

# 점성감쇠가 건성마찰력을 받는 탄성지지 보의 안정성에 미치는 효과

장탁순\*, 고준빈#, 류시웅\*\*

## Effect of Viscous Damping on the Stability of Beam Resting on an Elastic Foundation Subjected to Dry Friction Force

Tag-Soon Jang\*, Jun-Bin Ko# and Si-Ung Ryu\*\*

### ABSTRACT

The effect of viscous damping on stability of beam resting on an elastic foundation subjected to a dry friction force is analytically studied. The beam resting on an elastic foundation subjected to dry friction force is modeled for simplicity into a beam resting on Kelvin-Voigt type foundation subjected to distributed follower load. In particular, the effects of four boundary conditions (clamped-free, clamped-pinned, pinned-pinned, clamped-clamped) on the system stability are considered. The critical value and instability type of columns on the elastic foundation subjected to a distributed follower load is investigated by means of finite element method for four boundary conditions. The elastic foundation modulus, viscous damping coefficient and boundary conditions affect greatly both the instability type and critical load. Also, the increase of damping coefficient raises the critical flutter load (stabilizing effect) but reduces the critical divergence load (destabilizing effect).

**Key Words** : Viscous damping (점성감쇠), Dry frictional force(건성마찰력), Distributed Follower Force(분포종동력), Flutter(플러터), Divergence(다이버전스)

### 1. 서론

마찰력에 의한 시스템의 진동현상(friction induced vibration)은 소음(noise) 유발할 뿐 아니라 시스템 자체의 안정성에도 중요한 영향을 미치므로 지금까지 많은 연구가 행해지고 있다. 마찰에 의한 진동현상의 대표적인 예로서는 공작기계의 채터(chatter), 자동차의 브레이크 소음(brake noise),

스틱 슬립(stick slip) 등이 있다. 이러한 마찰에 의한 진동현상의 초기 연구는 Fig. 1 에 나타낸 것과 같이 간단한 1 자유도계를 모델로 하여 진동과 소음의 원인을 마찰계수  $\mu$  의 변동설에 기초를 두었다. 그러나 1976 년 Millner<sup>1</sup> 의 연구에서는 마찰계수  $\mu$  가 일정함에도 불구하고 그 구조동에 의해서 진동과 소음이 발생한다는 것을 처음으로 밝혔다. 또 그는 브레이크 시스템을 다 자유도계로

\*\*\* 2003 년 11 월 6 일 접수; 게재승인일: 2004 년 8 월 13 일

\* 충남대학교 대학원 기계공학과

# 한밭대학교 기계설계공학과

Email kjb1002@hanbat.ac.kr Tel. (042) 824-0351

\*\* 한국기초과학지원연구원 제작지원팀

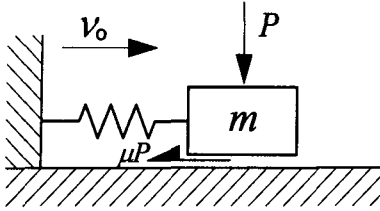


Fig.1 One-degree-of-freedom of model of stick-slip

모델화하여 동적 안정성 문제를 연구하였다. 최근의 연구로서는, Kang 과 Tan<sup>2</sup> 은 자동차와 항공기의 브레이크 시스템으로부터 상정한 역학적 모델로써 주기적 가진 하에서의 분포 종동력(distributed follower force)을 받는 보의 동적 불안정성에 대하여 연구하였다. Ouyang<sup>3</sup> 은 회전예의 가진 하에서 원형 판의 동적거동을 연구하였고, 그는 또 다른 연구<sup>4</sup> 에서 자동차 브레이크의 동적거동을 해석하기 위한 일반적인 방법을 개발하였다. Mottershead<sup>5</sup> 탄성지지로써 브레이크 패드를 모델로하여 마찰과 감쇠의 효과를 연구하였다. Hulten<sup>6</sup> 은 마찰력을 받는 브레이크 패드의 해석에 있어 마찰력을 종동력으로 간주하여 동적 불안정성에 대하여 연구하였다.

본 연구에서는 회전체, 마찰재, 탄성재료로 구성되어 있는 시스템에 있어서 탄성재료의 안정성에 미치는 영향을 다양한 경계조건에 따라 조사하는 것을 목적으로 하고 있다.

## 2. 수치 해석

### 2.1 수학적 모델

본 연구에서는 회전체, 마찰재, 탄성재료로 구성되어 있는 시스템(Fig.2)에 있어서 탄성재료는 균일 단면의 보로서, 공구대와 탄성재료 사이의 마찰력은 분포 종동력으로서, 마찰재는 분포 스프링과 점성감쇠기(Kelvin-Voigt foundation)로서 Fig.3 과 같이 모델화 하였다. Fig.3 에서 균일 단면 보의 전체 길이는  $L$  이고, 접선 분포 종동력  $q$  을 받고 있다. 또한 보의 굽힘강성은  $EI$ , 단위 길이 당 보의 질량  $m$  이다. 그리고  $k$  는 보의 분포 탄성지지의 스프링 상수,  $c$  는 외부 점성 감쇠기의 감쇠 상수이다.

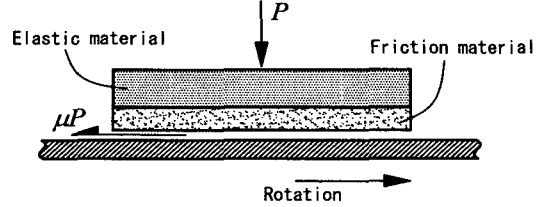


Fig.2 Conceptual sketch of elastic material subjected to dry friction force

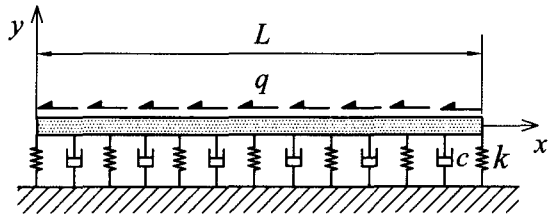


Fig.3 Mathematical model of a beam resting on Kelvin-Voigt foundation subjected to distributed follower force

### 2.2 확장된 헤밀턴 원리에 의한 정식화

Fig. 3 의 모델에 대한 운동 지배 방정식을 얻기 위해 확장된 헤밀턴 원리를 이용하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W_c - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_{od} + \delta W_{nc}) dt = 0, \quad (1)$$

여기서  $T$  는 운동에너지,  $W_c$  는 작용력의 보존 성분에 의한 일,  $U$  는 보와 분포 스프링에 저장된 탄성 포텐셜 에너지를 나타낸다. 그리고  $\delta W_{od}$  는 분포 감쇠기에 의한 가상일,  $\delta W_{nc}$  는 비보존성분에 의한 가상 일을 나타낸다.

식(1)에서 보의 운동에너지  $T$  는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (2)$$

여기서  $m$  은 보의 단위 길이 당 질량을 나타낸다. 보의 분포 종동력에 의한 보존 성분의 일은 다음과 같다.

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^L q(L-x) \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (3)$$

보와 탄성지지 스프링에 저장된 계의 포텐셜 에너지는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L ky^2 dx, \quad (4)$$

여기서  $EI$  는 보의 굽힘강성을 나타낸다.

외부 분포 감쇠기에 의한 비보존 성분의 일은 다음과 같다.

$$\delta W_{od} = - \int_0^L c \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta y dx. \quad (5)$$

보에 작용하는 분포 중동력에 의한 일은 다음과 같다.

$$\delta W_{nc} = - \int_0^L q \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta y dx. \quad (6)$$

식(2)~(6)을 식(1)에 대입하고 변분 하면 식(1)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right) \delta \left( \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right) d\xi + \int_0^L \left\{ \rho(1-\xi) \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \delta \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \right\} d\xi \right. \\ & - \int_0^L \left\{ \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right) \right\} d\xi - \int_0^L \kappa \eta \delta \eta d\xi \left. \right] d\tau \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^L \left\{ c \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta y + q \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta y \right\} dx \right] dt = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

계산상 편리를 위해 무차원 파라메타를 도입한다.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \\ \varepsilon &= \frac{cL^2}{EI} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \rho = \frac{qL^3}{EI}, \quad \kappa = \frac{kL^4}{EI}. \quad (8) \end{aligned}$$

식(8)의 무차원 파라메타를 식(7)에 대입하면 식(7)은 다음과 같은 무차원화된 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right) \delta \left( \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right) d\xi + \int_0^1 \left\{ \rho(1-\xi) \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \delta \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \right\} d\xi \right. \\ & - \int_0^1 \left\{ \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right) \right\} d\xi - \int_0^1 \kappa \eta \delta \eta d\xi \left. \right] d\tau \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^1 \left\{ c \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \delta \eta + \rho \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \delta \eta \right\} d\xi \right] d\tau = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

### 2.3 유한요소법의 적용

보를  $N$  개의 균일한 요소로 분할하고, 유한요소법을 적용하면 다음과 같은 이산화된 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{i=1}^N \int_{\xi^{(i-1)}}^{\xi^i} \left\{ \eta_\tau \delta \eta_\tau + \rho(1-\xi) (\eta_\xi \delta \eta_\xi) - \eta_{\xi\xi} \eta_{\xi\xi} \right. \right. \\ & \left. \left. - \kappa \eta \delta \eta - c \eta_\tau \delta \eta - \rho \eta_\xi \delta \eta \right\} d\xi \right] d\tau = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

국부좌표 ( $\zeta = N\xi - i + 1; 0 \leq \zeta \leq 1$ ) 를 도입하여 식(10)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left\{ \eta_\tau \delta \eta_\tau + \rho(1-\xi) N^2 (\eta_\xi \delta \eta_\xi) - N^4 \eta_{\xi\xi} \eta_{\xi\xi} \right. \right. \\ & \left. \left. - \kappa \eta \delta \eta - c \eta_\tau \delta \eta - \rho N \eta_\xi \delta \eta \right\}^{(i)} d\xi \right] d\tau = 0. \quad (11) \end{aligned}$$

변위함수 ( $\eta^{(i)}(\zeta, \tau) = \mathbf{e}^{(i)}(\zeta) \cdot \mathbf{v}^{(i)}(\tau)$ )를 도입하고 식(11)에 대입하면 다음과 같은 수학적 모델의 특성방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M} \mathbf{v}_{\tau\tau} + \mathbf{C} \mathbf{v}_\tau + \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

여기서  $\mathbf{M}$  은 조합된 질량행렬,  $\mathbf{C}$  은 조합된 감쇠행렬 그리고  $\mathbf{K}$  은 조합된 강성행렬이다.

### 2.4 고유치 문제

식(12)에 있어서 변위벡터  $\mathbf{v}(\tau)$  을 다음과 같이 놓는다.

$$\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{X} \exp(\lambda \tau), \quad \mathbf{W} = \lambda \mathbf{X}. \quad (13)$$

최종적으로 다음과 같은 일반 고유치 문제에 귀착된다.

$$\lambda \mathbf{Z} = \mathbf{A} \mathbf{Z}, \quad (14)$$

여기서

$$\mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{W} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}.$$

### 2.5 안정성 판별

계의 안정성 판별은 식(14)에 있어서 특성근 ( $\lambda = \sigma \pm \beta i$ ;  $i$ 는 허수단위)의 실수부인  $\sigma$ 의 부호에 의해서 결정된다. 즉  $\sigma > 0$  일 때는 계가 불안정하게 되고,  $\sigma < 0$  일 때는 계가 안정하게 된다. 그러므로  $\sigma = 0$  일 때는 계가 안정과 불안정의 경계가 된다. 또 이때의 분포 종동력이 임계 분포 종동력  $\rho_{cr}$  이 된다.

### 3. 수치해석결과 및 토론

Fig.4 는 한단고정-타단 자유의 경우, 분포점성 감쇠상수  $\varepsilon$  가 0,5,10 대하여 탄성지지의 스프링 상수  $\kappa$  값의 변화에 따른 임계분포 종동력 값  $\rho_{cr}$  을 나타낸다. 이 그림에서는  $\kappa$  와  $\varepsilon$  값의 관계없이 플러터형 불안정만 발생한다.  $\varepsilon = 0$  일 때는  $\kappa$  값의 변화에 관계없이 플러터가 발생하는 임계분포 종동력 값은 일정하다는 것을 알 수 있다.

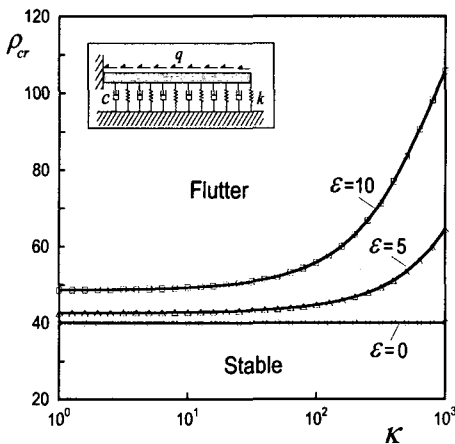


Fig.4 Critical distributed follower force depending on the stiffness of elastic foundation for  $\varepsilon=0, 5, 10$

이러한 계산 결과는 집중 종동력을 받는 탄성지 지된 beck's column 에서의 탄성 지지 스프링 상수 값이 증가해도 플러터가 발생하는 임계 집중 종동력 값에는 변화가 없다는 Smith 와 Herrmann<sup>7</sup> 의 연구 결과와 유사하다.  $\varepsilon=5, 10$  일 때는  $\kappa$  값이 증가함에 따라 임계 분포 종동력 값도 증가한다. 즉  $\varepsilon$  값이 증가할수록 안정화 효과를 가져온다는 것을 알 수 있다. 이러한 외부감쇠기의 안정화 효과에 대한 연구는 1975 년 Wahed<sup>8</sup> 의 연구에서도 살펴 볼 수 있다.

Fig.5 은 Fig.4 의 경우에 있어서 스프링 상수 값의 변화에 따른 플러터가 발생하는 임계 분포 종동력에서의 고유 진동수 값을 나타낸다. Fig.4 에서 살펴본 것처럼  $\varepsilon$  의 값이 클수록 임계분포 종동력 값이 증가하는 반면 이 그림에서는  $\varepsilon$  의 값이 클수록 고유진동수 값은 감소하고,  $\kappa$  값이 증가하면 진동수도 점차적으로 증가하는 것을 알 수 있다.

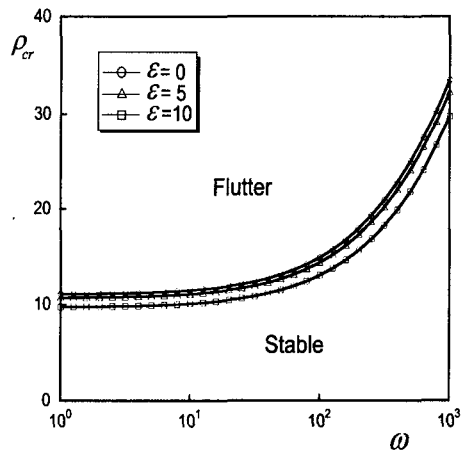


Fig.5 Critical frequency depending on the stiffness of elastic foundation for  $\varepsilon=0, 5, 10$

Fig.6 은 한단고정-타단 단순지지의 경우,  $\varepsilon=0, 5, 10$  에 대하여 탄성 지지의 스프링 상수  $\kappa$  값의 변화에 따른 임계 분포 종동력 값과 불안정 형태를 나타낸 그림이다.  $\varepsilon=0$  일 때는  $\kappa < 110.33$  의 구간에서는 다이버전스형 불안정이 발생하며,  $\kappa$  값이 증가함에 따라 임계 분포 종동력 값도 증가함을 알 수 있다.  $\kappa = 110.33$  에서 임계 분포 종동력 값이 점프(jump)하여 다이버전스

형 불안정에서 플러터형 불안정으로 천이 (transition) 된다.  $\varepsilon=5,10$  일 때는 각각  $\kappa=116.58, 135.33$  에서 다이버전스형 불안정에서 플러터형 불안정으로의 천이가 생기며,  $\varepsilon$  값의 증가에 따라 천이 점의 값이 증가하는 것을 알 수 있다. 또한 이 그림에서는  $\varepsilon$  값의 증가함에 따라 다이버전스가 발생하는 임계 분포 종동력 값은 감소한다. 즉 불안정 효과를 가져온다. 천이 점을 지나 플러터 구간에서 임계 분포 종동력 값은  $\varepsilon$  이 증가함에 따라 증가하는 안정화 효과를 가져온다는 것을 알 수 있다. 이러한 흥미로운 결과를 자세하게 관찰하기 위하여 Fig.7(a)(b)는  $\kappa=10$  일 경우의 1 차와 2 차 고유진동수 곡선과  $\kappa=1000$  일 경우의 1 차와 2 차 고유치 곡선을 나타내고 있다.

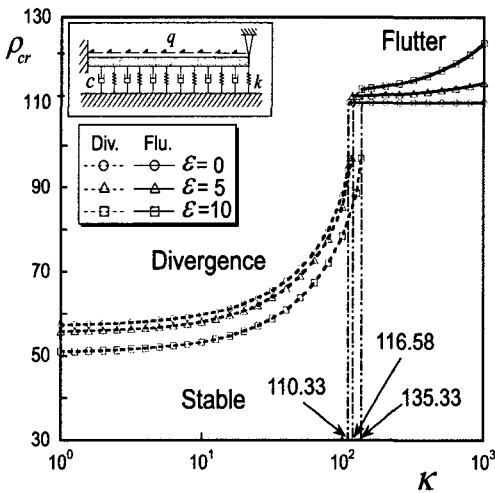


Fig.6 Critical distributed follower force depending on the stiffness of elastic foundation for  $\varepsilon=0, 5, 10$

Fig.7(a)는  $\kappa=10$  일 때,  $\varepsilon=0,5,10$  에 대하여 1 차와 2 차 고유진동수를 나타내고 있다. 1 차 고유진동수가 0 이 되어 다이버전스형 불안정이 생기며,  $\varepsilon=0$  인 경우에 있어서 다이버전스형 불안정이 생기는 임계 분포 종동력 값은  $\rho_D = 59.62$  이다.  $\varepsilon=5, 10$  일 경우  $\rho_D$  가 57.99 와 53.19 이며,  $\varepsilon$  값이 증가함에 따라 임계 분포 종동력 값이 감소하는 결과를 확인하였다.

Fig.7(b)는  $\kappa=1000$  일 때,  $\varepsilon=0,5,10$  에 대하여 1 차와 2 차의 고유치곡선을 나타내고 있다.  $\varepsilon=0$  일 경우 1 차와 2 차 고유치분기가 일치하고, 허수

축을 가로질러 플러터가 발생한다. 이때의 임계 분포 종동력 값  $\rho_F$  는 111.01 이다.  $\varepsilon=5,10$  의 경우는  $\rho_F$  가 각각 114.51 과 123.81 이며,  $\varepsilon$  값의 증가에 따라 임계 분포 종동력 값  $\rho_F$  도 증가 하는 Fig.6 에서의 결과를 확인 할 수 있다.

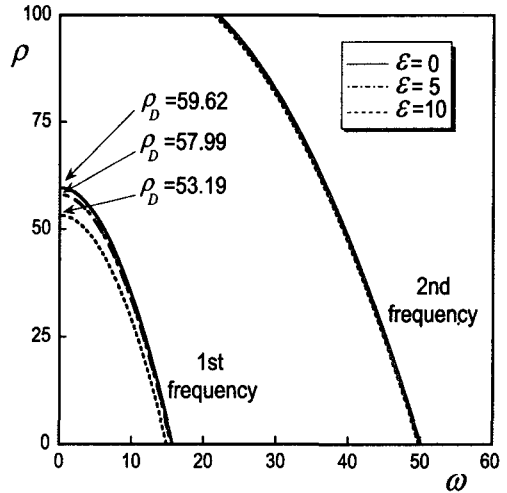


Fig.7(a) First and second Eigen-frequencies for the distributed viscous damping  $\varepsilon=0, 5, 10$  ( $\kappa=10$ )

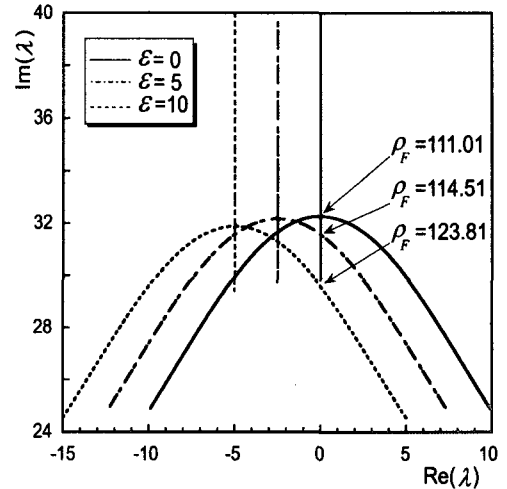


Fig.7(b) First and second Eigenvalue curves for the distributed viscous damping  $\varepsilon=0, 5, 10$  ( $\kappa=1000$ )

Fig.8 은 양단 단순 지지의 경우,  $\varepsilon=0,5,10$  에 대하여 스프링 상수  $\kappa$  값의 변화에 따른 임계 분포 종동력 값과 불안정 형태를 나타낸 그림이다. 이 그림에서는  $\kappa$  와  $\varepsilon$  값의 크기에 관계없이 다이버전스형 불안정만 발생하는 것을 알 수 있다.  $\kappa$  값의 크기가 증가함에 따라 임계분포 종동력 값도 크게 증가하는 것을 알 수 있다.  $\varepsilon$  값이 증가함에 따라 임계분포 종동력이 감소한다. 즉 불안정화 효과를 가져온다.

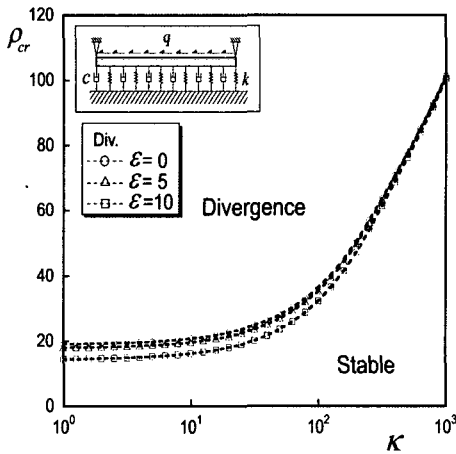


Fig.8 Critical distributed follower force depending on the stiffness of elastic foundation for  $\varepsilon=0, 5, 10$

Fig.9 는 양단 고정 of the 경우,  $\varepsilon=0,5,10$  탄성 지지의 스프링 상수  $\kappa$  값의 변화에 따른 임계 분포 종동력 값  $\rho_{cr}$  과 불안정 형태를 나타낸 그림이다.

이 그림에서는  $\kappa < 221.59$  의 구간에서는 다이버전스형 불안정이 발생하며, 스프링 상수 값이 증가함에 따라 임계 분포 종동력 값도 증가하는 것을 알 수 있다.  $\kappa = 221.59$  에서 임계 분포 종동력 값이 점프하여 다이버전스형 불안정에서 플러터형 불안정으로 천이 된다.  $\varepsilon = 5, 10$  일 때는 각각  $\kappa = 227.84, 246.59$  에서 다이버전스형 불안정에서 플러터형 불안정으로 천이가 생기며,  $\varepsilon$  값의 증가에 따라 천이 점의 값이 증가하는 것을 알 수 있다. 또한 Fig.6 의 한단고정-타단 단순지지의 경우와 마찬가지로  $\varepsilon$  값의 증가함에 따라 다이버전스형 불안정 구간에서는 불안정화 효과를 플러터형 불안정구간에서는 안정화 효과를 가져온다는 것을 알 수 있다.

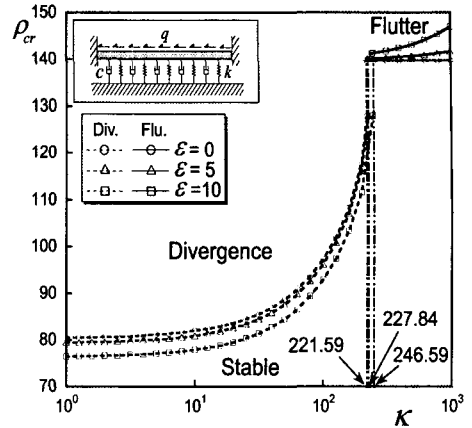
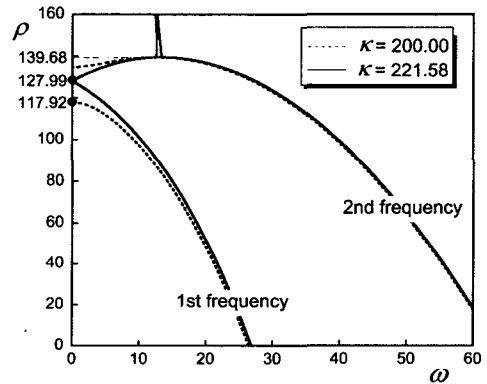
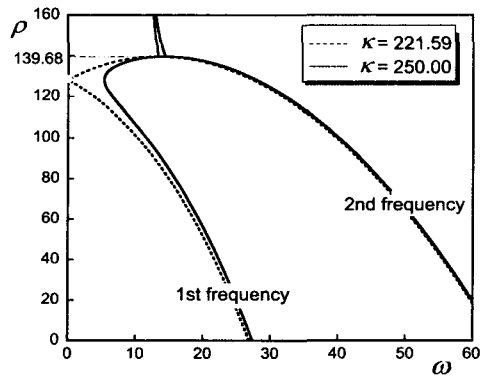


Fig.9 Critical distributed follower force depending on the stiffness of elastic foundation for  $\varepsilon=0, 5, 10$



(a)  $\kappa = 200.00, 221.58$



(b)  $\kappa = 221.59, 250.00$

Fig.10 First and second Eigen-frequencies for distributed follower forces when the stiffness of elastic foundation  $\kappa = 200.0, 221.58, 221.59, 250.0$  ( $\varepsilon = 0$ ).

Fig.10(a), (b)는 Fig.9 에서 다이버전스형 불안정에서 플러터형 불안정으로 점프 하여 천이 되는 현상을 자세히 설명하기 위하여  $\varepsilon=0$  이고 각각  $\kappa=200.00, 221.58, 221.59, 250.00$  의 경우에 대하여 분포 종동력의 변화에 따른 1 차 고유진동수와 2 차 고유진동수의 변화를 나타내고 있다. Fig.10(a)에서는 1 차 고유 진동수가 0 이 되는  $\rho=117.92, 127.99$  에서 다이버전스형 불안정이 일어나고 그 후,  $\kappa=200.00, 221.58$  모두 1 차와 2 차 고유진동수가 일치하는  $\rho=139.68$  에서 플러터형 불안정이 발생한다. Fig.10(b)에서는  $\kappa=200.00, 221.58$  모두 다이버전스형 불안정은 발생하지 않고  $\rho=139.68$  에서 플러터형 불안정만 발생하는 것을 알 수 있다. 또한 여기서 알 수 있는 것은  $\varepsilon=0$  일 경우,  $\kappa$  값의 크기에 관계없이 플러터가 발생하는 임계 분포 종동력 값( $\rho=139.68$ )에는 변화가 없다는 것을 알 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구는 점성 감쇠가 건성 마찰력을 받는 탄성 지지보의 안정성에 미치는 효과를 다양한 경계조건을 고려하여 연구하였다. 얻어진 주요한 결론을 요약하면 다음과 같다.

1. 한단 고정-타단 자유보에서는 분포 점성감쇠상수  $\varepsilon$  와 분포 탄성지지의 스프링 상수  $\kappa$  값에 관계없이 플러터형 불안정만 발생한다.
2. 양단 단순 지지보에서는  $\varepsilon$  과  $\kappa$  값에 관계없이 다이버전스형 불안정만 발생한다.
3. 한단 고정-타단 단순지지보와 양단 고정보에서는  $\varepsilon$  과  $\kappa$  의 값에 따라 다이버전스형 불안정에서 플러터형 불안정으로의 천이가 발생한다.
4.  $\varepsilon$  의 증가함에 따라 다이버전스형 불안정에는 불안정화 효과, 플러터형 불안정에는 안정화 효과를 가져온다는 중요한 결과를 본 논문에서 처음 얻어냈다.

#### 참고문헌

1. Millner, N., "A Theory of Drum Brake Squeal," Institute of Mechanical Engineers, c39/76, pp. 177-185, 1976.
2. Kang, B. and Tan, C. A., "Parametric Instability of a Leipholz Column under Periodic Excitation," Journal

- of Sound and Vibration, Vol. 229(5), pp. 1097-1113, 2000.
3. Ouyang, H. Mottershead, J. E., Cartmell, M. P. and Friswell, M. I., "Friction-induced parametric resonances in discs: effect of a negative friction-velocity relationship," Journal of Sound and Vibration, Vol. 209, pp. 251-264, 1998.
4. Ouyang, H., Mottershead, J. E., Brookfield, D. J., James, S. and Cartmell, M. P., "A methodology for the determination of dynamic instabilities in a car disc brake," International Journal of Vehicle Design, Vol. 23, pp. 241-262, 2000.
5. Mottershead, J. E., Ouyang, H., Cartmell, M. P. and Friswell, M. I., "Parametric resonances in an annular disc, with a rotating system of distributed mass and elasticity; and the effects of friction and damping," Proceeding of the Royal Society of London, A, Vol. 453, pp. 1-19, 1997.
6. Hulten, J. O., "Friction models applied to drum brake squeal," American Society of Mechanical Engineers 16th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, DETC97/VIB-4161, 1997.
7. Smith, T. E. and Herrmann, G., "Stability of a Beam on an Elastic Foundation Subjected to Follower Forces," Journal of Applied Mechanics, Vol. 39, pp. 628-629, 1972.
8. Wahed, I. F. A., "The instability of cantilever on an elastic foundation under the influence of a follower force," Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 17, pp. 219-222, 1975.