

## 이방성 섬유 배열이 복합재료의 응력에 미치는 영향

이정기\* · 이형민\*

(2004년 2월 24일 접수, 2004년 7월 19일 심사완료)

### Effects of Anisotropic Fiber Packing on Stresses in Composites

Jung-Ki Lee and Hyeong-Min Lee

**Key Words:** Mixed Volume and Boundary Integral Equation Method(혼합 체적-경계 적분방정식법), Volume Integral Equation Method(체적 적분방정식법), Boundary Integral Equation Method(경계요소법), Inclusions(함유체), Voids(공동), Fiber Packing(섬유 배열)

#### Abstract

In order to investigate effects of anisotropic fiber packing on stresses in composites, a Volume Integral Equation Method is applied to calculate the elastostatic field in an unbounded isotropic elastic medium containing multiple orthotropic inclusions subject to remote loading, and a Mixed Volume and Boundary Integral Equation Method is introduced for the solution of elastostatic problems in unbounded isotropic materials containing multiple anisotropic inclusions as well as one void under uniform remote loading. A detailed analysis of stress fields at the interface between the isotropic matrix and the central orthotropic inclusion is carried out for square, hexagonal and random packing of orthotropic cylindrical inclusions, respectively. Also, an analysis of stress fields at the interface between the isotropic matrix and the central orthotropic inclusion is carried out, when it is assumed that a void is replaced with one inclusion adjacent to the central inclusion of square, hexagonal and random packing of orthotropic cylindrical inclusions, respectively, due to manufacturing and/or service induced defects. The effects of random orthotropic fiber packing on stresses at the interface between the isotropic matrix and the central orthotropic inclusion are compared with the influences of square and hexagonal orthotropic fiber packing on stresses. Through the analysis of plane elastostatic problems in unbounded isotropic matrix with multiple orthotropic inclusions and one void, it will be established that these new methods are very accurate and effective for investigating effects of general anisotropic fiber packing on stresses in composites.

#### 1. 서론

본 논문에서는 이방성 함유체의 배열이 복합재료의 응력에 미치는 영향에 대하여 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법(Volume Integral Equation Method)과 혼합 체적-경계 적분방정식법(Mixed Volume and Boundary Integral Equation Method)이라는 새로운 수치해석 방법들을 적용하여, 비교

적 간단한 형태의 이방성을 나타내는 직교 이방성 함유체 및 공동이 등방성 무한거체에 포함된 무한고체가 정적 무한하중을 받을 때 탄성정역학 응력해석을 수행한다.

즉, 체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법이, 서로 상호작용을 하는 다수의 이방성 함유체<sup>(2,10,23)</sup> 및 공동을 포함하는 등방성 무한고체가 정적 무한하중을 받을 때 고체 내부에 발생하는 변형, 변형률 및 응력분포 해석에 효과적인 수치해석 방법임을 입증하고, 아울러, 이방성 함유체의 배열이 복합재료의 응력에 미치는 영향을 효과적으로 연구한다.

† 책임저자, 회원, 홍익대학교 기계정보공학과

E-mail : inq3jkl@wow.hongik.ac.kr

TEL : (041)860-2619 FAX : (041)866-9129

\* 홍익대학교 대학원 기계정보공학과

## 2. 체적 적분방정식법(VIEM)

Fig. 1은 x축에 평행하게 전파하는 평면 시간-조화 탄성파가 입사할 때 재료특성이 다른 다양한 형태를 갖는 다수의 함유체에 의하여 산란현상이 발생하는 일반적인 탄성동역학 문제를 나타낸다. Fig. 2는 재료특성이 다른 다양한 형태를 갖는 다수의 함유체를 포함하는 무한고체가 무한하중을 받는 일반적인 탄성정역학 문제를 나타낸다. 여기서, 무한하중이란 무한원방에서 작용하는 하중을 나타낸다.

Fig. 1에서, 기지(matrix)는 무한공간을 차지하는 균일한 등방성 재료로 이루어지고, 함유체들은 기지와 다른 이방성 재료로 이루어진다고 가정한다.  $\rho^{(1)}$ 과  $c_{ijkl}^{(1)}$ 은 함유체의 밀도와 탄성상수를 나타내고,  $\rho^{(2)}$ 와  $c_{ijkl}^{(2)}$ 는 기지의 밀도와 탄성상수를 나타낸다. 함유체들과 기지 사이의 경계면은 변위와 표면력 벡터(traction vector)의 연속성을 보장하는 완전결합이라고 가정한다.

$e^{-i\alpha} \mathbf{u}_m^o(\mathbf{x}, \omega)$ 를 입사파의 변위 벡터의 m성분이라고 하고, 함유체가 포함되어 있는 무한고체의 임의의 위치에서의 변위 벡터의 m성분을  $e^{-i\alpha} \mathbf{u}_m(\mathbf{x}, \omega)$ 라고 한다. 여기서  $\omega$ 는 파형의 각 주파수(angular frequency)를 나타내고, 공통적인 시간인자  $e^{-i\alpha}$ 의 표시는 생략하기로 한다. Mal과 Knopoff<sup>(18)</sup>는 무한고체 내부의 임의의 위치에서의 변위 벡터  $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ 가

$$\begin{aligned} u_m(\mathbf{x}) = & u_m^o(\mathbf{x}) \\ & + \int_V [\delta\rho\omega^2 g_i^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_i(\boldsymbol{\xi}) \\ & - \delta c_{ijkl} g_{i,j}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_{k,l}(\boldsymbol{\xi})] d\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (1)$$

의 방정식을 만족함을 보였다. 식 (1)에서 적분은 전체 무한공간에 대해서 이루어지고,  $\delta\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$ 이고  $\delta c_{ijkl} = c_{ijkl}^{(1)} - c_{ijkl}^{(2)}$ 이며 각각 함유체와 기지 사이의 밀도와 탄성상수의 차이를 나타낸다.  $g_i^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})e^{-i\alpha}$ 은 등방성 무한기지에서의 Green 함수이다. 즉,  $g_i^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})e^{-i\alpha}$ 은 등방성 무한기지의  $\mathbf{x}$ 에서 m방향으로 작용하는

단위 집중하중  $\mathbf{e}_m e^{-i\alpha}$  때문에  $\boldsymbol{\xi}$ 에서 발생하게 되는 변위 벡터의 i방향 성분을 나타낸다. 식 (1)에서 합의 규약과 쉼표 표기법이 사용되었으며, 미분은 적분변수  $\boldsymbol{\xi}_i$ 에 관해서 행해진다. 여기서,  $\delta\rho$ 와  $\delta c_{ijkl}$ 가 함유체 내부에서만 0이 아니므로, 피 적분함수(integrand)는 함유체 외부의 무한공간에서는 0이 된다는 사실을 주목해야 한다.

만약  $\mathbf{x}$ 가 함유체 내부에 속하면, 식 (1)은 함유체 내부에서의 미정 변위 벡터  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 에 관한 적분-미분 방정식(integro-differential equation)이 된다. 따라서, 임의의 형상을 갖는 단일의 함유체라 할지라도, 식 (1)의 해를 해석적으로 구한다는 것은 매우 어려운 문제가 된다. 그러므로, 함유체 내부를 표준의 유한요소들을 사용해서 요소 분할하여 함유체 내부에서의  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 를 수치해석 방법으로 결정하는 체적 적분방정식법이 이 정기와 Mal<sup>(13,14)</sup>에 의하여 개발되었다. 일단, 함유체 내부에서의  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 가 결정되면, 함유체 내부에서의 변형을 및 응력을 계산할 수 있고, 또한 함유체 외부에서의 산란파의 변위 및 응력은 식 (1)의 적분값을 구함으로써 별다른 어려움없이 계산할 수 있다.

Fig. 2에 있는 탄성정역학 문제해석의 경우는 파형의 주파수가 0인 극한 경우의 탄성동역학 문제로 수식화할 수 있으며, 함유체를 포함하는 무한고체의 임의의 위치에서의 변위 벡터  $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ 가 다음의 방정식을 만족함을 알 수 있다.<sup>(13,14)</sup>

$$\begin{aligned} u_m(\mathbf{x}) = & u_m^o(\mathbf{x}) \\ & - \int_V \delta c_{ijkl} g_{i,j}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_{k,l}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)에서,  $\delta c_{ijkl} = c_{ijkl}^{(1)} - c_{ijkl}^{(2)}$ 이며, 함유체와 기지 사이의 탄성상수의 차이를 나타낸다.

$g_{i,j}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ 은 등방성 무한기지에서의 탄성정역학 Green 함수(또는 Kelvin의 해)이다.

등방성 무한기지에 다수의 등방성 함유체가 포함된 무한고체에서의 일반적인 탄성동역학 및 탄성정역학 문제를 해석하기 위한 체적 적분방정식법에 대한 자세한 기술은 이 정기와 Mal<sup>(13,14)</sup>에 잘 나타나 있다.

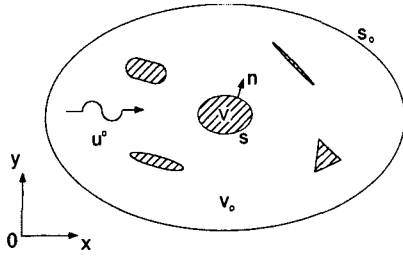


Fig. 1 Geometry of the general elastodynamic problem

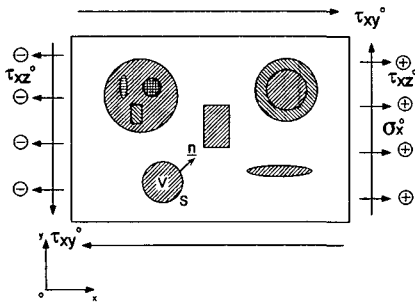


Fig. 2 Geometry of the general elastostatic problem

일반적으로 이방성 재료에서의 Green 함수는 등방성 재료의 경우와 비교해 볼 때 복잡한 형태로 나타나며, 특히, 탄성동역학 문제에서는 이방성 재료에서의 Green 함수를 구하는 것이 매우 어려운 것으로 알려져 있다.<sup>(17)</sup> 식 (1), (2)에서

$g^m$ 은 등방성 무한기지에서의 탄성동역학 및 탄성정역학 Green 함수이므로, 체적 적분방정식법에서는 이방성 함유체에서의 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있다.

2.1 등방성 기지에 다수의 직교 이방성 함유체가 포함되어 있는 무한고체의 탄성해석

Fig. 3에 있는 다수의 직교 이방성 함유체가 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다. 이 경우는 체적 적분방정식법이 최적의 수치해석 방법임을 알 수 있다.<sup>(3,7)</sup> 왜냐하면, 직교 이방성 함유체에 체적 적분방정식법을 적용하면 직교 이방성 재료에 대한 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있고, 또한 유한요소법과 달리, 함유체 내부만을 요소분할하

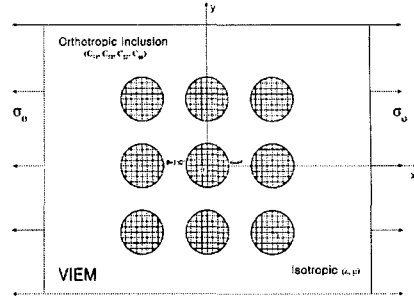


Fig. 3 Multiple orthotropic cylindrical inclusions in unbounded isotropic matrix under uniform remote tensile loading

Table 1 Material properties of the isotropic matrix and the orthotropic inclusion for the elastostatic problems

(Unit: GPa)	Isotropic Matrix	Inclusion	
		Orthotropic #1	Orthotropic #2
$\lambda$	67.34	—	—
$\mu$	37.88	—	—
$c_{11}$	143.10	279.08	13.95
$c_{12}$	67.34	7.80	0.39
$c_{22}$	143.10	30.56	1.53
$c_{66}$	37.88	11.80	0.59

면 되기 때문이다.

2.1.1 다수의 직교 이방성 함유체의 배열이 정사각형(square) 형태일 때

다수의 직교 이방성 함유체가 정사각형 형태로 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다. 우선, 단일의 직교 이방성 함유체가 등방성 기지에 포함되어 있는 경우에 단일의 함유체에서의 응력분포를 조사하였다. 다음에, 다수의 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 함유체의 체적비(volume fraction)는 0.35로 가정하고, 함유체의 개수를 a) 9개, b) 25개, c) 49개로 늘려가면서, 중앙에 위치한 함유체에서의 응력분포를 조사하였다. 직교 이방성 함유체의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있으며, 직교 이방성 함유체의  $c_{11}$ 이 등방성 기지의  $c_{11}$ 보다 큰 경우(orthotropic #1)와 작은 경우(orthotropic #2)를

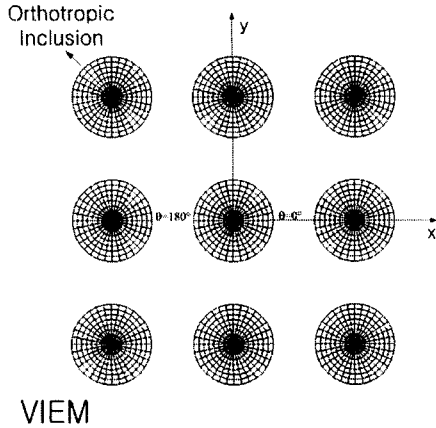


Fig. 4 A typical discretized model in the volume integral equation method

고려해 보았다. Fig. 4는 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델<sup>(22)</sup>의 예를 나타내며, 함유체 내부를 각각 256개의 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였다. Fig. 5는 서로 다른 개수의 함유체가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체[Orthotropic #1(a)과 Orthotropic #2(b)]와 등방성 기지의 경계면에서의 표준화된 인장응력 성분

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_0}\right)$$

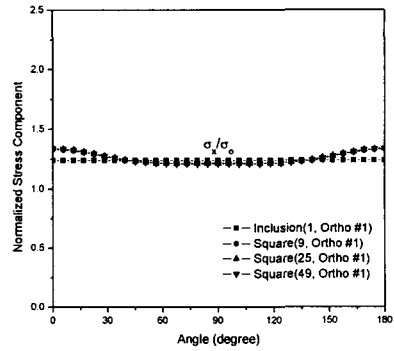
을 나타낸다 ( $\theta = 0^\circ \sim 180^\circ$ ).

이때, 단일 직교 이방성 함유체 내부에서의 인장응력 성분은 일정한 값을 갖게 된다.<sup>(10,23)</sup> 직교 이방성 함유체[Orthotropic #1(a)과 Orthotropic #2(b)]의 개수가 증가하여도 표준화된 인장응력

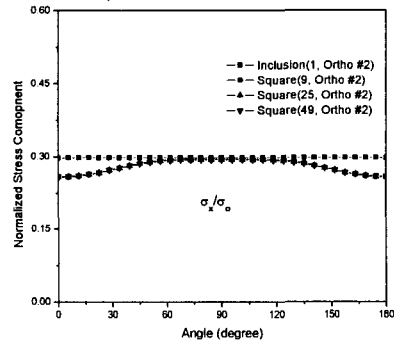
성분 ( $\frac{\sigma_x}{\sigma_0}$ )이 크게 변하지 않는 것을 볼 수 있다. 그 이유는, 함유체의 체적비가 0.35일 때, 중앙에 위치한 함유체와 주변에 있는 함유체들 사이의 상호작용이 그렇게 크게 작용하지 않기 때문으로 사료된다.

2.1.2 다수의 직교 이방성 함유체의 배열이 정육각형(hexagon) 형태일 때

다수의 직교 이방성 함유체가 정육각형 형태로 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다. 함유체의 체적비는 0.35로



(a)



(b)

Fig. 5 Normalized tensile stress component ( $\sigma_x/\sigma_0$ ) at the interface between the central orthotropic inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

가정하고, 함유체의 개수를 a) 7개, b) 19개, c) 37개로 늘려가면서, 중앙에 위치한 함유체에서의 응력분포를 조사하였다. Fig. 6은 체적 적분방정식법에 사용되어진 대표적인 분할된 모델의 예이다. Fig. 7은, 서로 다른 개수의 함유체가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체[Orthotropic #1(a)과 Orthotropic #2(b)]와 등방성 기지의 경계면에서의 표준화된 인장응력 성분

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_0}\right)$$

을 나타낸다 ( $\theta = 0^\circ \sim 180^\circ$ ). 이번에도,

함유체의 체적비가 0.35일 때, 중앙에 위치한 함유체와 주변에 있는 함유체들 사이의 상호작용이

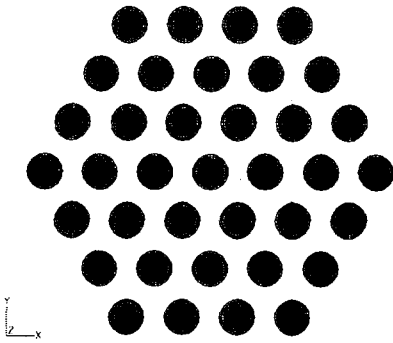
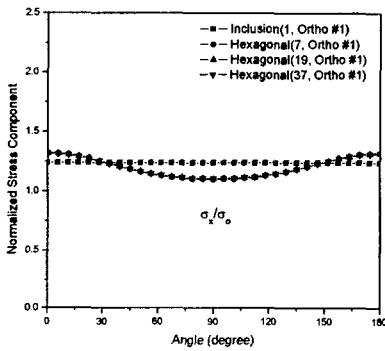
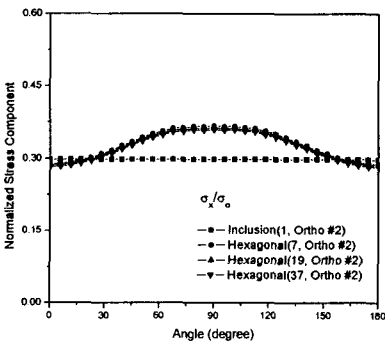


Fig. 6 A typical discretized model in the volume integral equation method for hexagonal inclusion packing array



(a)



(b)

Fig. 7 Normalized tensile stress component ( $\sigma_x/\sigma_0$ ) at the interface between the central orthotropic inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

그렇게 크게 작용하지 않기 때문에, 직교 이방성 함유체[Orthotropic #1(a)과 Orthotropic #2(b)]의 개수가 증가하여도, 규준화된 인장응력 성분 ( $\frac{\sigma_x}{\sigma_0}$ )이 크게 변하지 않는 것을 볼 수 있다.

함유체의 배열이 정사각형일 때와 정육각형일 때를 비교해 보았을 때, 중앙에 위치한 함유체의 경계면에서  $\theta = 90^\circ$ 인 곳에서의 응력이, 함유체의  $c_{11}$ 이 등방성 기지의  $c_{11}$ 보다 큰 경우 (orthotropic #1)에는, 함유체의 배열이 정사각형일 때가 정육각형일 때 보다 높은 반면에, 함유체의  $c_{11}$ 이 등방성 기지의  $c_{11}$ 보다 작은 경우 (orthotropic #2)에는, 함유체의 배열이 정사각형일 때가 정육각형일 때 보다 낮게 나타났음을 알 수 있다.

### 2.1.3 다수의 직교 이방성 함유체의 배열이 임의(random) 형태일 때

대부분의 연구에서는, 앞에서 고찰해 본 대로, 섬유 배열을 정사각형 또는 정육각형 형태 등 일정한 배열로 가정할 때, 유한요소법이나 경계요소법을 이용하는 unit cell 모델이 사용되고 있다. 하지만, 실제의 복합재료(특히, 금속기지 복합재료)의 단면을 조사해 보면, Fig. 8에 보이는 대로, 섬유의 배열이 일정한 배열을 유지하기보다는 원래의 배열에서 조금씩 흐트러진 형태를 나타내는 경우가 많다. 즉, unit cell 모델에 바탕을 둔 해석 결과와 실제의 섬유의 배열에 따른 해석 결과가 서로 다를 가능성이 높다.<sup>(1,4,8,9,11,12,15,19-21,24,25)</sup> 따라서, 본 논문에서는, 등방성 기지에 a) 25개의 직교 이방성 함유체가 정사각형 배열에서 임의로 흐트러져 포함된 무한고체(Fig. 9;  $d_1=2.25a$ ,  $s=0.3a$ ,  $a$ =함유체의 반지름)와 b) Fig. 8에 보이는 실제 복합재료 단면에서의 섬유들의 위치에, 66개의 직교 이방성 함유체가 포함된 무한고체(이미지 분석 시스템을 이용)가 무한 인장하중을 받는 경우를, 각각 평면 변형을 문제로 가정하여, 고찰해 본다. Fig. 10은 66개의 직교 이방성 함유체의 내부만을 요소분할하여 생성한, 체적 적분 방정식법에 사용되어진 모델이다.( $d_1=2.275a$ )

체적 적분방정식법에서는 단일 또는 다수의 함유체가 무한기지에 포함되어 있는 경우에, 무한 공간을 이루는 기지는 요소분할할 필요가 없고 단지 함유체 내부만을 표준의 유한요소를 사용하여

여 분할하면 되기 때문에, 체적 적분방정식법이 다수의 이방성 함유체가 임의의 위치에 배열되어 있는 무한고체가 무한하중을 받을 때, 탄성해석을 효과적으로 수행할 수 있는 최적의 수치해석 방법이라고 사료된다.

Fig. 11은, 등방성 기지에 25개의 직교 이방성 함유체가 정사각형 배열에서 임의로 흐트러져 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 함유체, 그리고, Fig. 8에 보이는 복합재료 단면의 섬유들 위치에 66개의 직교 이방성 함유체가 포함되어 있을 때, Fig. 10에 보이는 좌표 원점에 위치한 함유체 [Orthotropic #1(a)과 Orthotropic #2(b)]와 등방성

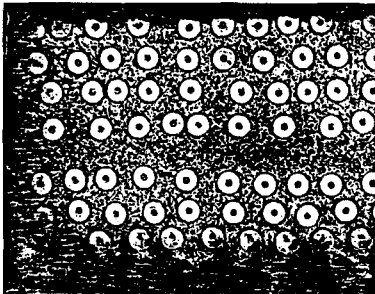


Fig. 8 Micrographic cross-section of a SiC/Ti-15-3 composite.

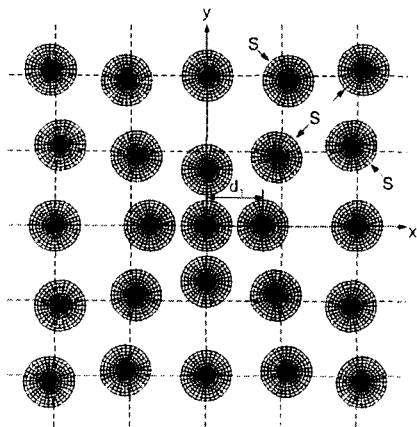


Fig. 9 A typical discretized model in the volume integral equation method for arbitrarily random inclusion packing array

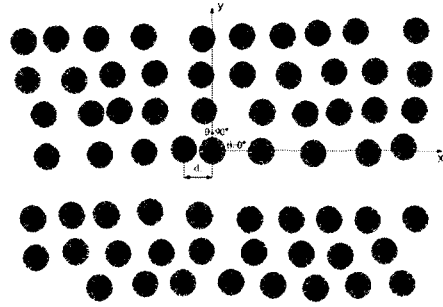
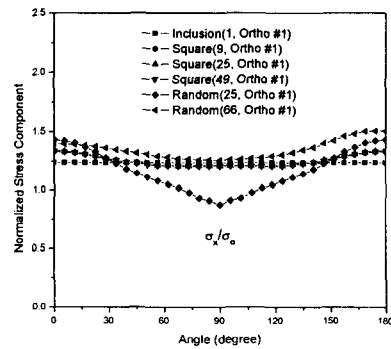
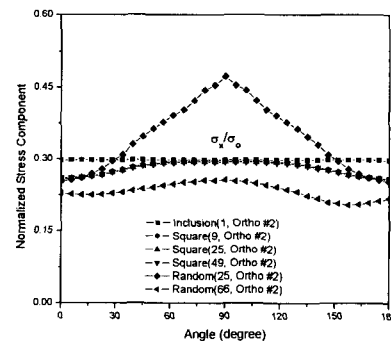


Fig. 10 A typical discretized model in the volume integral equation method for random inclusion packing array shown in Fig. 8



(a)



(b)

Fig. 11 Normalized tensile stress component ( $\sigma_x/\sigma_o$ ) at the interface between the central orthotropic inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분

$(\frac{\sigma_x}{\sigma_0})$ 을 나타낸다 ( $\theta = 0^\circ \sim 180^\circ$ ). Fig. 10에 보이는 좌표 원점에 위치한 함유체에서의 응력분포가, 서로 다른 개수의 직교 이방성 함유체가 정사각형 형태로 포함되어 있을 때 중앙에 위치한 함유체에서의 응력분포들과 상당히 차이가 나는 것을 알 수 있다. 또한, 25개의 직교 이방성 함유체가 정사각형 배열에서 임의로 흐트러져 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 함유체에서의 응력분포는, 나머지 다섯가지 경우와 비교해 보았을 때, 현격한 차이가 나는 것을 알 수 있다.

그러므로, 섬유 배열을 정사각형(square) 또는 정육각형(hexagon) 형태 등 일정한 배열로 가정하고, unit cell 모델을 사용하여 해석한 결과는 실제의 섬유 배열에 따른 해석 결과와 서로 다를 가능성이 매우 높음을 알 수 있다.

### 3. 혼합 체적-경계 적분방정식법

예를 들면, 복합재료를 제조하는 과정에서 함유체의 위치에 함유체가 포함되지 않고 공동(hole)이 포함되는 경우에, 외부하중을 받을 때, 복합재료의 제조 과정의 결함으로 발생한 공동에 인접한 함유체에는, 정상적으로 함유체가 포함된 경우와 비교해 볼 때, 다른 형태의 응력이 분포된다고 사료된다.

따라서, 본 논문에서는 다수의 직교 이방성 함유체와 단일의 공동이 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우에, 복합재료에서의 응력분포를 고찰해본다.

#### 3.1 등방성 기지에 다수의 직교 이방성 함유체와 단일의 공동이 포함되어 있는 무한고체의 탄성해석

Fig. 12에 있는 다수의 직교 이방성 함유체와 단일의 공동(hole)이 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형을 문제로 가정하여, 고찰해 본다. 이 경우는 다수의 직교 이방성 함유체에 대하여는 체적 적분방정식법을 적용하여 체적 적분방정식법의 장점을 이용하고, 단일의 공동에 대하여는 경계요소법을 적용하여, 분할요소의 수를 줄일 수 있고, 또한, 공동의 경계면에서 표면력 벡터가 0

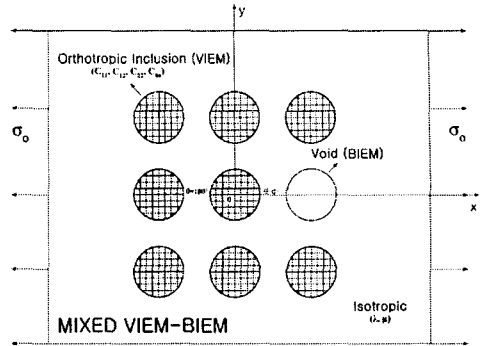


Fig. 12 Multiple orthotropic cylindrical inclusions and a cylindrical void in unbounded isotropic matrix under uniform remote tensile loading

이 되는 경계요소법의 장점을 이용할 수 있는 혼합 체적-경계 적분방정식법이 최적의 수치해석 방법임을 알 수 있다.<sup>(3,7)</sup>

식 (1)을 응용하면, 다수의 직교 이방성 함유체와 단일의 공동을 포함하는 무한고체에 대하여 혼합 체적-경계 적분방정식은

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^0(\mathbf{x}) - \int_V \delta c_{ijkl} g_{k,l}^{m(2)}(\xi, \mathbf{x}) u_{i,j}(\xi) d\xi + \int_S c_{ijkl}^{(2)} g_{k,l}^{m(2)} u_{i,j} n_j dS \quad (3)$$

로 표시할 수 있다.<sup>(5,16)</sup> 여기서,  $u_m(\mathbf{x})$ 는 고체의 임의의 위치에서의 변위성분을 나타내고,  $V$ 는 다수의 직교 이방성 함유체의 체적을 나타내며  $S$ 는 단일의 공동의 경계면을 나타낸다.  $\mathbf{n}$ 은  $S$ 에서의 바깥쪽 법선방향의 단위 벡터이고, 윗첨자 (2)는 등방성 기지에 대한 양(quantity)을 나타낸다. 여기서,  $V$ 가 각각의 직교 이방성 함유체의 내부 체적만을 나타내는 이유는, 함유체와 기지 사이의 탄성상수의 차이를 나타내는  $\delta c_{ijkl}$ 이 무한공간을 이루는 기지에서는 0이 되기 때문이다.

Fig. 13은 혼합 체적-경계 적분방정식법에 사용되어진 대표적인 분할된 모델의 예이다. 다수의 직교 이방성 함유체는 각각 256개의 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였고, 중앙에 위치한 직교 이방성 함유

체에 인접한 단일의 공동의 경계면은 100개의 2차 경계요소를 사용하여 분할하였다.

이때, 다수의 직교 이방성 함유체의 분할된 절점(node)과 단일의 공동의 경계면의 절점(node)에서의 변위에 대한 선형 연립방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} [E]_{[(m+n) \times (m+n)]} & [F]_{[(m+n) \times (m+n)]} \\ [G]_{[(m+n) \times (m+n)]} & [H]_{[(m+n) \times (m+n)]} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_1\}_{(m)} \\ \{u_1\}_{(n)} \\ \{u_2\}_{(m)} \\ \{u_2\}_{(n)} \end{Bmatrix} \\
 & = \begin{Bmatrix} -\{u_1^0\}_{(m)} \\ -\{u_1^0\}_{(n)} \\ -\{u_2^0\}_{(m)} \\ -\{u_2^0\}_{(n)} \end{Bmatrix} \quad (4)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 [E]_{[(m+n) \times (m+n)]} & = \begin{bmatrix} [[VV]-[I]]_{(m \times m)} & [VB]_{(m \times n)} \\ [BV]_{(n \times m)} & [[BB]-\frac{1}{2}[I]]_{(n \times n)} \end{bmatrix} \quad (4-1)
 \end{aligned}$$

$$[F]_{[(m+n) \times (m+n)]} = \begin{bmatrix} [VV]_{(m \times m)} & [VB]_{(m \times n)} \\ [BV]_{(n \times m)} & [BB]_{(n \times n)} \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

$$[G]_{[(m+n) \times (m+n)]} = \begin{bmatrix} [VV]_{(m \times m)} & [VB]_{(m \times n)} \\ [BV]_{(n \times m)} & [BB]_{(n \times n)} \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

$$\begin{aligned}
 [H]_{[(m+n) \times (m+n)]} & = \begin{bmatrix} [[VV]-[I]]_{(m \times m)} & [VB]_{(m \times n)} \\ [BV]_{(n \times m)} & [[BB]-\frac{1}{2}[I]]_{(n \times n)} \end{bmatrix} \quad (4-4)
 \end{aligned}$$

을 나타내고,  $m$ 은 직교 이방성 함유체들에서의 절점수를, 그리고  $n$ 은 공동의 경계면(S)에서의 절점수를 나타내며, Fig. 13에 있는 모델에서  $m = 6,152$ ,  $n = 200$ 이다.  $[VV]$ 는 다수의 직교이방성 함유체 내부들 사이에서의 상호작용(interaction)

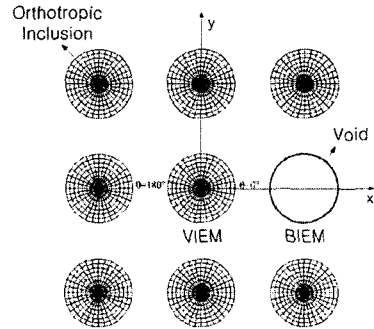


Fig. 13 A typical discretized model in the mixed volume and boundary integral equation method

을,  $[VB]$ 는 다수의 직교 이방성 함유체 내부들과 단일의 공동의 경계면과의 상호 작용을,

$[BV]$ 는 단일의 공동의 경계면과 다수의 직교 이방성 함유체 내부들과의 상호작용을 그리고

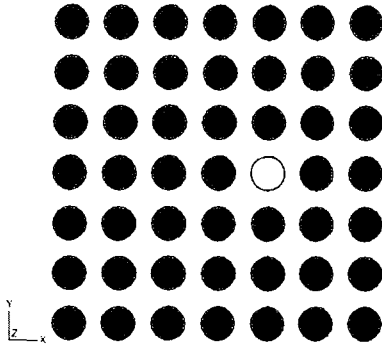
$[BB]$ 는 단일의 공동의 경계면에서의 상호 작용을 포함하는 행렬(matrix)들을 각각 나타낸다.

따라서, 식 (4)로부터 다수의 직교 이방성 함유체 내부들에서의 변위 및 단일의 공동의 경계면에서의 변위를 구할 수 있고, 또한, 다수의 직교 이방성 함유체 내부들에서의 변형률과 응력도 결정할 수 있다. 그 외의 모든 곳에서의 변위 및 응력은 식 (3)의 적분 값을 구함으로써 얻을 수 있다.

### 3.1.1 등방성 기지에 다수의 직교 이방성 함유체 배열이 정사각형(square) 형태일 때, 단일의 공동이 중앙에 위치한 함유체에 인접한 경우

등방성 기지에 다수의 직교 이방성 함유체가 정사각형 형태로 배열되어 있을 때, 단일의 공동이 중앙에 위치한 함유체에 인접한 함유체 자리에 교체되어 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다. 다수의 함유체와 단일의 공동의 상호작용을 조사하기 위하여, 함유체의 체적비(volume fraction)는 0.35로 가정하고, 함유체의 개수를 a) 8개, b) 24개, c) 48개로 늘려가면서, 중앙에 위치한 함유체에서의 응력분포를 조사하였다. 직교 이방성 함유체의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있으며,<sup>(6)</sup> 직교 이방성 함유체의  $c_{11}$





**Fig. 14** A typical discretized model in the mixed volume and boundary integral equation method for square inclusion packing array and a void

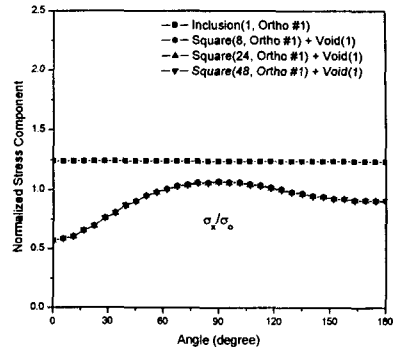
이 등방성 기지의  $c_{11}$ 보다 큰 경우(orthotropic #1)와 작은 경우(orthotropic #2)를 고려해 보았다.

Fig. 14는 무한고체에 48개의 직교 이방성 함유체와 단일의 공동이 포함되어 있는 경우에, 혼합체적-경계 적분방정식법에 사용되어진 분할된 모델이다. Fig. 15는, 서로 다른 개수의 함유체가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체[Orthotropic #1(a)과 Orthotropic #2(b)]와 등방성 기지의 경계면에서의 표준화된 인장응력 성분

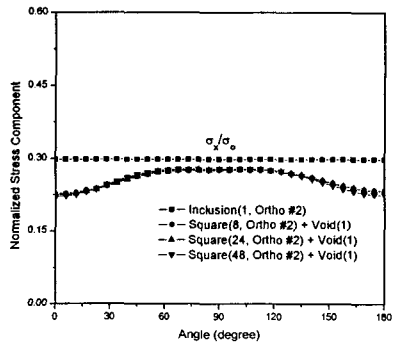
$(\frac{\sigma_x}{\sigma_0})$ 을 나타낸다 ( $\theta = 0^\circ \sim 180^\circ$ ). 직교 이방성 함유체[Orthotropic #1(a)과 Orthotropic #2(b)]의 개수가 증가하여도, 표준화된 인장응력 성분  $(\frac{\sigma_x}{\sigma_0})$ 이 크게 변하지 않는 것을 볼 수 있다. 그 이유는, 함유체의 체적비가 0.35일 때, 중앙에 위치한 함유체와 주변에 있는 함유체들 사이의 상호작용이 그렇게 크게 작용하지 않기 때문으로 사료된다.

**3.1.2 등방성 기지에 다수의 직교 이방성 함유체 배열이 정육각형 형태일 때, 단일의 공동이 중앙에 위치한 함유체에 인접한 경우**

등방성 기지에 다수의 직교 이방성 함유체가 정육각형 형태로 배열되어 있을 때, 단일의 공동이 중앙에 위치한 함유체에 인접한 함유체 자리에 교체되어 포함되어 있는 무한고체가 무한 인



(a)

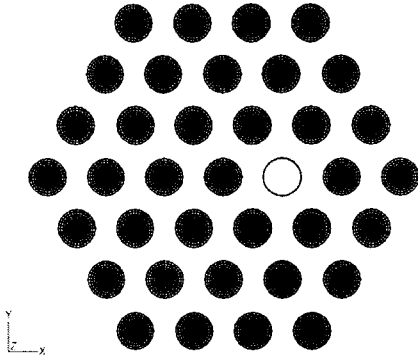


(b)

**Fig. 15** Normalized tensile stress component  $(\sigma_x/\sigma_0)$  at the interface between the central orthotropic inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

장하중을 받는 경우를, 평균 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다. 다수의 함유체와 단일의 공동의 상호작용을 조사하기 위하여, 함유체의 체적비(volume fraction)는 0.35로 가정하고, 함유체의 개수를 a) 6개, b) 18개, c) 36개로 늘려가면서, 중앙에 위치한 함유체에서의 응력분포를 조사하였다.

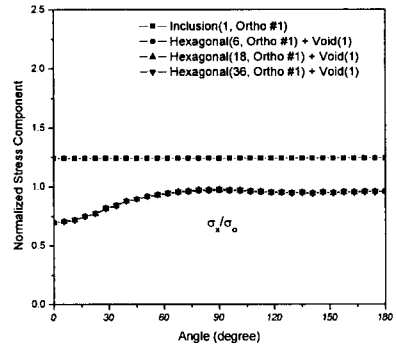
Fig. 16은 무한고체에 36개의 직교 이방성 함유체와 단일의 공동이 포함되어 있는 경우에, 혼합체적-경계 적분방정식법에 사용되어진 분할된 모델이다. Fig. 17은, 서로 다른 개수의 함유체가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체[Orthotropic #1(a)과 Orthotropic #2(b)]와 등방



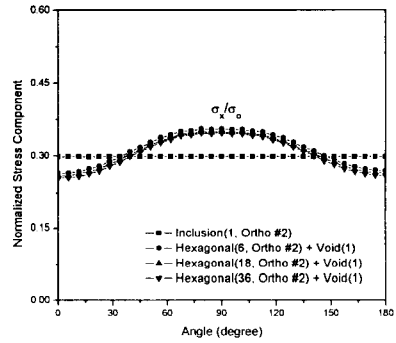
**Fig. 16** A typical discretized model in the mixed volume and boundary integral equation method for hexagonal inclusion packing array and a void

성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분  $(\frac{\sigma_x}{\sigma_0})$ 을 나타낸다 ( $\theta = 0^\circ \sim 180^\circ$ ). 직교 이방성 함유체[Orthotropic #1(a)과 Orthotropic #2(b)]의 개수가 증가하여도, 규준화된 인장응력 성분  $(\frac{\sigma_x}{\sigma_0})$ 이 크게 변하지 않는 것을 볼 수 있다. 이번에도, 함유체의 체적비가 0.35일 때, 중앙에 위치한 함유체와 주변에 있는 함유체들 사이의 상호작용이 그렇게 크게 작용하지 않기 때문에, 직교 이방성 함유체[Orthotropic #1(a)과 Orthotropic #2(b)]의 개수가 증가하여도, 규준화된 인장응력 성분  $(\frac{\sigma_x}{\sigma_0})$ 이 크게 변하지 않는 것을 볼 수 있다.

함유체의  $c_{11}$ 이 등방성 기지의  $c_{11}$ 보다 큰 경우(orthotropic #1)에는 정사각형 배열일 때와 정육각형 배열일 때 모두, 중앙에 위치한 함유체의 경계면에서  $\theta = 90^\circ$ 인 곳에서의 응력이 단일의 함유체일 때 보다 낮게 나타났다. 그러나, 함유체의  $c_{11}$ 이 등방성 기지의  $c_{11}$ 보다 작은 경우(orthotropic #2)에는, 중앙에 위치한 함유체의 경계면에서  $\theta = 90^\circ$ 인 곳에서의 응력이, 함유체의 배열이 정사각형일 때는 단일의 함유체일 때 보다 낮게 나타났으나, 함유체의 배열이 정육각형일 때는 단일의 함유체일 때 보다 높게 나타났음을 알 수 있다.



(a)

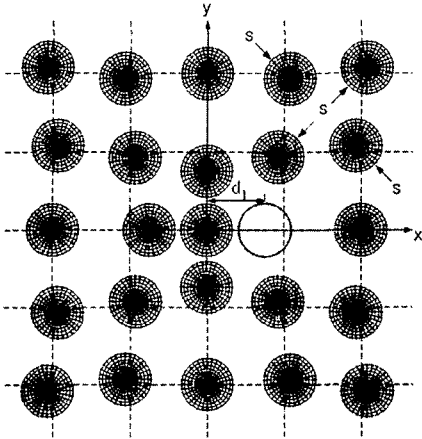


(b)

**Fig. 17** Normalized tensile stress component  $(\sigma_x/\sigma_0)$  at the interface between the central orthotropic inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

3.1.3 등방성 기지에 다수의 직교 이방성 함유체 배열이 임의 형태일 때, 단일의 공동이 중앙에 위치한 함유체에 인접한 경우

Fig. 18( $d_1=2.25a$ ,  $s=0.3a$ ,  $a$ =함유체의 반지름)은 24개의 직교 이방성 함유체는 표준의 유한요소를 사용하여 분할하고, 1개의 공동은 표준의 경계요소를 사용하여 분할하여 생성한, 혼합 체적-경계 적분방정식법에 사용되는 대표적인 모델을 나타낸다. 혼합 체적-경계 적분방정식법에서는, 단일 또는 다수의 함유체가 무한기지에 포함되어 있는 경우에, 무한공간을 이루는 기지는 요소분할할 필요가 없고 단지 함유체 내부만을 표준의 유한



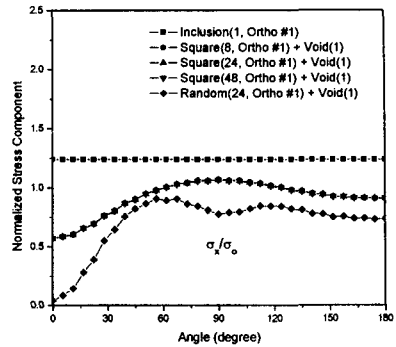
**Fig. 18** A typical discretized model in the mixed volume and boundary integral equation method for arbitrarily random inclusion packing array and a void

요소를 사용하여 분할하면 되고, 단일 또는 다수의 공동이 포함되어 경우에, 공동은 표준의 경계 요소를 사용하여 분할하면 된다. 따라서, 혼합 체적-경계 적분방정식법이 다수의 이방성 함유체 및 다수의 공동이 임의의 위치에 배열되어 있는 무한고체가 무한하중을 받을 때, 탄성해석을 효과적으로 수행할 수 있는 최적의 수치해석 방법이라고 사료된다.

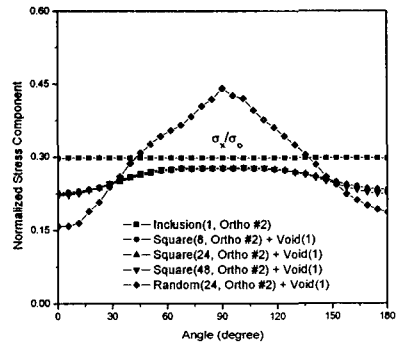
Fig. 19는 중앙에 위치한 함유체[Orthotropic #1(a)과 Orthotropic #2(b)]와 등방성 기지의 경계

면에서의 규준화된 인장응력 성분 ( $\frac{\sigma_x}{\sigma_0}$ )을 나타낸다 ( $\theta = 0^\circ \sim 180^\circ$ ). 서로 다른 개수의 직교 이방성 함유체가 정사각형 형태로 배열되어 있고 (함유체의 체적비가 0.35), 단일의 공동이 중앙에 위치한 함유체에 인접한 함유체 자리에 교체되어 포함되어 있을 때와 비교해 보았을 때, 중앙에 위치한 함유체에서의 응력분포가 현격하게 차이가 나는 것을 알 수 있다.

그러므로, 복합재료의 제조 과정에서 결함이 발생하는 경우에도, 실제의 섬유 배열에 따른 해석을 수행함으로써, 복합재료에서의 파괴 메커니즘을 정확하게 규명할 수 있으리라고 사료된다.



(a)



(b)

**Fig. 19** Normalized tensile stress component ( $\sigma_x/\sigma_0$ ) at the interface between the central orthotropic inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

#### 4. 결 론

본 논문에서는 이방성 함유체의 배열이 복합재료의 응력에 미치는 영향에 대하여 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법이라는 새로운 수치해석 방법들을 적용하여, 등방성 무한기지에 다수의 직교 이방성 함유체 또는 다수의 직교 이방성 함유체 및 단일의 공동이 포함된 무한고체가 정적 무한하중을 받을 때 복합재료에 발생하는 응력분포에 관한 해석을 수행하였다.

첫째로, 등방성 기지에 다수의 직교 이방성 함유체가 1) 정사각형 배열 형태, 2) 정육각형 배열 형태, 3) 임의의 배열 형태로 포함되어 있는 경우에 대하여 고찰해 보았다. 직교 이방성 함유체의 배열이 정사각형 또는 정육각형 형태인 각각의 경우에, 함유체의 체적비가 0.35일 때, 함유체의 개수가 증가하여도 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 인장응력 분포가 크게 변하지 않는 것을 알 수 있었다. 그러나, 직교 이방성 함유체의 배열이 임의 형태일 때는, 정사각형 또는 정육각형 배열 형태일 때와 비교해 보았을 때, 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 인장응력 분포가 크게 달라지는 것을 알 수 있었다.

둘째로, 등방성 기지에 다수의 직교 이방성 함유체가 1) 정사각형 배열 형태, 2) 정육각형 배열 형태, 3) 임의의 배열 형태로 포함되어 있는 각각의 경우에, 단일의 공동이 중앙에 위치한 함유체에 인접한 함유체 자리에 교체되어 포함되어 있는 경우에 대하여 고찰해 보았다. 이번에도, 직교 이방성 함유체의 배열이 정사각형 또는 정육각형 형태인 각각의 경우에, 함유체의 체적비가 0.35일 때, 함유체의 개수가 증가하여도 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 인장응력 분포가 크게 변하지 않는 것을 알 수 있었다. 그러나, 직교 이방성 함유체의 배열이 임의 형태일 때는, 정사각형 또는 정육각형 배열 형태일 때와 비교해 보았을 때, 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 인장응력 분포가 크게 달라지는 것을 알 수 있었다.

그러므로, 복합재료가 이방성 섬유들로 이루어지는 경우에, 그리고 예를 들면, 복합재료의 제조 과정에서 결함이 발생하여 함유체의 위치에 공동이 포함되는 경우에, 섬유의 배열을 정사각형 또는 정육각형 형태 등 일정한 배열로 가정할, unit cell 모델에 바탕을 둔 해석 결과는 실제의 섬유의 배열에 따른 해석 결과와 서로 다를 가능성이 매우 높음을 알 수 있었다.

끝으로, 본 논문에서는 비교적 간단한 형태의 이방성을 나타내는 직교 이방성 함유체에 대하여 고찰해 보았으나, 체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법을 적용하면, 서로 상호작용을 하는 다수의 일반적인 이방성 함유체 및 공동

을 포함하는 등방성 무한고체가 정적 무한하중을 받을 때, 일반적인 이방성 함유체의 배열이 복합재료의 응력에 미치는 영향에 대한 조사도 효과적으로 수행할 수 있을 것으로 사료된다.

### 후 기

이 논문은 2003학년도 홍익대학교 교내연구비에 의하여 지원되었으며, 이에 사의를 표합니다.

### 참고문헌

- (1) Al-Ostaz, A and Jasiuk, I, 1997, "The Influence of Interface and Arrangement of Inclusions on Local Stresses in Composite Materials," *Acta Materialia*, Vol. 45, No. 10, pp. 4131~4143.
- (2) Banerjee, P.K., 1993, "The Boundary Element Methods in Engineering," McGraw-Hill, England.
- (3) Buryachenko, V.A. and Bechel, V.T., 2000, "A Series Solution of the Volume Integral Equation for Multiple Inclusion Interaction Problems," *Compos. Sci. Technol.*, Vol. 60, pp. 2465~2469.
- (4) Chen, T., 1993, "Thermoelastic Properties and Conductivity of Composites Reinforced by Spherically Anisotropic Particles," *Mechanics of Materials*, Vol. 14, pp. 257~268.
- (5) Choi, S.J., Ra, W.S. and Lee, J.K., 1999, "Elastic Analysis of Unbounded Solids with Anisotropic Inclusions," *Trans. of KSME (A)*, Vol. 23, No. 11, pp. 1993~2006.
- (6) Davi, G. and Milazzo, A., 1996, "Stress Fields in Composite Cross-Ply Laminates," Eleventh International Conference on Boundary Element Technology, BETECH 96, Ertekin, R. C., Brebbia, C. A., Tanaka, M. and Shaw, R., Eds., Computational Mechanics Publications, pp. 175~184.
- (7) Dong, C.Y., Lo, S.H. and Cheung, Y.K., 2003, "Numerical Solution of 3D Elastostatic Inclusion Problems Using the Volume Integral Equation Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192,

- No. 1-2, pp. 95~106.
- (8) Gusev, A.A., Hine, P.J., and Ward, I.M., 2000, "Fiber Packing and Elastic Properties of a Transversely Random Unidirectional Glass/Epoxy Composite," *Composites Science and Technology*, Vol. 60, No. 4, pp. 535~541.
- (9) Han, W., Eckschlager, A., and Bohm H.J., 2001, "The Effects of Three-Dimensional Multi-Particle Arrangements on the Mechanical Behavior and Damage Initiation of Particle-Reinforced MMCs," *Composites Science and Technology*, Vol. 61, No. 11, pp. 1581~1590.
- (10) Hwu, C. and Yen, W. J., 1993 (Sep.), "On the Anisotropic Elastic Inclusions in Plane Elastostatics," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 626~632.
- (11) Duan, Z.P., Kienzler, R. and Herrmann, G., 1986, "An Integral Equation Method and Its Application to Defect Mechanics," *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 34, pp. 539~561.
- (12) Johnson, W.C., Earmme, Y.Y. and Lee J.K., 1980, "Approximation of the Strain Field Associated with an Inhomogeneous Precipitate. I: Theory," *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, Vol. 47, pp. 775~780.
- (13) Lee, J.K. and Mal, A.K., 1995, "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Scattering Problems in Elastodynamics," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 67, pp. 135~159.
- (14) Lee, J.K. and Mal, A.K., 1997, "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Inclusion and Crack Interaction Problems," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, pp. 23~31.
- (15) Lee, J.K. and Mal, A., 1998, "Characterization of Matrix Damage in Metal Matrix Composites under Transverse Loads," *Computational Mechanics*, Vol. 21, pp. 339~346.
- (16) Lee, J.K., Choi, S.J. and Mal, A., 2001, "Stress Analysis of an Unbounded Elastic Solid with Orthotropic Inclusions and Voids Using a New Integral Equation Technique," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 38, pp. 2789~2802.
- (17) Lee, K.J. and Mal, A.K., 1990, "A Boundary Element Method for Plane Anisotropic Elastic Media," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 600~606.
- (18) Mal, A.K. and Knopoff, L., 1967, "Elastic Wave Velocities in Two Component Systems," *J. Inst. Math. Applies.*, Vol. 3, pp. 376~387.
- (19) McPedran, R.C. and Movchan, A.B., 1994, "The Rayleigh Multipole Method for Linear Elasticity," *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 42, pp. 711~727.
- (20) Moschovidis, Z.A. and Mura, T., 1975, "Two-Ellipsoidal Inhomogeneities by the Equivalent Inclusion Method," *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, Vol. 42, pp. 847~852.
- (21) Nakamura, T. and Suresh, S., 1993, "Effects of Thermal Residual Stresses and Fiber Packing on Deformation of Metal-Matrix Composites," *Acta Metall. Mater.*, Vol. 41, pp. 1665~1681.
- (22) PATRAN User's Manual, 1998, Version 7.0, MSC/PATRAN.
- (23) Yang, H. C. and Chou, Y. T., 1976 (Sep.), "Generalized Plane Problems of Elastic Inclusions in Anisotropic Solids1," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 43, pp. 424~430.
- (24) Zhang, J and Katsube, N, 1995, "A Hybrid Finite Element Method for Heterogeneous Materials with Randomly Dispersed Elastic Inclusions," *Finite Elements In Analysis And Design*, Vol. 19, No. 1-2, pp. 45~55.
- (25) Zhang, J and Katsube, N, 1997, "A Polygonal Element Approach to Random Heterogeneous Media with Rigid Ellipses or Elliptical Voids," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 148, No. 3-4, pp. 225~234.