템을 고려한다. 이 때, 송수신단에 충분한 산란체들이 존재하여 안테나에 의한 공간 상관도가 존재하지 않고 주파수 비선택적 레일리 페이딩 채널을 가정한다. 이러

* 학생회원, ** 정회원, 연세대학교 전기전자공학과
(Dept. of Electrical Electronic Engineering, Yonsei University)

*** 정회원, 한국정보통신대학교 전기전자공학과
(School of Engineering, Information and Communication University)

※ 본 논문은 한국과학재단의 목적 기초 연구 사업
(R01-2002-000-00153-0)의 지원으로 수행되었음.
접수일자: 2004년4월14일, 수정완료일: 2004년7월10일

한 MIMO 시스템에서, 수신신호 벡터 \mathbf{y} 는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad (1)$$

여기에서 \mathbf{H} 는 $M_R \times M_T$ ($M_T \leq M_R$) 복소 채널 행렬, \mathbf{x} 는 $M_T \times 1$ 송신신호 벡터이며, \mathbf{n} 는 평균이 0 이고 분산이 σ_n^2 인 가산 백색 가우시안 잡음 벡터이다. 제한된 전체 송신전력, P_T , 으로부터 각 안테나는 동일한 송신전력으로 독립적인 데이터를 전송한다고 가정한다.

안테나마다 동일한 전력이 할당되는 경우, 시스템 용량 C 은 일반적으로 다음과 같이 표현된다^{[3][4]}.

$$\begin{aligned} C &= \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{M_T} + \frac{P_T}{M_T \sigma_n^2} \mathbf{H}^H \mathbf{H} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{M_T} \log_2 \left(1 + \frac{P_T}{M_T \sigma_n^2} \lambda_k^2 \right), \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서 \mathbf{I}_{M_T} 는 $M_T \times M_T$ 의 단위행렬이고, λ_k^2 은 채널행렬 \mathbf{H} 의 k 번째 고유치이다.

2. 시스템 용량에 대한 채널 추정 오차의 영향

실제 시스템에서 수신단은 채널에 대한 정확한 정보가 아닌 추정된 정보만을 가지게 되므로, 실제 채널과 추정된 채널 사이에 오차가 발생하게 된다. 그러므로 본 논문에서는, 이러한 오차가 시스템의 채널 용량 측면에서 미치는 영향을 분석하고자 한다^[5].

채널 추정 오차에 의한 MIMO 시스템의 성능열화를 수식적으로 계산하기 위해, 독립적인 레일리 페이딩 채널을 다음과 같이 표현한다.

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} + \Delta \mathbf{H}, \quad (3)$$

여기에서 \mathbf{H} 는 실제 채널행렬이고, $\hat{\mathbf{H}}$ 는 추정된 채널 행렬이며, 추정 오차 행렬 $\Delta \mathbf{H}$ 는 구성요소 $\Delta h_{i,j}$ ($i = 1, 2, \dots, M_R, j = 1, 2, \dots, M_T$) 가 표준정규분포를 갖는 랜덤 행렬을 의미한다. 그래서 $\Delta \mathbf{H}$ 의 분산은 식 (4)와 같이 실제 채널과 추정된 채널사이의 MSE(Mean Square Error)로써 정의할 수 있다.

$$E\{\Delta \mathbf{H} \Delta \mathbf{H}^H\} = MSE \cdot \mathbf{I}, \quad (4)$$

여기에서 $MSE = \left(\sum_{j=1}^{M_T} \sum_{i=1}^{M_R} \Delta h_{i,j}^2 \right) / M_T M_R$ 이다. 이때

$\Delta \mathbf{H}$ 의 차원이 충분히 크다고 가정하면, 식 (4)는 더욱 의미를 갖게 된다^[6].

추정된 채널을 근거로 하여, ZF(Zero Forcing) 수신기를 사용할 때, 수신기 출력값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{n} \\ &= \mathbf{x} + \hat{\mathbf{H}}^T \Delta \mathbf{H} \mathbf{x} + \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (5)$$

여기에서 $\hat{\mathbf{H}}^T = (\hat{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{H}})^{-1} \hat{\mathbf{H}}^H$ 이다.

식 (5) 로부터, SINR(Signal to Interference plus Noise), 즉 \mathbf{x} 와 $\hat{\mathbf{H}}^T \Delta \mathbf{H} \mathbf{x} + \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{n}$ 의 크기비를 계산함으로써 채널 추정 오차의 영향을 분석할 수 있다^[7]. 신호의 상관행렬과 간섭신호와 잡음의 상관행렬을 이용하여 SINR을 구하게 된다. 먼저 신호성분에 대한 상관행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{R}_{xx} \equiv E\{\mathbf{x} \mathbf{x}^H\} = \frac{P_T}{M_T} \cdot \mathbf{I}_{M_T}. \quad (6)$$

그리고 원하지 않는 신호의 상관행렬, \mathbf{R}_{uu} ,은 간섭신호와 잡음이 서로 독립적이기 때문에 각각의 상관행렬의 합으로 표현할 수 있고, 간섭신호의 상관행렬, \mathbf{R}_{ii} ,과 잡음의 상관행렬, \mathbf{R}_{nn} ,은 채널 추정 오차에 의해 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ii} &\equiv E\{(\hat{\mathbf{H}}^T \Delta \mathbf{H} \mathbf{x})(\hat{\mathbf{H}}^T \Delta \mathbf{H} \mathbf{x})^H\} \\ &= \frac{P_T}{M_T} E\{\hat{\mathbf{H}}^T \Delta \mathbf{H} \Delta \mathbf{H}^H \hat{\mathbf{H}}^H\} \\ &= \frac{P_T}{M_T} \cdot MSE \cdot (\hat{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{H}})^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{nn} &\equiv E\{(\hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{n})(\hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{n})^H\} \\ &= \sigma_n^2 (\hat{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{H}})^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

따라서, 원하지 않는 신호의 상관행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{uu} &\equiv \mathbf{R}_{ii} + \mathbf{R}_{nn} \\ &= \left(\frac{P_T}{M_T} \cdot MSE + \sigma_n^2 \right) (\hat{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{H}})^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

이렇게 구한 \mathbf{R}_{xx} 와 \mathbf{R}_{uu} 로부터 추정된 채널과 추정 오차를 고려한 SINR을 구함으로써 실제 채널 용량, \tilde{C} 을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \log_2 \det(\mathbf{I}_{M_T} + \mathbf{R}_{uu}^{-1} \mathbf{R}_{xx}) \\ &= \sum_{k=1}^{M_T} \log_2 \left(1 + \frac{\hat{\lambda}_k^2}{MSE + \frac{1}{SNR_b}} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

여기에서 $SNR_b = \frac{P_T}{M_T \sigma_n^2} = \frac{SNR}{M_T}$ 이고, $\hat{\lambda}_k^2$ 은 추정된 채널행렬 $\hat{\mathbf{H}}$ 의 k 번째 고유치이다.

식 (10)으로부터, 채널 용량이 SNR 뿐만 아니라 MSE에 의한 영향을 직접적으로 받음을 확인할 수 있다. 식(10)과 (2)의 차에 의해, 채널 추정 오차에 의한 채널 용량 손실은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_{loss} &= C - \tilde{C} \\ &= \sum_{k=1}^{M_T} \log_2 \left(\frac{(1 + MSE \cdot SNR_b) \left(\frac{1}{SNR_b} + \lambda_k^2 \right)}{MSE + \frac{1}{SNR_b} + \hat{\lambda}_k^2} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

여기에서 높은 SNR과 $\hat{\lambda}_k^2 / \lambda_k^2 = 1 + \Delta \lambda_k^2 / \lambda_k^2 \approx 1$ 을 실험적으로 가정하면 식(11)을 다음과 같이 간략화할 수 있다.

$$C_{loss} \approx \sum_{k=1}^{M_T} \log_2 \left(\frac{\frac{1}{MSE} + SNR_b}{\frac{1}{MSE} + \frac{1}{\lambda_k^2}} \right). \quad (12)$$

식(11)과 (12)에서 보는 바와 같이, 우리는 채널 추정의 MSE를 이용하여 채널 용량에 대한 채널 추정 오차의 영향을 수식적으로 분석하였고, C_{loss} 가 주어졌을 때, 허용가능한 추정 오차 범위를 찾으므로써 채널 추정기 방법 적용 여부를 판단할 수 있게 한다.

III. 모 의 실험

모든 실험은 송수신 안테나가 각각 4개인 MIMO 시스템을 대상으로 하였다. SNR과 안테나 수에 따른 이론적인 시스템의 채널 용량을 식 (10)으로부터 수식적으로 구할 수 있고, 이를 실험적으로 구한 채널 용량과 비교, 분석하였다.

그림 1은 식 (4)에 의해 생성된 MSE를 기준으로 평균 SNR과 채널 용량사이의 관계를 보여주고 있다. 임의의 고정된 MSE를 중심으로 그림 1을 살펴보면, 일반적으로 평균 SNR이 증가함에 따라 채널 용량도 또한 증가하다가 결국 특정한 값으로 수렴함을 알 수 있다. 이는 낮은 SNR에서는 평균 SNR이 채널 용량에 큰 영

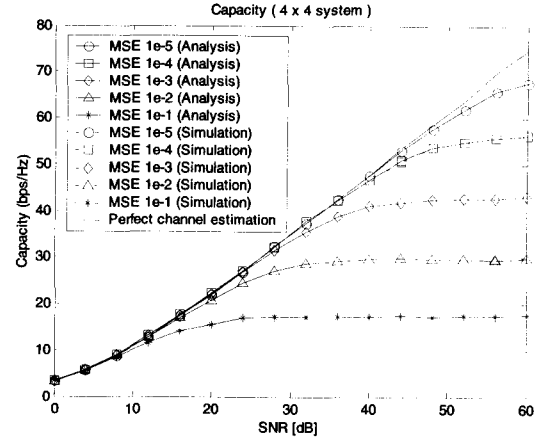


그림 1. 채널추정오차에 따른 평균SNR에 대한 채널 용량 (4 X 4 MIMO 시스템)
Fig. 1. Capacity versus average SNR by effect of channel estimation errors (MSEs) (4 X 4 MIMO system).

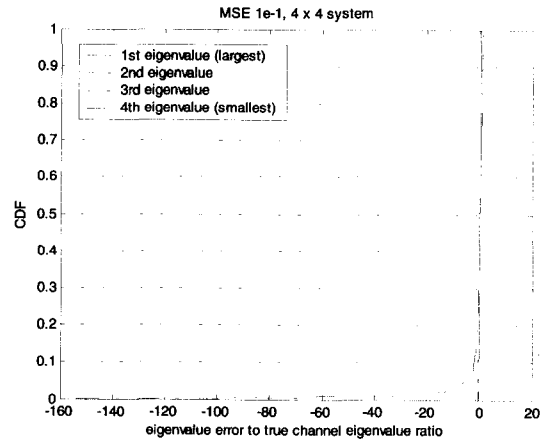


그림 2. $MSE = 10^{-1}$ 일때, $(\hat{\lambda}_k^2 - \lambda_k^2) / \lambda_k^2$ 에 대한 확률분포함수 (4 X 4 MIMO 시스템)
Fig. 2. CDF for $(\hat{\lambda}_k^2 - \lambda_k^2) / \lambda_k^2$ when $MSE = 10^{-1}$ (4 X 4 MIMO system).

향을 미치는 반면에 높은 SNR에서는 MSE의 영향이 훨씬 크기 때문에 발생하는 현상이다. 그림 1에 의해, 채널 용량에 대한 채널 추정 오차의 영향을 수식적으로 분석한 결과가 실제 실험한 결과와 매우 유사함을 알 수 있다. 그러므로, 우리는 채널 용량과 채널 추정 오차 사이의 관계를 분석하기 위해 식 (10)을 이용할 수 있다.

그림 2는 실험적으로 채널 추정 오차가 10^{-1} 일때, $E\{(\hat{\lambda}_k^2 - \lambda_k^2) / \lambda_k^2\} = 0$ 임을 보여주고 있다. 만약 채널 추정 오차가 10^{-1} 보다 작다면, 명백히 동일한 결과를 얻을 수 있으며, 이 결과로부터 식 (11)을 실험적으

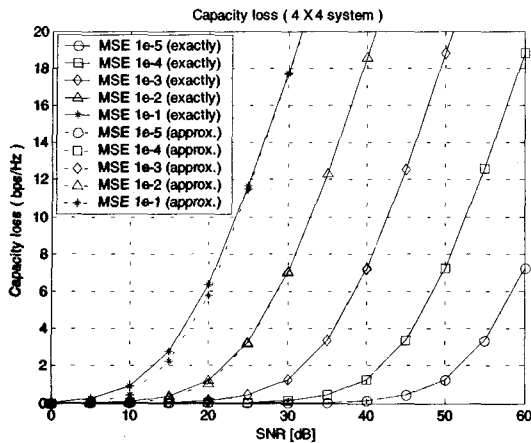


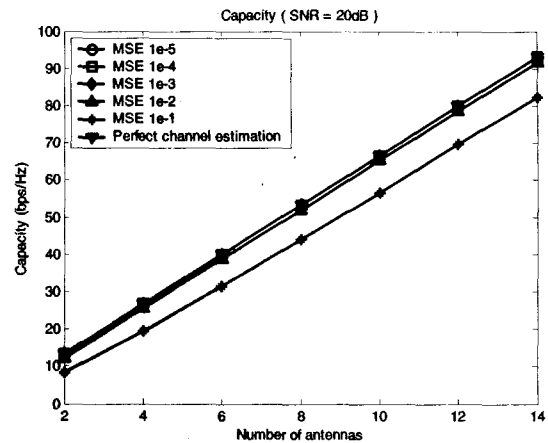
그림 3. 채널추정오차에 따른 평균 SNR에 대한 채널용량의 손실량 (4 X 4 MIMO 시스템)

Fig. 3. Capacity loss versus average SNR by channel estimation errors(MSEs) (4 X 4 MIMO system).

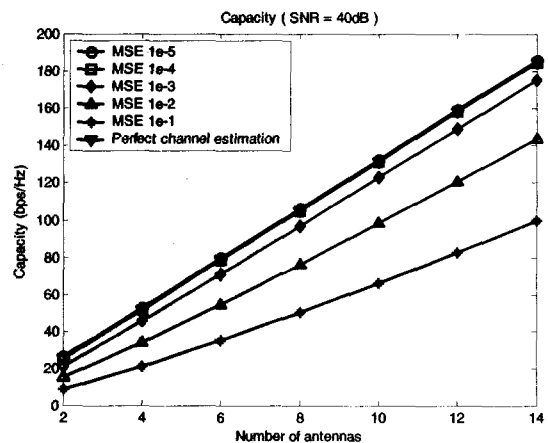
로 식 (12)로 간략화 시킬 수 있는 것이다.

그림 3은 식 (11)과 (12)로부터 구한 손실된 채널용량에 대한 결과를 보여주고 있다. 여기에서, 낮은 SNR에서는 약간의 오차가 존재하지만, 높은 SNR에서는 거의 동일한 결과를 볼 수 있다. 식 (11)과 (12)를 이용하여, 평균 SNR이 주어졌을 때, 채널 추정 오차에 의해 손실된 채널 용량의 크기를 계산할 수 있다. 더 나아가서, 제한된 채널 용량의 손실과 평균 SNR이 주어졌을 때, 허용 가능한 채널 추정 오차를 구할 수 있다. 예를 들어, 허용되는 채널 용량의 손실을 1 bps/Hz 이하라고 가정하자. 이 때, 평균 SNR이 20dB이면 채널 추정 오차(MSE)가 10^{-2} 보다 작아야 하고, 평균 SNR이 40dB 인 경우는 10^{-4} 보다 작아야 함을 그림 3을 통해 알 수 있다. 이와 같이, 우리는 제한된 채널 용량의 손실량과 평균 SNR에 대해, 허용 가능한 최대 채널 추정 오차를 구할 수 있는 것이다.

송수신 안테나가 각각 1개인 SISO (Single Input Single Output) 시스템에서 채널정보를 얻기 위해 LS(Least Square) 추정을 이용한 경우, 20dB의 평균 SNR에서 실제 채널과 추정된 채널사이의 오차 범위는 약 $10^{-3} \sim 10^{-1}$ 이 된다^[8]. 이를 MIMO 시스템으로 단순 확장하여 고려하면, 채널 추정 오차에 대한 우리의 분석결과, 식 (11)과 (12)로부터, 평균 SNR이 20dB 일때, LS 추정 오차 범위에서 손실된 채널 용량은 약 0.1~6.5 bps/Hz가 된다. 그러므로 원하는 채널 용량을 갖는 실제 시스템을 구현할 때, 해당 시스템에 적용 가능한 채널 추정기법에 대한 선택의 기준으로 우리의



(a) 평균 SNR = 20dB
(a) Average SNR = 20dB.



(b) 평균 SNR = 40dB
(b) Average SNR = 40dB.

그림 4. 채널 추정 오차에 따른 안테나 수에 대한 채널용량 (4 X 4 MIMO 시스템)

Fig. 4. Capacity loss versus the number of antennas by channel estimation errors(MSEs) (4 X 4 MIMO system).

분석결과를 적용할 수 있다.

그림 4의 (a)와 (b)는 채널 용량이 안테나 수가 증가함에 따라 선형적으로 증가하는 현상을 보여주고 있다.

그러나, 평균 SNR이 클 경우, 채널 추정 오차의 증가와 함께 채널 용량의 열화 현상도 커지게 된다.

IV. 결 론

우리는 정확하지 않은 채널 추정이 MIMO 시스템의 채널 용량에 어떠한 영향을 미치는 지에 대해 수식적으로 접근하여 연구하였다. 수식적인 분석과 실험 결과로부터, 채널 용량은 채널 추정 오차, 평균 SNR 그리고 안테나 수 등의 요소에 의해 영향을 받음을 알 수 있다.

안테나 수가 고정되어 있는 경우, 채널 용량은 채널 추정 오차와 평균 SNR, 두 요소간의 크기 차이에 의해서 결정된다. 다시 말해서, 평균 SNR이 증가하더라도, 채널 추정 오차가 증가하면서 채널 용량의 증가율은 감소하며 결국 그 값은 수렴하게 된다.

또한, 우리는 평균 SNR과 채널 용량의 손실량이 제한되어 있을 경우, 허용가능한 채널 추정 오차를 구함으로써 주어진 시스템에 적합한 채널 추정기법을 선택하는 기준을 제시하였다. 예를 들어, 채널 용량의 손실량이 1 bps/Hz일때, 20dB와 40dB의 평균 SNR에서 각각 허용되는 채널 추정 오차는 약 10^{-2} 과 10^{-4} 이 된다.

참 고 문 헌

- [1] G. J. Foschini and M. J. Gans, "On limits of wireless communication in a fading environment when using multiple antennas", *Wireless Personal Communication*, pp.311-335, Vol.6, No.3, Mar. 1998.
- [2] A. Paulraj, R. Nabar and D. Gore, *Introduction to Space-Time Wireless Communications first edition*, Cambridge University press, 2003
- [3] F. R. Farrokhi, G. J. Foschini, A. Lozano and R. A. Valenzuela, "Link-Optimal Space-Time Processing with Multiple Transmit and receive Antennas", *IEEE Communication letters*, Vol.5, No.3, Mar. 2001
- [4] I. E. Telatar, "Capacity of Multi-antenna Gaussian Channels", *European Trans. Telecommunication*, pp.586-595, Vol.10, No.6, 1999.
- [5] P. Kyritsi, R. A. Valenzuela and D. C. Cox, "Channel and Capacity Estimation Errors", *IEEE communication letters*, pp. 517-519, Vol. 6, No. 12, Dec. 2002
- [6] A. Leke and J. M. Cioffi, "Impact of imperfect channel knowledge on the performance of multi-carrier systems", *Global Telecommunications Conference*, pp. 951-955, Vol. 2, Nov. 1998
- [7] X. Zhang and S-Y. Kung, " Capacity Analysis for Parallel and Sequential MIMO Equalizers", *IEEE Trans. Signal processing*, vol. 51, pp.2989-3002, Nov. 2003
- [8] T. Ekman, "Analysis of the LS Estimation Error on a Rayleigh Fading Channel", *Proceeding of Vehicular Technology Conference 2001*, pp. 372-376, Vol. 1, May 2001.

저 자 소 개



함 재 상(학생회원)
2003년 연세대학교 전자공학과
학사 졸업.
2003년~현재 연세대학교
전자공학과 석사과정.

<주관심분야: 통신신호처리, MIMO 시스템>



심 세 준(학생회원)
1999년 연세대학교 전자공학과
학사 졸업.
2001년 연세대학교 전자공학과
석사 졸업.
2001년~현재 연세대학교
전자공학과 박사과정.

<주관심분야: 통신신호처리, MIMO 시스템>



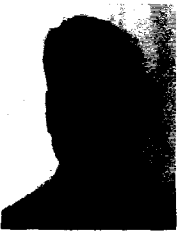
이 충 용(정회원)
1995년 Georgia Institute of
Technology 박사 졸업.
1996년~1997년 7월 삼성전자
1997년 9월~현재 연세대학교
전자공학과 부교수

<주관심분야: 통신신호처리, 어레이 신호처리,
MIMO 시스템>



박 현 철(정회원)
1997년 Georgia Institute of
Technology 박사 졸업
1997년~2002년 삼성전자
2002년~현재 ICU 조교수

<주관심분야: 변조 및 코딩, 정보이론>



홍 대 식(정회원)
1990년 Purdue University
Electrical Eng. 박사졸업
1991년~현재 연세대학교
전기전자공학과 교수

<주관심분야: 디지털통신, 통신신호처리, 4G시스
템, OFDM시스템>