韓國數學敎育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2004. 5. 제 8권, 제 1호, 1-11

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
May. 2004, Vol. 8, No. 1, 1-11

범자연수 지도에서 모델 활용에 관한 연구[1)]

김남균 (청주교육대학교)

Ⅰ. 서론

학생들이 수학을 배우면서 처음 접하는 것은 수이다. 수는 일상의 문제 해결 뿐 아니라 이후의 수학 학습에서 기초가 되는 중요한 내용이다. 수 지도를 어떻게 하느냐에 따라 이후의 수학 학습에 큰 영향을 주게 된다.

처음에 수를 지도할 때는 학교에 들어오기 전의 수 경험을 기반으로 한다. 수가 활용되는 일상 생활 장면에서 아동의 주변에 있는 일상 사물이나 그림을 활용하여 수를 지도한다. 그러나, 점차 수의 크기가 커지게 되면 사물이나 그림에만 의존할 수 없다. 수를 지도할 때 수학적 모델을 활용하게 된다. 어떤 모델을 활용하여 지도하느냐에 따라 수 개념의 지도 방법이 달라지며 학생들의 수 개념 이해도도 달라지게 된다.

현실주의 수학 교육에서는 학생들에게 수를 지도하기 위해 수의 다양한 구조가 내재된 모델을 활용하도록 하고 있다(Treffers, 2001a; Trsffers and Buys, 2001). 이들은 프로이덴탈의 교수학적 현상학을 근거로 수의 개념을 분류하고, 수 지도에 유용한 모델을 선형 모델, 묶음 모델, 복합 모델 등으로 나눈다. 이들은 모델마다 지도에 적합한 수의 주조와 개념이 있음을 상정하고, 각 모델의 장점에 따라 수 개념 지도에 활용한다. 교사가 특정한 수의 구조와 개념을 강조하는 모델을 활용하게 되면 그 개념을 더욱 효과적으로 지도할 수 있으며, 아동들은 다양한 수 지도 모델을 활용하여 학습하면서 자연스럽게 수 개념을 이해가게 된다는 것이 그들의 생각이다.

현실주의 수학교육의 주장은 이론에 근거할 뿐 아니라 학교 현장의 실험을 근거로 하기에[2)], 수 지도에서 모델 활용에 관한 전형으로 적합하다.

본 연구의 목표는 현실주의 수학교육의 주장을 토대로 초등학교 수 개념 지도에서 모델 활용 현황을 분석하고 모델 활용을 중심으로 수 개념 지도의 개선 방향을 모색하는 것이다. 이를 위하여 수 개념 지도에 활용되는 모델과 각 모델이 초점을 두고 있는 수의 개념과 수 구조를 관련지어 알아본다. 다음으로 제 7차 수학교육과정의 수 개념 지도 단원의 모델 활용 실태를 분석하여 이를 수 개념 지도와 수 구조의 지도 측면에서 반성한다. 마지막으로 다양한 수의 개념과 수의 구조를 체계적으로 지도하기 위해 범자연수 개념 지도 모델 활용과 수학교육연구 상에 제언을 하며 끝을 맺는다.

---

* ZDM 분류: F3
* MSC2000 분류: 97C90, 97U60

1) 일반적으로 수와 연산 지도에 활용되는 모델을 비례적 모델과 비비례적 모델로 구분한다. 본 연구에서는 현실주의 수학교육의 모델 형태에 따른 구분 즉, 선형 모델, 묶음 모델, 복합 모델을 따르며, 묶음 모델 중에 비례적 모델과 비비례적 모델의 개념을 포함시켜 분석하였다.

2) 현실주의 수학교육에서는 교육부 주관 하에 초등학교 수학을 위한 장기적인 교수-학습 궤도를 기술하는 TAL (Teaching and Learning Trajectory의 네덜란드어 약어) 프로젝트를 실시하였다. TAL에서 아동들의 수학에 대한 이해를 높이기 위해 실행한 교육 과정을 기술하여, 거시적인 교수학 수준에서 미시적인 교실 활동을 결정하는 틀을 제공하고 이론에 근거한 교육과정의 결과와 실행 과정을 알 수 있도록 하였다. 현재 TAL은 K-6의 수와 연산 부분이 완성되었으며, 2000년부터는 기하와 측정 영역을 대상으로 연구가 실행 중이다.
(http://www.fi.uu.nl/en/projects/description/project81.html)
본 연구에서 참고로 한 Children learn mathematics는 TAL 프로젝트의 결과를 기술한 것으로, 교수-학습 과정을 기록하여 놓아 모델이 활용되는 상황을 구체적으로 알 수 있다.

Ⅱ. 범 자연수의 학습과 모델

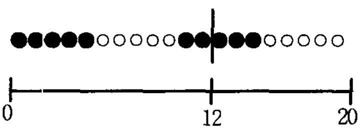
일반적으로 자연수는 구조적인 모델로 표현되며, 모델을 활용하여 학생들이 각기 모델에 내재된 수의 개념과 수의 구조를 이해하도록 도모할 수 있다(Treffers, 2001a; Treffers and Buys, 2001). 다음에서는 현실적 수학교육에서 이용하고 있는 범자연수 지도의 모델과 이 모델이 수 개념지도와 수의 구조 지도 상에서 어떤 역할을 하는지 알아보도록 한다.

1. 수 지도에 활용되는 모델의 유형

1) 선형 모델

선형 모델은 수 지도 모델 중 선의 형태로 된 모델을 말한다. 그 예로는 수직선, 구슬줄이 있으며 아동이 학습하는 수의 범위에 따라 그 길이와 나타내는 수의 범위를 다르게 하여 활용하게 된다.

구슬줄과 수직선을 따로 활용할 수 있지만, 수 개념 학습의 초기에는 구슬줄과 수직선을 함께 이용하여 지도한다. 예를 들어, 아래와 같이 12를 구슬줄과 수직선으로 나타낸다.



<그림 1> 선형모델의 12 표현

구슬줄과 수직선의 앞을 맞춰 나란히 놓고 구슬이 앞에 없음을 수직선 상에 0으로 나타내고, 수직선 상의 20은 그 앞에 구슬이 20개 있음을 나타낸다. 12는 구슬 12개의 위치 아래에 수직선에 12를 대응하여 표시한다. 이와 같은 선형모델 은 수의 계열의 학습, 연속적이고 선형적으로 수가 사용되는 상황에서 수 개념(12쪽, 12 킬로미터, 6월 12일)이해, 그리고 수직선을 활용한 덧셈과 뺄셈의 학습에 적절하다.

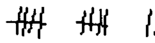
100까지의 수에 대해서도 구슬줄과 수직선을 병행하여 활용하지만, 점차 학년이 올라가면서 구슬줄과 수직선을 분리하여 활용하게 된다. 구슬줄의 활용은 줄어들고 수직선이 자리를 많이 차지하게 된다. 네덜란드에서 활용되는 수직선의 형태는 눈금 표시 법에 따라 구분된다. 일의 자리 수까지 모두 표시된 '자연수 수직선', 10의 배수만 표시된 '10의 배수 수직선', 수가 전혀 표시되어 있지 않은 '눈금 없는 수직선'이 있다. 지도하는 수의 크기와 학습 목표에 따라 이들 수직선을 다양하게 활용할 수 있다.

2) 묶음 모델

묶음 모델은 일정한 단위로 묶거나 낱개의 형태로 활용하는 수 학습 모델이다. 대표적인 예로 산가지가 있고, 손가락, 블록과 블록 묶음(5개씩 그리고 10개씩), 돈도 이에 해당한다. 묶음 모델은 손가락, 단추, 산가지, 블록처럼 묶음 안의 대상이 묶음 나타내는 수의 개수와 같은 가산인 것(비례 모델)과 동전과 같이 묶음이 나타내는 수와 대상의 수가 다른 것(비비례 모델)이 있다. 비례적 묶음 모델은 세기 활동과 밀접한 관련을 맺고 있지만, 비비례모델은 상대적으로 관련성이 적다.

묶음 모델로는 수를 1씩 혹은 10씩으로 구조화되는 양이나 값으로 좀더 자유롭게 표현할 수 있다. 예를 들어, 20까지의 수는 1, 5, 10으로 다양하게 모으거나 가를 수 있다.

수 12를 여러 가지 묶음 모델로 나타내어 보자. 산가지로 나타내면 다음과 같다.



<그림 0> 산가지

손가락으로는 양손의 손가락 더하기 손가락 2개로 나타낼 수 있으며, 단추, 블록 등도 1, 5, 10의 구조를 사용하여 나타낼 수 있다. 반면에 동전처럼 비비례 모델로 나타내는 방법은 다음과 같다.

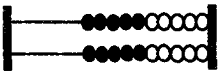
12 → ⑤ ⑤ ① ①   12 → ⑩ ① ①

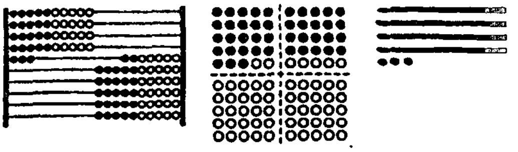
<그림 3> 동전으로 12의 표현

3) 조합 모델

조합모델은 선형모델과 묶음모델을 결합한 모델로 달걀 판, 5×2의 구조를 띈 여러 형태(예. 배, 기차)의 수와 연산 학습 모델이 이에 해당한다. 그리고 주판을 변형한 산술기(arithmetic rack)가 있는데 두 가지 색으로 5씩 구분한 10×2 형태의 20 산술기와 10×10 형태의 100산술기가 있다. 특히 20 산술기는 10 상자[3]와 5의 구조가 있는 주판을 개발적 연구로 개량하여 만든 모

델로 수의 구조 파악 뿐 아니라 다양한 계산 전략을 개발하는데 유용하다(Gravemeijer, 1994).


<그림 4> 20 산술기


43
<그림 5> 다양한 조합모델의 43 표현

2. 수 개념의 이해와 모델

수 개념은 단일한 것이 아니며 수 개념을 획득하는 데는 여러 방법이 있다. 초등학교에서 다루는 수 개념은 순서수, 집합수, 이름수로 나눌 수 있다(강지형 외, 2000). 최근에는 방법론적, 발생적, 교수학적 관점에서 내용과 형태에 따라 수의 개념을 더 세분하고 있다 (Freudenthal, 1973). 현실주의 수학교육에서는 수가 출현하는 방법과 수의 크기와 연산이 확대되고, 제한되는 방법에 따라 수의 개념을 명목수(이름수), 셈수(순서수), 개수(집합수), 측정수, 계산수로 구분한다 (Gravemeijer, 1994). 학생들의 발달에 따라 수의 여러 가지 개념 중 일부분에서 시작하여 모든 수 개념을 이해하고 통합적으로 활용할 수 있도록 지도하고 있다. 수개념들을 자세히 살펴보면 다음과 같다.

첫째, '명목수'는 '14번 버스'에서 버스 번호 '14'와 같이 무엇의 이름으로 쓰이거나 지시하는 수이다.

둘째, 수를 바로 세거나 거꾸로 세는 등 구두로 수를 셀 때 사용되는 '셈수'가 있다. 셈수는 숨바꼭질 같은 놀이, 노래, 수를 외우면 계단 오르기 같은 행동에서 학습된다. 셈수는 순서수의 개념으로, 수개념 발달의 초기에는 집합수 개념의 발달과 별개로 발달한다. 그러나, 집합수 개념이 결합하여 사물들을 센 결과가 사물 모임의 수라는 것을 알게 되는 결과적 세기로 발달하고 자연수에 개념 이해의 폭이 넓어진다.

셋째, '집합수'의 개념이 있다. 집합수는 基數나 量을 나타내는 수의 의미와 원소의 수가 같음(equipotency)의 개념이 연합된 것이다. 원소의 수가 같음은 일일이 세어서 알아내는 경우도 있지만, 반드시 세지 않고도 집합 사이에 일대일 대응이 존재함을 이해하여 알 수도 있다. 다시 말하면 수 개념 발달의 초기에 있는 어린 아동의 집합수 개념은 셈수와 함께 발달하지 않는 경우가 있다. 즉, 셈수의 개념이 없더라도 개수의 개념을 지니고 있는 아동이 있다. 프로이덴탈은 이러한 예로 그의 손자의 예를 들고 있다. 프로이덴탈의 손자는 숟가락 위의 딸기 여섯 개가 놓인 형상과 식탁에 사람들이 앉은 형상을 보고 그 수가 같다고 말한다. 식탁에 둘러 앉은 "할아버지와 할머니", "아버지와 어머니", 그리고 "자신과 여동생"을 언급하면서 딸기의 수와 사람의 수가 같다고 말하였다.

넷째, '측정수'는 가장 흔히 사용되는 수의 유형으로, 양의 측정과 측정 활동을 통해서 구성된다. 예를 들어, '토마토 1kg에 400원이다'고 할 때, '400원'과 '1kg'의 표현에 들어있는 수이다. 측정수는 측정활동의 결과로 생기는 양과 단위와의 비이다. 따라서 '비례수'라고 하기도 한다.

다섯째, 계산수란 수의 알고리즘적인 측면, 형식적인 공리적 측면으로서 여기서 수는 규칙에 따라 조작되는 대상일 뿐이다(우정호, 1998). '곱셈의 교환법칙'같은 관습과 규칙 체계에 따라 수를 가지고 활동할 때의 수를 말한다. 이러한 규칙에 대한 지식은 수의 계산을 간단하게 해준다. 예컨대, 16×2는 $2\times16=16+16=32$에서 쉽게 구할 수 있다. 그러나, 규칙을 잘못 이해하면 혼동을 일으킬 수가 있다. 앞의 예의 규칙을 $16\div2$에 적용하여 $2\div16$로 계산할 우려가 있다.

이 다섯 가지 수개념은 아동 수개념 발달의 초반에는 낱낱이 출현하여 발달하지만 점차 통합적 이해가 가능해진다(Gravemeijer, 1994). 수개념을 지도함에 있어서도 수개념 발달에 맞추어 모델을 활용하고 있다.

수개념을 처음 지도할 때는 적합한 문맥과 모델을 사용하여 하나의 수개념을 지도하며, 학년이 올라가면서 수 개념 간의 관계를 이해시키는데 사용된다. 예를 들어, 구슬줄과 수직선을 짝지어 연결시키면, 셈수와 집합수, 측정수, 계산수의 관계를 명확히 이해하는데 도움이 되며 이 때 수직선은 수를 표현하는 강력한 모델이 된다. Treffers(2001a)과 Treffers & Buys(2001)

3) 5×2 형식으로 된 상자

의 연구 결과에서 보면, 선형 모델은 '20까지의 수에서 구슬줄과 수직선의 활용, 100까지의 수에서 구슬줄과 수직선의 활용, 큰 수의 크기와 어림에 활용'으로 계열화되어 있다. 이러한 계열은, 수의 개념을 도입하고 수의 크기에 따라 선형 모델을 활용하는 좋은 예라고 생각된다.

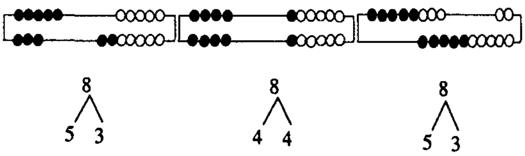
3. 수의 구조와 모델

현실주의 수학교육에서는 수의 개념과 관련해서 뿐 아니라 수의 구조나 크기를 지도할 때도 적합한 모델을 활용하고 있다. 학년이 올라가면서 수 개념을 점차로 통합적으로 지도하지만 수의 구조나 수의 크기에 따라 그에 적절한 모델을 다양한 방법으로 적용하고 있는 것이다. 다음에서는 현실주의 수학교육에서 특정한 수의 구조를 모델에 내포시켜 수의 구조를 지도하는 방법을 알아본다.

일반적으로 십진수 체계에서는 1, 10, 100, ...의 구조가 매우 중요하며, 수개념을 익히고 형식적인 연산을 행할 수 있기 위해서는 1, 10, 100, ... 등 십진수 자릿값 체계를 알아야 한다. 네덜란드의 현실적 수학교육에서는 범자연수를 지도할 때 수의 구조를 중요시한다(Treffers, 2001a). 세 자리 수 이상의 큰 수에 대해서는 물론 십진 자릿값 체계를 강조하지만, 20이하나 100이하의 수를 지도할 때에는 수의 연산(특히 덧셈과 뺄셈)과 관련하여 다른 구조들도 강조한다.

수 개념의 이해와 범자연수의 연산에 유용한 수의 구조는 수의 범위에 따라 조금씩 달라진다. 20이하의 수 학습에서는 같은 수가 2개 들어가는 형태[4]와 5로 묶기의 구조가 중요시 된다. 4, 6, 8, 10은 같은 수 2개로 나눌 수 있으며, 4+4=8임을 알고 4+4과 비슷한 덧셈 즉, 3+4, 4+3, 4+5, 5+4 3+2를 손쉽게 해결할 수 있다. 그리고, 8을 5로 묶어 5와 3으로 되어 있는 것을 안다면 5+3=8, 3+5=8을 계산하는 것은 그리 어렵지 않게 된다. 즉, 수 8에 있는 구조가 수 개념을 다양하게 인식하고 연산의 기본이 된다. 네덜란드에서는 수 8의 다양한 구조를 쉽게 인식하도록 하기 위해 조합 모델을 활용하고 있다.

4) 영어로는 double이라고 하다. 배종수(1999)는 '수의 2배'라고 표현한다.



<그림 7> 수 8의 조합 모델 표현

100이하의 수 경우 10의 배수와 보수의 구조는 수의 이해와 연산에서 중요한 구조이다. 따라서 100이하의 수에서 10씩 세거나 보수 관계에 있는 수를 쉽게 나타낼 수 있는 모델이 필요하다. 이 때는 복합 모델보다 묶음 모델이, 묶음 모델보다는 선형 모델이 사용이 적합하다(Treffers & Buys, 2001). Treffers 등은 10단위로 두 가지 색을 교대로 칠한 구슬줄과 10씩 구분한 수직선이 구조 파악과 개념 이해에 유용하다고 보았다.

<그림 8> 구슬줄

<그림 8>은 흰구슬 10개, 붉은 구슬 10개가 번갈아 끼워져 있는 구슬줄이다. 이 구슬줄로 뛰어세기를 하고, 10씩 구분된 수직선에 나타내는 활동은 십진기수법에서 중요한 10의 배수 구조를 쉽게 터득할 수 있는 방법이다. 구슬줄로 활동한 후에 빈 수직선에 나타내게 된다. 이러한 활동은 수의 구조 뿐 아니라 셈수, 집합수, 측정수, 계산수의 개념이 하나로 통합되고 관련되는 기회를 제공한다(Treffers & Buys, 2001).

현실적 수학교육에서는 수의 구조화를 매우 중시하고 있다. 그 기반이 되는 이론은 학습에서 심상을 구성하고 그를 기반으로 형식화시켜야 한다는 수학화 이론이다. 이를 바탕으로 범자연수의 계산에서는 계산의 수준 이행을 '세기에 의한 계산→구조화에 의한 계산→형식적 계산'의 3단계로 나누고 있다(Treffers, 2001a; Treffers & Buys, 2001). 한편 현실적 수학교육에서는 "아동의 비형식적 계산 방법과 형식적 방법을 연결짓기"를 매우 중시하는 바 구조화에 의한 계산은 비형식과 형식을 잇는 중요한 가교가 되는 셈이다. 모델을 활용하여 구조를 강조한 계산을 하게 되고 구조의 심상이 아동의 머릿 속에 남아 모델이 사라진 뒤에도 형식적인 계산을 행하는데 도움을 주게 되는 것이다.

이상에서 초등학교 범자연수를 지도할 때 목표로 하는 수 개념과 수의 구조에 따라 적절하고 다양한 모델을 활용하여야 함과 그 구체적인 방법에 대해 시사점을 얻을 수 있다.

Ⅲ. 범자연수 지도에 모델 활용의 실제 분석

1. 분석 대상 및 방법

본 연구에서는 우리나라 교과서에서 수 지도에 활용되는 모델과 활용방법을 조사하여 모델 활용에 대해 제언을 하고자 한다. 이를 위하여 현실적 수학교육에서 분류한 모델의 유형에 따라 초등학교 수학 교과서의 범자연수 관련 단원에 활용되는 모델을 분석하여 그 활용 방법을 알아보았다.

분석 대상 단원으로 우선 초등 수학 수 관련 단원인 1-가의 '5까지의 수'와 '9까지의 수', 1-나의 '100까지의 수', 2-가의 '세 자리 수', 3-가의 '1000까지의 수', 4-가의 '큰 수'를 정하였다. 그리고, 4-나의 '어림하기'는 교육과정의 영역 분류상 측정 영역에 해당되지만 범자연수 범위의 어림수의 개념을 다루고 있어 본 연구의 분석 대상으로 삼았다. 분석 대상을 단계에 따라 정리하면 <표 1>과 같다.

<표 1> 분석 대상 단원

단계	단원명	소주제수
1-가	1. 5까지의 수	9
	2. 9까지의 수	7
	7. 50까지의 수	7
1-나	1. 100까지의 수	8
2-가	1. 세 자리 수	9
3-가	1. 10000까지의 수	8
4-가	1. 큰 수	8
4-나	6. 어림하기	6

각 단원의 소주제를 기준으로 활용되는 모델을 조사하여, 학년과 모델 유형에 따라 소주제의 수와 백분율로 정리하여 활용 현황을 알아보았다. 그리고, 구체적인 활용 방법과 내용을 교과서 예와 함께 분석하고, 현실적 수학교육에서의 모델 활용과 비교하여 논의하였다.

2. 학년에 따른 모델 활용의 유형

우선 소주제를 한 단위로 한 정량적 분석 결과를 알아보겠다. <표 2>는 초등학교 범자연수 지도와 관련 단원에서 모델 활용의 현황을 단계와 모델 유형에 따라 정리한 것이다. 이 표를 보면 학년별 모델 활용 정도와 활용되는 모델의 유형 상에서 두드러진 특징을 엿볼 수 있다.

<표 2> 모델 활용 현황

<table>
<tr><th rowspan="2">단계</th><th rowspan="2">단원명
(단원의 소주제수)</th><th colspan="6">모델 활용 소주제수</th></tr>
<tr><th>선형</th><th>묶음</th><th>조합</th><th colspan="3">계</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1-가</td><td>5까지의 수 (9)</td><td></td><td>1</td><td></td><td>1</td><td rowspan="3">10</td><td rowspan="4">16</td></tr>
<tr><td>9까지의 수 (7)</td><td></td><td>2</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>50까지의 수 (7)</td><td></td><td>7</td><td></td><td>7</td></tr>
<tr><td>1-나</td><td>100까지의 수 (8)</td><td>1</td><td>5</td><td></td><td colspan="2">6</td></tr>
<tr><td>2-가</td><td>세 자리 수 (9)</td><td>1*</td><td>7*</td><td></td><td colspan="3">7[1)]</td></tr>
<tr><td>3-가</td><td>1000까지의 수 (8)</td><td>2*</td><td>5*</td><td></td><td colspan="3">6[2)]</td></tr>
<tr><td>4-가</td><td>큰 수 (8)</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td colspan="2">2</td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td>4-나</td><td>어림하기 (6)</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td colspan="2">2</td></tr>
</table>

*선형모델과 묶음모델이 1주제에 중복 사용됨

[1)](1+7)-1, [2)](2+5)-1

먼저 학년에 따른 모델 활용도를 살펴보겠다. 1학년이 16개, 2학년이 7개, 3학년이 6개, 4학년이 4개의 소주제에서 모델이 활용되고 있어, 1학년 교과서에 모델이 가장 많이 활용되고 학년이 올라가면서 줄어들고 있다 <표 2>.

<표 3> 학년별 활용 비율

<table>
<tr><th>단계</th><th>단원명
(단원의 소주제수)</th><th colspan="3">모델 활용
비율(%)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1-가</td><td>5까지의 수 (9)</td><td>11</td><td rowspan="3">44</td><td rowspan="4">52</td></tr>
<tr><td>9까지의 수 (7)</td><td>29</td></tr>
<tr><td>50까지의 수 (7)</td><td>100</td></tr>
<tr><td>1-나</td><td>100까지의 수 (8)</td><td colspan="2">75</td></tr>
<tr><td>2-가</td><td>세 자리 수 (9)</td><td colspan="3">78</td></tr>
<tr><td>3-가</td><td>1000까지의 수 (8)</td><td colspan="3">75</td></tr>
<tr><td>4-가</td><td>큰 수 (8)</td><td colspan="2">25</td><td rowspan="2">29</td></tr>
<tr><td>4-나</td><td>어림하기 (6)</td><td colspan="2">33</td></tr>
</table>

그러나, 각 학년별로 분석한 소주제 수에 대한 모델이 활용된 소주제의 수의 비율(<표 3>)은, 2학년에서 78%, 3학년에서 75%로 2학년과 3학년의 모델 활용 비율이 가장 높고, 그 다음이 1학년(52%), 4학년(29%)의 순이다. 즉, 모델이 활용되는 빈도는 1학년이 가장 많고 학년이 올라갈수록 줄어들고 있지만, 전체 소주제와의 비율로 볼 때 2, 3학년에서 모델을 많이 활용하고 있고 4학년으로 갈수록 적게 활용되었다. 1학년은 처음 수개념을 도입하는 단계이므로 모델 이전에 또는 모델과 함께 구체물 자료를 많이 활용하고 있어 모델 활용 비율이 2·3학년에 비해 상대적으로 적었다. 학년별 모델의 활용은 구체물에서 수학 모델로, 그리고 고학년이 갈수록 모델 의존도가 낮아지고 있다. 학년이 올라갈수록 추상성과 형식성의 정도가 높아져야 한다는 관점에서 볼 때 모델 활용이 적절하게 이루어진다고 판단된다.

다음으로 수개념 지도에 활용되는 모델의 유형을 보면, 조합 모델은 사용되지 않고 묶음 모델과 선형 모델만 활용되고 있다. 선형 모델과 묶음 모델을 비교해 보면 선형 모델보다 묶음 모델의 활용이 압도적으로 많이 활용되고 있다.

학년에 따른 모델 활용 실태를 알아보면, 선형 모델의 활용 빈도는 학년에 따라 1 또는 2회로 일정하고 묶음 모델의 활용 빈도는 학년이 올라갈수록 줄어드는 양상을 보이고 있다<표 4>. 따라서 학년이 올라가면서 선형 모델의 활용 비율이 늘고 있지만 전체적으로 묶음 모델에 의존하고 있다고 할 수 있다.

<표 4> 모델별 활용 비율

단계	단원의 소주제수	모델 활용 수(비율)			
		선형	묶음	조합	계
1-가	23		10(44)	0	10(44)
1-나	8	1(12.5)	5(62.5)	0	6(75)
1학년	31	1(3.2)	15(48.8)	0	16(52)
2-가	9	1*(11)	7*(78)	0	7*(78)
3-가	8	2*(25)	5*(62.5)	0	6*(75)
4-가	8	1(12.5)	1(12.5)	0	2(25)
4-나	6	1(16.7)	1(16.6)	0	2(33.3)
4학년	14	2(14)	2(14)	0	4(28)
계	62	6*(10)	29*(47)	0	33*(53)

*한 소주제에 선형 모델과 묶음 모델이 중복 사용되어 조절한 값임

네덜란드에서는 수의 크기, 수 개념, 수의 구조와 관련하여 지도하기에 적절한 모델을 골고루 활용하고 있다. 예를 들어 20 이하의 수에서 2배가 되는 수를 학습할 때는 조합 모델인 산술기를 활용하고, 100까지의 수에 대한 수의 순서, 개수, 계산을 학습할 때에는 선형 모델인 구슬줄과 수직선을 활용하고 있다. 수의 개념 지도에서 조합 모델에 속하는 모델이 전혀 소개되지 않으며, 주로 묶음모델에 의존한다는 점은 다양하고 적절한 모델 활용의 관점에서 본다면 개선의 여지가 엿보인다. 그렇다면 모델 활용의 방법과 내용은 어떤지 구체적인 교과서의 예를 통해서 알아볼 필요가 있다.

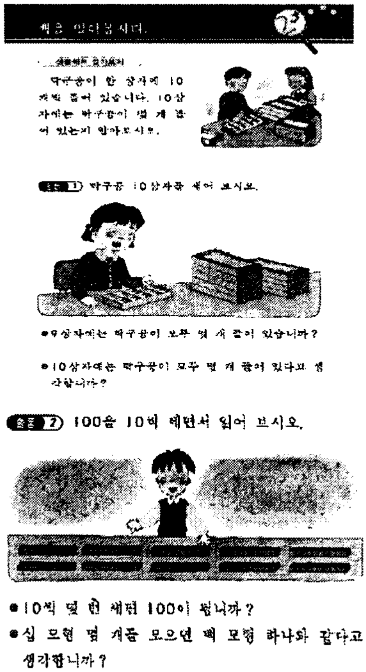
3. 모델 활용 방법과 내용

다음에서는 교과서 상의 모델 활용 예를 통하여, 교과서에 모델이 수개념 학습에서 어떤 역할을 하고 있는지와, 교과서에 주로 사용된 묶음 모델과 선형모델의 활용상의 특징을 분석하였다.

1) 모델의 역할

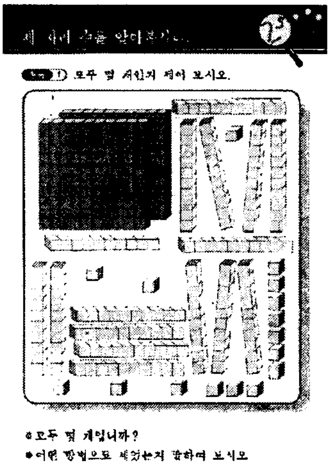
모델은 주로 교과서의 '활동'에서 활용된다. '활동'에서 모델이 이용되는 방법은 실생활 소재나 다른 구체물로 이루어진 문제 상황과 관련되어 활용되는가 그렇지 않은가에 따라 구분할 수 있다.

<그림 8> 2-가의 '백을 알아봅시다'이다. 이 경우가 전형적인 '생활에서 알아보기'에서 문제 상황을 도입하고 이를 구체물로 알아본 후 모델로 활동하는 경우이다. 수학 학습과정을 수학화 과정이라고 보았을 때, 이 경우 모델은 실생활인 현실과 수학을 연결짓는 역할을 하는 바 학습의 출발점인 '현실과 수학의 매개체로서의 모델'이라 할 수 있다.



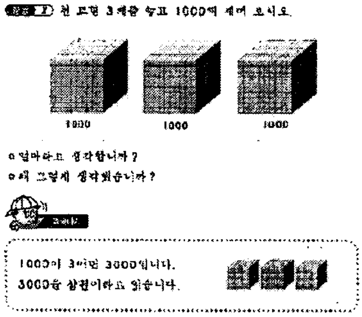
<그림 8> 현실과 수학을 매개체로서의 모델

위의 예처럼 모델이 실생활과 수학의 매개가 되기도 하지만 문제 상황 없이 곧바로 모델을 활용한 활용되기도 한다. <그림 9>는 별다른 문제 상황 설정 없이 수 모형을 조작하는 활동에서 시작하는 경우의 예이다.



<그림 9> 현실로서의 모델

이 경우 모델은 조작이 문제 상황이자 수학 학습의 출발점인 '현실로서의 모델'의 역할을 한다고 할 수 있다.



<그림 10> 형식화에 이용

또, 모델은 형식적 수학으로 형식화는 데도 이용된다. <그림 10>은 3-가 '몇 천을 알아봅시다'의 교과서 내용이다. 여기에서 수 모형은 3000을 세어보는 '활동'과 '약속하기'에 활용된다. 활동 후에 수학적으로 형식화할 때도 이용된다.

요약하면, 범자연수 학습에서 모델은. 교과서의 '활동' 부분에서 주로 활용되는데 실생활 문제 상황과 수학을 연결하는 '매개'의 역할을 거나 '학습의 출발점'의 역할을 한다. 또한 수학 내용을 형식화하는데도 사용된다. 수학 학습과정을 수학화의 과정으로 보았을 때, 수학화의 전 과정에 이용되고 있다.

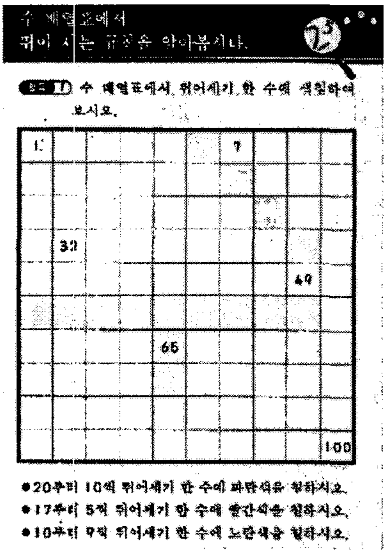
2) 묶음 모델의 활용

1학년에서 4학년까지 범자연수 개념 관련 단원의 소주제 중 반 정도(47%), 모델이 활용되고 있는 소주제의 약 88%(33개 소 주제 중 29개 소 주제)에 묶음 모델이 활용되고 있다. 그러나, 1학년에서 4학년으로 올라감에 따라 묶음 모델 활용의 빈도와 점유율이 낮아지고 있다<표 4>. 1학년에서 4학년 범자연수 지도에 활용되는 묶음 모델에는 바둑돌, 수 모형, 돈(모조화폐), 수 배열표가 있다. 그 중에서도 수 모형과 돈이 많이 활용되고 있다. 묶음 모델 활용 상의 특징을 알아보면 다음과 같다.

첫째, 묶음 모델 중 수 모형은 단연코 많이 활용되는 모델로 1학년부터 3학년까지 광범위하게 활용된다.

돈은 2-가 '세 자리 수' 단원에서부터 활용되기 시작하여 학습하는 수의 범위가 커짐에 따라 점점 많이 활용되어 4학년에서는 돈 모형만 활용되고 있다

둘째, 수 배열표는 수 개념 도입 시보다는 수를 뛰어 세거나 수 사이의 규칙과 순서를 종합적으로 알아보는 시간에 주로 활용된다. <그림 11>은 뛰어 세면서 색칠하여 뛰어 세기 한 수들의 규칙성을 알아보는 활동에 수 배열표를 이용하는 예이다.



<그림 11> 수 배열표의 활용

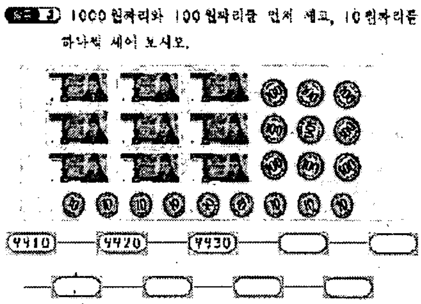
셋째, 제7차 수학 교과서에 활용되는 묶음 모델에 들어 있는 수의 구조는 모두 십진체계를 염두에 두고 있다. 묶음의 종류나 색 모두 1, 10, 100,… 등의 구조만을 다루고 있다. 반면에 학생의 비형식적 활동과 형식적인 수학을 교사의 안내로 연결시키고 있는 현실적 수학교육에서는 묶음 모델에 십진체계의 구조 뿐 아니라 5의 구조를 도입하여 수 개념 이해와 연산 학습에 도움이 되도록 하고 있다.

이상의 분석에서 볼 때 묶음 모델은 범자연수 지도에서 가장 많이 활용되는 모델로 수의 범위와 학습 내용에 따라 수 모형, 돈 모형, 수 배열표가 다양하게 사용된다. 다만, 모델에 십진체계의 구조 뿐 아니라 5의 구조가 포함되어 학생들이 여기서 파생되는 다양한 수의 구조를 학습할 수 있도록 도울 필요가 있다.

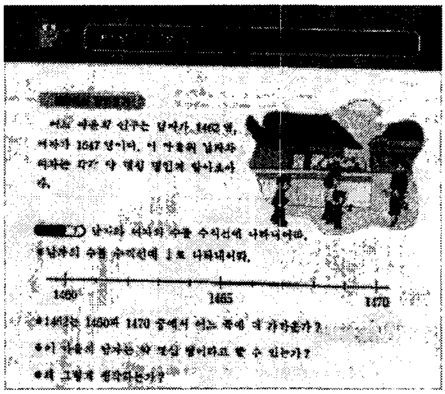
3) 선형 모델의 활용

앞서 분석한 대로 선형 모델은 '1-나'부터 '4-나'까지 골고루 활용되며 전체 모델 활용도를 감안한다면 선형 모델 의존도가 점점 높아진다. 선형 모델은 어떻게 활용되고 있는지 교과서의 예와 함께 알아보도록 하겠다.

첫째, 일반적으로 선형 모델하면 수직선을 연상하게 된다. 그러나 범자연수 관련 단원에 제시되는 대표적인 선형 모델은 수직선이 아니라 <그림 12>의 아래 부분에 있는 '수의 열'이다. <그림 12>는 3-가의 '10000까지의 수'의 한 장면으로 수를 순서대로 늘어 놓은 수의 열을 활용하여 수의 순서를 익히는 내용이다. 이와 같은 수의 열 형태의 선형 모델이 범자연수의 순서를 학습에 많이 활용되고 있다. 반면에 수직선은 '4-가' '어림하기' 단원의 '반올림을 알아보자' 소주제에만 활용되고 있다<그림 13>.



<그림 12> '수의 열' 활용



<그림 13> 수직선 이용의 예

두 번째는 활용되고 있는 수직선의 유형에 관한 문제이다. '4-나'에서 반올림 지도에 이용되는 수직선은 1460과 1470 사이를 1의 간격으로 나누어 놓은 형태로 현실적 수학교육에서 사용한 수직선 중 '자연수 수직선'에 해당한다<그림 13>. 그림 13에 제시된 활동 다음에서는 십의 자리의 반올림 학습에 '10의 배수 수직선'이 이용되고 있다. 그러나, 수가 전혀 제시되어 있지 않은 '빈 수직선'과 좀 더 구체적인 선형 모델인 구슬줄은 전혀 활용되고 있지 않다. 현실적 수학교육(Treffers, 2001a; Treffers & Buys, 2001)의 연구에 의하면 지도하는 수의 크기와 개념에 따라 좀 더 다양한 선형 모델을 활용할 필요가 있다.

선형 모델은 수의 순서와 범위를 표현하고 학습하는 데 매우 효과적인 모델이며 수의 크기에 따라 활용도가 높고 활용 방법도 다양하다. 현실적 수학교육에서는 다양한 선형 모델, 특히 수직선을 작은 수에서 큰 수의 학습에까지 효과적으로 활용하고 있다(Treffers, 2001a; Treffers, 2001b; Treffers & Buys, 2001). 범자연수 지도에 선형 모델이 활용되고 있는 실태 분석 결과 현재 우리나라 교과서에서는 선형 모델로 가장 적절히 표현할 수 있는 수의 순서 지도에 선형 모델을 활용하고 있다. 하지만 수의 크기에 따라 사용되는 선형 모델의 유형은 변화가 없으며, 수직선의 활용 범위는 매우 한정적이다.

Ⅳ. 결론

수학은 추상적, 논리적, 형식적, 이상적인 교과목이므로, 학생들이 수학 개념을 이해하는 데에 구체물과 모델의 도움이 필요하다. 제7차 교육과정에서는 학습자의 활동을 중시하는 수학교육을 강조하여 교사의 일방적인 설명식 학습보다는 학생들 스스로가 관찰, 조작, 분석, 종합하는 활동을 통하여 수학적 원리나 법칙을 예측하고 추론할 수 있는 수학 학습을 권장하고 있다. 그리고, 구체적 조작물을 수학도구로 활용하는 수학교육을 권장하고 있다(교육부, 1999). 배종수(2002)는 학생들이 개념을 이해할 때, 현실을 곧바로 이용하여 개념을 정의하는 것보다 현실과 개념의 중간 과정으로서 현실에서 반구체적인 단계인 모델을 만들어 학생들의 이해를 도와야 한다고 하며, 수학교육의 학습지도 모형의 한 단계로 모델을 설정하고 있다.

본 연구는 초등수학교육의 기본이라 할 수 있는 범자연수 학습에서 모델이 어떻게 활용되고 있는지 실태를 분석하여 시사점을 도출하는 것이 목적이다. 수학화 이론에 입각하여 현실적 수학교육을 실행하고 있는 네덜란드에서 범자연수 학습에 모델을 어떻게 활용하고 있는지 알아보고, 이를 우리나라 수학교육의 모델 활용 실제 분석에 이용하였다. 분석 시 Treffers(2001a, 2001b)와 Treffers & Buys(2001)의 수지도 모델의 유형과 수의 구조와 개념에 따른 활용 방법을 참고로 하였지만, 이를 기준으로 제7차 교과서의 문제점을 찾는 데만 주력하지는 않았다. 우리나라에서는 범자연수 지도에 모델을 어떻게 활용하는지를 기술적(descriptive)으로 분석하면서 동시에 현실적 수학교육의 상황을 좋은 기준으로 삼아 개선점을 모색하여 보았다.

다음에서는 분석 결과를 정리하고 현실적 수학교육의 모델 활용 내용을 토대로 논의와 제언을 한다.

첫째, 수 지도 시에 모델 활용 비율이 가장 높은 학년은 2, 3 학년이고, 그 다음이 1학년, 4학년 순으로 1학년에서는 구체물의 활용 비중이 높고 2, 3학년에서는 모델을 많이 활용하고 4학년부터는 모델을 적게 사용함을 알 수 있다. 여러 수학 학습 심리학 이론에서 볼 때 모델 활용의 비율은 학년에 따라 적절하다고 보여진다.

둘째, 범자연수 지도에 묶음 모델과 선형 모델이 사용되고 특히 묶음 모델에 의존하는 현상을 보이고 있다. 수 개념의 다양성과 구조의 중요성을 고려할 때 조합 모델을 도입하고 선형 모델을 활용을 확대할 필요가 있다.

현실적 수학교육에서 그 방안을 모색할 수 있다. Treffers는 개발적 연구를 통해 개발한 조합 모델이 20 이하의 수 개념, 수의 구조, 연산 학습에 효과적임을 밝혀내고 적극적으로 도입하여 활용하고 있다. 조합 모델의 특징과 활용 방법을 연구하여 우리나라의 실정에 맞도록 범자연수 지도에 활용되어야 할 것이다. 그리고, 선형 모델의 경우 네덜란드에서는 100이하의 수 학습에 구슬줄과 수직선을 함께 활용하고 학년이 올라가면서 10의 배수 수직선, 빈 수직선 등 학습 내용에 맞는 모델을 다양한 방법으로 활용하고 있다. 선형 모델의 구체적인 활용 내용과 방법에 대해서는 후속 연구가 필요하므로, 도입이 시급한 내용만을 지적하기로 한다. 제7차 교과서의 경우 4-가의 '일(십)의 자리에서 반

올림하기' 소주제에서만 수직선을 사용하고 있다. 어림은 다양한 문맥에서 현실에 맞게 이루어져야 하므로, 다양한 수 범위에서 어림을 할 수 있는 문제 상황과 함께 이를 잘 표현할 수 있는 반완전 수직선이나 빈 수직선이 유용할 것으로 생각된다. 또, 4-가 '큰 수' 단원에서는 문제 상황에서 돈을 다루기는 하지만, 구체적인 모델을 이용한 활동은 이루어지지 않는다. 학생들이 큰 수의 개념을 이해하고 상대적인 수의 크기와 구조를 파악하는데 수직선, 특히 빈 수직선의 활용을 제안한다.

셋째, 범자연수 학습 과정에서 모델의 역할을 분석한 결과, 모델은 실생활 문제 상황과 수학 사이의 매개체 역할, 학습의 출발점인 현실의 역할, 수학으로의 형식화에 보조 역할을 하고 있다. 즉, 수학 교수 학습 과정을 수학화 과정이라 본다면 전 수학화 과정에 관여되어 있다. 그러나, 학년이나 학습 내용에 따라 체계적으로 모델을 활용할 필요가 있다. 따라서 한 단원이나 하나의 영역 내에서 모델의 역할을 위계에 따라 정해야 하는지, 정해야 한다면 그 방법은 무엇인지에 관해서 후속 연구가 필요하다.

넷째, 1학년에서 4학년까지 범자연수의 지도에서 수의 크기, 수 세기와 관련된 내용에서는 묶음 모델(주로 수 모형)을 활용하고 있었으며, 수의 순서에서는 선형 모델(주로 수의 열)을 활용하고 있다. 또한 묶음 모델과 선형 모델을 연결지어 지도하는 등(<그림 12>) 개수와 셈수의 면에서 모델 활용은 잘 이루어지고 있다. 하지만 앞에서도 지적한 대로 측정수를 지도함에 있어서 선형 모델 특히 구슬줄과 수직선의 연결, 다양한 수직선을 이용한 활동이 보강되어야 할 것이다.

다섯째, 제7차 초등 교과서의 범자연수 지도에 활용되는 모델에는 1, 10, 100, …의 십진체계의 구조가 포함되어 있다. 아동의 비형식적인 계산 방식을 형식적 방식으로 연결을 돕는 구조화된 계산 단계가 필요하며 이는 수에 대한 다양한 구조를 익혀야 가능하다. 따라서 기존의 모델에 색이나 모양을 활용하여 5의 구조를 첨가시키고(예. <그림 1>, <그림 5>) 새로운 모델을 도입할 때 5의 구조를 포함(예. <그림 4>, <그림 8>) 시킬 뿐 아니라, 모델을 이용하여 지도할 때는 학생들이 다양한 수의 구조를 볼 수 있도록 모델과 수로 표현(예. <그림 3>, <그림 7>)하는 기회를 제공해야 할 것이다.

여섯째, 초등 수학 교육에서 범자연수의 지도와 모델의 활용은 매우 중요한 문제이다. 단순히 범자연수 지도에 적합한 모델을 도입한 활동지의 개발 뿐 아니라 모델을 활용하였을 때 학생들의 활동과 그 때의 개념 변화 분석, 모델을 활용한 교수 학습 중 교사-학생, 학생-학생의 상호작용 분석, 모델을 활용한 범자연수 개념 학습의 효과, 연산 학습과의 연계 방안 등의 연구가 후속되어 범자연수 학습에서 모델 활용 방안이 체계적으로 보완되어야 한다.

일곱째, 본 연구는 범자연수 영역에서 모델 활용에 관한 연구이다. 수학 학습에서 모델을 적절하게 활용하는 것은 매우 중요한 문제이다. 따라서, 다른 영역(예. 연산, 분수)에 대해서도 모델 활용의 실태 분석, 개선 방안 모색, 교수-학습 과정과 개념 형성 과정 분석에 관한 연구가 필요하다. 수학적 모델은 초등 수준에서 고등 수준까지 다양하다. 중등수학에서도 모델을 활용하게 되면 학생들의 수학 학습에 많은 도움을 줄 수 있다. 그러므로, 중등 수학에 대한 모델 활용에 관한 연구를 여러 가지 관점에서 행할 필요가 있다.

지금까지 범자연수 지도 상의 모델 활용 실태를 분석하여 개선 방안을 알아보았다. 수학적 모델은 학생의 수학 학습을 돕기 위한 보조 역할을 할 뿐 학생들의 이해를 보장하지는 않는다. 모델을 활용하여 수학 수업을 하거나 이와 관련된 연구를 수행할 때에는, 학생들이 주체가 되어 모델을 활용하여 진정으로 수학을 행하면서 수학적으로 사고하는 것이 목적임을 잊지 말아야 할 것이다.

참 고 문 헌

강지형 외 (2000). 초등수학교육. 서울: 동명사.

교육인적자원부 (2000). 수학 1-가, 1-나, 2-가, 3-가, 4-가, 4-나. 서울: 대한교과서 주식회사.

교육부 (1999). 초등학교 교육과정 해설(IV) -수학, 과학, 실과-. 서울: 대한교과서 주식회사.

배종수 (2002). 초등수학교육 내용지도법. 서울: 경문사.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht, The Netherlands: CD-β Press.

Treffers A. (2001a). Grade 1 (and 2) - Calculation up to 20. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Children learn mathematics* (pp.43-60). The Netherlands: Wolters-Noordhoff bv Groningen.

Treffers A. (2001b). Number and number relationship. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Children learn mathematics* (pp.101-120). The Netherlands: Wolters-Noordhoff bv Groningen.

Treffers A. & Buys K. (2001). Grade 2 (and 3)-Calculation up to 100. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Children learn mathematics* (pp.61-88). The Netherlands: Wolters- Noordhoff bv Groningen.

An analysis of models and manipulatives for teaching whole number concepts in textbooks

Kim, NamGyun

Cheongju National University of Educaion 135 Sugok-dong, Heungduk-gu, Cheonju, Chungbuk 361-712, Korea

ngkim@cje.ac.kr

Whole number concept is an important part of mathematics learning. Elementary school students should understand and master whole number concept. Models can help students learn whole number concepts. Realistic Mathematics Education in Netherlands had investigated and developed three different structural models: line model, group model, combination model. These models are related whole number concepts and structures closely and compatible.

The purpose of this study is to investigate models related with whole numbers in 7th elementary textbooks. As a result of analyses, we found out some pattern and several problems. On the foundation of the analyses, we discussed the better ways of using models in teaching whole number and the research issues concerning these.

* ZDM classification: F3

* MSC2000 classification: 97C90, 97U60