# 초등수학 학습에 있어서 표상에 관한 고찰1)

최창우 (대구교육대학교)

## I. 서론

말하기와 쓰기를 통한 의사소통이 수학의 교수와 학습에 있어서 핵심적인 중요한 역할을 함은 자명한 사실이다. 교사와 학생들은 서로 간에 의사소통을 통하여 수학에 관해 자신이 이해하고 있는 것, 생각하고 있는 것들을 표현하고 또한 상대방의 의견을 받아들인다. 그러나 의사소통을 통해 이와 같은 일련의 과정들이 일어나는 것은 사실이지만 여기에서 우리가 간과할 수 없는 중요한 요인 중에 하나는 의사소통과정에서 자신의 사고를 표현하기 위해 사용되어지는 표상방법의 선택이다.

대부분의 사람들은 표상(representation)이란 단어를 연상할 때 단지 아이들이 수학학습활동 중에 일어나는 여러 가지 일들을 되는대로 아무렇게나 기록해 놓은 것으로 생각하기 쉽다. 하지만 표상은 학교수학을 위한 원리와 규준에 제시된 다섯 가지 수학적인 과정(문제해결, 추론, 연결성, 의사소통, 표상) 중의 하나(NCTM, 2000)이며 그것은 또한 수학학습 활동 중에 일어나는 어떤 절차를 나타내는 것 이상으로 수학의 교수와 학습에 관한 한 방법으로 볼 수 있다. 뿐만 아니라 교사의 측면에서 보면 아이들이 해 놓은 표상을 통해서 수학에 관해 아이들이 어떻게 이해하고 사고하고 있는가를 꿰뚫어 볼 수 있는 중한 자료가 될 수 있다. 교사와 학생들은 자신들이 가르치거나 학습하는 수학내용의 주제에 관한 중요성에 관해서는 쉽게 인식하거나 공감하면서도 수학의 과정, 다시 말해 절차의 역할은 인식하고 이해하는데 있어 상대적으로 다소 소홀한 것 같다. 학생들은 문제 속에 내포되어있는 수학적인 내용을 모르고서는 물론이고 수학적인 절차나 혹은 알고리즘을 사용하지 않고서는 문제를 해결할 수 없다.

표상은 분명히 문제를 해결하는데 뿐만 아니라 자신들의 생각을 다른 사람과 더불어 공유하는 데에도 유용하게 쓰일 수 있다. 학생들은 주어진 문제를 해결하기 위하여 다양한 표상(이를테면, 마음속으로 수학을 생각하면서 음미해 본다거나, 언어, 몸짓, 인형극, 지필, 그림 등)들을 사용할 수 있으며 이들을 면밀히 검토해 보면 학생들의 문제에 대한 이해는 물론 사고에 대한 수단을 가늠해 볼 수 있는 척도가 될 수 있다. 비록 표상이 앞서 언급한 바와 같이 수학 학습에 있어 여러 가지 과정중의 한 가지 측면에 불과하지만 아이들이 주어진 문제를 분석하고 또한 해결하기 위한 방안을 찾게 해 주는데 있어 없어서는 안 될 필수적인 것임에 틀림없다.

이러한 맥락에서 본 연구에서는 첫째로, 표상은 일반적으로 무엇을 의미하는지, 표상의 중요성은 어디에 있으며, 초등학교의 실제 수학수업에서 표상은 어떠한 것인가를 살펴보고 둘째로, 대구교육대학교 영재교육원에서 대구・경북의 초등학교 5학년을 대상으로 1차, 2차는 필기시험, 3차는 실기 및 면접의 3차례에 걸친 선발과정을 거쳐 선발된 영재 40명(대구 20명, 경북 20명)을 대상으로 본 연구자가 수업을 실시하기 전 사전 인터넷 원격과제에서 나타난 영재들의 표상에 관한 생각을 분석하였으며 마지막으로 초등학교의 수학수업에서 학생들이 특별한 개념을 모델화 하거나, 탐구하거나, 더 잘 이해하기 위하여 학생들이 표상을 어떻게 사용하는가에 대한 몇 가지 예시를 탐색하였다.

---

* ZDM 분류: C52

* MSC2000 분류: 97D50

1) 이 논문은 2002년도 대구교육대학교 교내연구비 지원에 의하여 연구되었음

## II. 본론

### 1. 표상(representation)의 의미

교육과정과 교과과정을 때에 따라 서로 혼용하여 쓰듯이 표상이라는 말과 모델(model)이라는 용어도 사람에 따라 가끔씩 서로 혼용해서 쓰기도 한다. 하지만 엄밀한 의미에서 볼 때 두 가지 용어가 전적으로 같은 말은 아니다. 이를테면, 대부분의 사람들은 어떤 수학적인 개념을 표상(표현)하기 위하여 모델을 사용한다. 말하자면 어떤 의미에서 모델은 표상을 위한 필요조건이 되는 셈이다. 이 처럼 두 가지 용어가 서로 애매모호한 이유는 이들 두 용어는 몇 가지 서로 다른 의미도 가지고 있지만 또 한편으로는 어떤 의미에서 서로 공통점도 있기 때문이다.

표상이라는 용어는 과정과 결과(product) 양쪽 모두에 관련된다고 할 수 있다. 다시 말해, 어떤 형태로 수학적인 개념이나 혹은 관계를 획득하는 행위와도 관련됨은 물론 형식 그 자체와도 관련된다. 더욱 나아가, 표상은 수학을 행하는 인간의 마음속에서 내적으로 일어나는 과정 및 결과는 물론이고 외적으로 관찰할 수 있는 것에도 적용된다. 표상은 정적 산물이라기보다 이를 통하여 학습자가 수학적인 개념이나 관계를 구성하는 과정을 얻을 수 있게 해주는 것이기도 하다. 표상은 수학을 기록하고, 생각하고, 어느 정도 시간이 지난 후에는 자신들의 생각과 과정을 상기하도록 해준다.

대부분의 사람들은 어떤 상황을 표상 한다는 것이 어떤 의미인지에 대한 나름대로의 직관적인 생각을 가지고 있으며 우리가 수학을 가르치고 수학을 행할 때면 항상 하는 활동이 바로 이 표상 활동이다. 학교수학을 위한 원리와 규준(NCTM, 2000)에서는 수학 수업 프로그램은 수학에 대한 이해를 촉진시켜서 모든 학생들이 다음과 같이 할 수 있도록 수학적 표상을 강조해야 한다고 주장하고 있다.

· 수학적 아이디어를 조직하고, 기록하고 의사소통할 수 있는 여러 가지 표상들을 창조하고 사용하기

· 의도에 맞게 유연하고도 적절하게 사용될 수 있는 수학적 표상들의 레퍼토리를 개발하기

· 여러 가지 표상들을 사용해서 물리적, 사회적, 수학적 현상들을 모델링하고 해석하기

학생들이 어떤 문제나 수학적인 상황을 자신들에게 의미 있고 알기 쉬운 방식으로 표현할 수만 있다면 그러한 문제나 혹은 상황은 훨씬 더 접근이 용이해진다. 따라서 그림, 구체 물, 식 등과 같은 표상을 사용하면 학습자가 자신들의 사고를 조직하는데 도움이 될 뿐만 아니라 아울러 보다 분명한 이해나 해결 방안으로 나아갈 수 있는 다양한 방안을 시도할 수가 있다.

이러한 개개인의 생각을 나타내주는 학생들의 사고와 표상은 단순한 하나의 개념을 묘사하는데 있어서 조차도 상당히 다양할 수 있다. 어떤 사람은 수학적인 개념이나 혹은 문제에 관한 자신의 생각을 구두로 묘사할 수도 있고 또 어떤 사람은 십진 블록으로 그것을 모델화 할 수도 있으며, 또 어떤 사람은 문제에 대한 자신의 이해와 해결방안을 나타내주는 그림을 그릴수도 있으며 요즘 같은 정보화 시대에는 그러한 문제를 표현하고 해결하는데 있어서 컴퓨터를 가지고 어떤 조작을 해보는 것도 당연히 있을 수 있다. 컴퓨터를 이용한 표상은 기존의 컴퓨터 소프트웨어에 있는 기하학적인 도형의 형태일수도 있고 아니면 학생들이 직접 조작하여 그런 형태일 수도 있다. 이처럼 곰곰이 생각해보면 우리는 자신도 모르는 사이에 특히 수학교과와 관련하여 언제나 표상을 사용하고 있음을 알 수 있다.

4학년 학생과 교사가 주고받는 아래의 대화는 표상에 관한 또 다른 중요한 점, 즉, 구체적인 표상처럼 수에 관한 표상도 학생들의 사고를 표현해 주는 것이어야 한다는 점을 설명해 주고 있다(Francis Fennell and Tom Rowan, 2001).

교사: 철수야, 여기 파티를 하기 위해 각각이 8조각으로 잘라져있는 두 판의 피자가 있다. 그 중에 하나는 일곱 조각을 이미 먹은 상태라면 남은 피자는 얼마일까요?
철수: 여덟 조각 중 한 조각 남았습니다.
교사: 숫자로 쓸 수 있어요?
철수: 예, $\frac{1}{8}$이라고 쓴다.
교사: 그 중에 하나는 세 조각을 이미 먹은 상태라면 남은 피자는 얼마일까요?
철수: 여덟 조각 중 다섯 조각이 남았습니다.
교사: 숫자로 쓸 수 있어요? 철수는 $\frac{5}{8}$라고 쓴다. 철수야, 만약에 두 판의 피자를 동시에 생각한다면 남은 피자는 어떻게 될까요?

철수: 여덟 조각 중 여섯 조각입니다

교사: 숫자로 쓸 수 있을까요? 철수는 $\frac{6}{8}$이라고 쓴다. 철수야, 자네가 방금 했던 것을 숫자로 된 문장으로 써서 보여줄 수 있을까요? 원한다면, 이미 사용했든 숫자를 사용해도 상관은 없네. 철수는 자신이 이미 사용했든 숫자들 사이에 더하기 기호와 등호 기호를 넣고 아울러 $\frac{6}{8}$에서의 8을 $\frac{6}{16}$으로 바꾸어 $\frac{1}{8}+\frac{5}{8}=\frac{6}{16}$이라고 쓴다.

교사: 그렇다면 답이 어떻게 될 까요?

철수: 전체 열여섯 조각 중 여섯 조각입니다

교사: 그렇다면 조금 전에 말한 것 과 다르다는 말인가요?

철수: 예, 이것은 두 분수를 더해서 얻은 답입니다

학생들은 자신의 반응을 보일 때 의미 없는 반응을 보이는 경우가 거의 없다(Ginsberg, 1977, Labinowics, 1985, 전평국 2001에서 재인용). 학생의 대답은 나름대로 개인적 관점의 입장에서 또는 자신이 접한 상황을 이해하기 위하여, 흔히 사용하고 있는 지식의 입장에서 의미를 만들려는 경향이 있으며, 자신들이 알고 있는 수준에서의 반응 또는 대답이 결과적으로 잘못될지언정 결코 잘못되었다고 생각하지 않는다.

반드시 그렇다고 단언할 수는 없지만, 위의 교사와 학생의 대화에서 철수가 분수의 덧셈에 있어서 이와 같은 실수를 저지른 것은 철수가 사용했던 수 및 기호가 자신의 사고에 대한 표상이 아니었기 때문일 것이다. 아이들이 쓰는 숫자의 대부분은 자신들이 당면한 문제에 대해 곰곰이 생각한 사고에 관한 표상임에 틀림없다는 사실을 우리는 언제나 명심해야 한다.

## 2. 표상의 중요성

수학에 있어 표상에 관한 지식은 수학의 내용에 관한 지식이상으로 광범위하며 이는 교과에 관한 이해는 물론이고 교과에 관한 내용을 학습자가 쉽게 이해할 수 있는 형태로 바꾸어 주는 역할을 하는 것으로도 묘사될 수 있다. Fennema & Franke(1992)는 수학은 학생들이 가지고 있는 지식과 새로이 학습하고자하는 지식 사이의 관계를 학습자가 알 수 있도록 표상될 필요성이 있다고 주장하였다. 실제로 일선현장에서 7차 교육과정에서 강조하고 있는 실세계의 상황이나 구체물의 사용과 같은 것은 교과에 관한 이해와 관련하여 학습자의 학습을 도와주기 위한 수단으로 교사가 흔히 사용하는 두 가지 일상적인 표상으로 간주될 수 있다. Shulman(1986)은 이와 같은 형태의 지식을 이름 하여 "교수학적내용지식(pedagogical content knowledge)"이라는 용어를 사용하였는데 그의 이와 같은 정의 이면에는 특정한 주제와 관련한 학습을 하는데 있어 어떤 요인들이 학습을 쉽게 혹은 어렵게 하는가에 관한 교사의 지식과 관련된 내용도 내포되어있다.

1980년대의 수학교육의 흐름이 문제해결, 반힐레 부부의 수학학습 수준이론이라면 1990년대의 수학교육의 방향을 선도한 것은 규준과 구성주의라 할 수 있다. 잘 알려진 바와 같이 표상은 최근의 학교 수학을 위한 원리와 규준에 나타나있는 10가지 규준중의 하나이다(NCTM 2000). 이 규준의 정의에서는, 학생들이 "문제 해결을 위해 수학적 표상을 선택하고, 적용하고, 그리고 해석 한다" 라고 되어있다. 문제의 표상은 문제해결의 첫 번째 과정으로 문제 자체가 요구하는 바를 정확히 파악하고 이해하는 과정임에 틀림없다. 이것은 달리해석하면 학습자가 문제에서 관련 정보를 찾아내고 관련되지 않은 요소는 도외시해버리는 과정으로도 볼 수 있으며 이러한 과정에서 학습자는 자기 나름대로의 선택적 지각을 하여야 한다. 이를테면, 수학에서 문 장제(word problem)를 잘 표상하기 위해서는 그러한 문장제가 내포하고 있는 진의를 이해할 수 있는 언어적 지식이 필요할 뿐만 아니라 문장 전체를 총체적으로 바라볼 수 있는 수학적인 힘도 또한 필요하다 하겠다. 결과적으로 어떤 문제를 잘 해결하느냐 그렇지 않느냐는 주어진 문제를 잘 이해하고 음미하여 그것을 어떻게 잘 표상 하는가에 달려있다고 해도 과언이 아니다. 대체적으로 다음과 같은 몇 가지 점에서 표상은 그 중요한 의의를 가진다고 요약해 볼 수 있다.

① 표상은 사고를 위한 강력한 도구가 될 수 있다. 다시 말하면, 표상은 반성(reflection)을 위한 보다 구체적이고 이용 가능한 수학적 아이디어를 만들어 낸다. 표상은 학생들이 수학적인 상황의 본질적인 특성에 집중하도록 도와줌으로서 학습자들의 추론을 도와주는 동시에 확장하게 해준다.

② 표상은 학생들이 서로 다른 상황에 대한 공통된 수학적인 요인들을 인식하도록 도와준다.

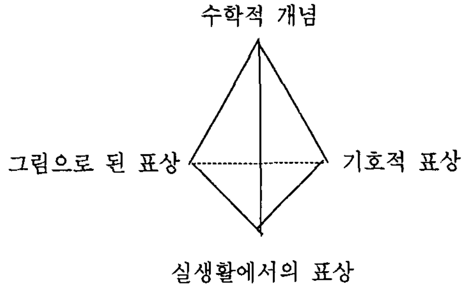
③ 학생들이 동일한 개념에 대한 서로 다른 표상사이에 이해를 전이시킬 수 있을 때 수학적인 개념 이나 절차를 이해하고 사용하는 것이 더욱더 증대될 수 있으며 스스로 다양한 표상을 개발하고 사용할 필요가 있다

④ 표상을 지도함에 있어 그 자체로서의 어떤 특별한 목적을 염두에 두고 이와 같은 형태를 지도하는 것은 바람직하지 못하다

⑤ 표상은 학습자가 이해를 형성하는데, 정보를 서로 의사소통 하는데, 추론을 입증하는데 유용한 도구가 될 수 있다(Greeno and Hall 1997).

### 3. 초등수학에서 표상의 실제

학생들이 수학의 문제 상황을 이해하도록 도와줄 수 있는 방법 중에 하나는 수학의 개념에 대해 풍부한 다양한 표상이 나올 수 있는 맥락 화된 문제들을 학생들에게 제공하는 것이다. 지금까지의 선행연구로부터 결과는 같으면서도 결과에 이르는 과정이 다르거나 과정은 유사하면서도 결과는 서로 다른 것이 얼마든지 있을 수 있다는 것을 우리는 보아왔다. 이는 곧 똑같은 문제라도 학습자의 사고는 천차만별로 다양하게 나타날 수 있으며 한결같이 똑같은 방식으로 표상 되는 것은 아님을 의미한다. 주어진 문제에서 관련되지 않는 정보를 잘 구별해 내는 학습자는 이러한 정보를 잘 식별하여 손쉽게 자신이 추구하고자 하는 목표에 쉽게 도달하지만 그렇지 못한 학습자는 상대적으로 여러 가지 불필요한 표상의 시행착오를 겪은 후에야 비로소 목표에 도달할 수 있게 된다. 수학의 개념에 관해 학습자가 서로 다른 표상들을 자유자재로 사용할 수 있을 때 수학을 직관적으로 보는 눈과 함께 계산적인 것은 물론 개념적인 지식을 발달시킬 수 있는 기회가 부여되는 셈이다. 이를테면, 초등학교 저학년에서 100원짜리 동전 3개와 10원 짜리 동전 6개가 그림으로 주어져 있다면 그 합을 구하기 위해 학생들은 그것을 문장제 문제로 바꾸어 제시할 수 있어야하고 수식(기호적 표상)으로도 나타낼 수 있어야 한다. 이렇게 될 때 비로소 주어진 문제의 연산에 관한 개념적 지식이 형성되었다고 볼 수 있다. 이를 도식화하면 아래와 같다




<그림 1> 개념적 지식간의 연결성

교실에서, 수학 문제를 학생들이 이해하고 해결하는데 영향을 미치는 표상에는 크게 두 가지 유형이 있다: (1) 학생들에게 지식을 전수하는데 교사가 사용하는 교수적인 표상, 이를테면, 설명, 예제, 모델 등이 여기에 속한다고 볼 수 있으며 나머지 하나는 (2) 수학에 관한 개념을 이해하기 위해 시도하거나 문제를 해결하기 위해 시도하는 표상으로 학생들 자신이 구성하는 인지적 표상이 그것이다. 첫 번째 표상은 학습자의 외부에 있고(즉, 교사와 학습자 사이에 의사소통으로 공유하는 것), 반면에 두 번째는 학습자의 내부에 있으며 다른 사람들과 공유되지 않을 수도 있다(NCTM, 2001 Yearbook).

아래의 몇 가지 예시들 중 예시1은 2002년도 전 학기 대구교육대학교 영재교육원에서 대구・경북의 초등학교 5학년을 대상으로 1차, 2차는 필기시험, 3차는 실기 및 면접의 3차례에 걸친 선발과정을 거쳐 선발된 영재 40명(대구 20명, 경북 20명)을 대상으로 본 연구자가 수업을 실시하기 전 사전 인터넷 원격과제에서 나타난 영재들의 생각을 분석한 것이고, 예시2는 실제 초등학교현장에서 학기 중 중간평가를 하면서 실생활의 피자문제와 관련한 수학문제를 두고 현장 선생님들간에 의견이 분분했던 표상에 관한 사고의 일면을 보여주고 있으며, 나머지는 초등학교의 수학수업에서 학생들이 특별한 개념을 모델화 하거나, 탐구하거나, 더 잘 이해하기 위하여 아이들이 표상을 어떻게 사용하는가와 교사가 그러한 표상들로부터 학생들의 사고에 관해 어떤 것을 배울 수 있는가를 고찰해 보는데 있다.

예시 1. 어린이들이 문제해결에서 즐겨 사용하는 표상

원격과제: 여러분들이 수학시간에 문제를 해결하기 위하여 주로 어떤 방법(표상)을 즐겨 사용하는 지를 소개하고 그 이유를 간단히 말해 보시오

이와 같은 물음에 대해 대구·경북의 영재 40명의 반응을 분석해 본 결과는 대체로 다음과 같았다.

어린이들이 즐겨 사용하는 표상(해결방안)의 유형

· 문제에 대한 요점을 글로 정리하여 문제를 해결한다.
  이유: 문제의 힌트가 문제에 다 나와 있으므로 요점을 정리하여 풀면 꼭 풀 수 있기 때문이다.
· 주어진 문제를 간단하게 만들어서 해결한다
  이유: 이렇게 하면 한눈에 요점이 보이고, 규칙을 찾기가 쉽기 때문이다
· 표를 만들거나 그림을 그리거나 하여 해결한다.
  이유: 이러한 방식으로 풀면 비교적 정리가 잘되게 문제를 풀 수 있어서 혼돈 이 되지 않는다. 특히 표를 만들어 풀면 하나하나 따져서 풀어가기 때문에 시간은 더 걸려도 검산을 안 해도 될 만큼 확실하게 할 수 있기 때문이다.
· 원리를 바탕으로 해서 공식과 규칙으로 문제를 푼다.
  이유: 한번 외워두면 비슷한 문제가 나올 때마다 쉽게 풀 수 있고, 복잡하지 않기 때문이다. 공식을 사용하지 않고 문제를 풀면 참으로 불편하다. 구구단이 필요할 때 구구단이 없다면 10×10을 100 이라 쉽게 알 수 없고 10을 직접 10번 더 해 보아야 100이라는 것을 알 수 있습니다. 또 각기둥에서 꼭지점의 수, 면의 수, 모서리의 수 등을 계산하는 공식이 없다면 아마 직접 하나, 둘, 셋, 넷, … 과 같이 모두 헤아려야 합니다. 그러다 지쳐 버리게 되고, 많은 시간이 걸리게 되어 불편할 것입니다. 이렇듯 공식이 없으면 쉽게 문제를 풀 수 없고, 시간이 많이 걸리게 되므로 저는 문제에 알맞은 공식과 규칙을 찾아내어 문제를 풉니다.
· 문제에 따라 여러 가지 방법으로 푼다.
  도형문제는 보조선을 그어가며 푼다.
  그래프문제는 대응 표를 만들어 생각 한다
  도형문제, 그래프 문제를 제외한 나머지 문제는 조건에 맞게 차례대로 식을 써가며 푼다.
· 문제를 풀기보다는 수학을 가지고 놀아요. 먼저 어떤 방법으로 풀 수 있을 까 생각한 뒤 그 문제에 대한 식을 세워요. 그리고 표를 만들기도 하고 직접 해보기도 해요. 그리고는 답을 적고 마지막으로 검산을 해요.
· 문제를 읽고 중요한 부분, 문제에서 요구하는 것을 밑줄 또는 동그라미를 하고, 문제에서 주어진 것을 하나하나 차례대로 정리하여 응용하여 문제를 해결한다.

⋮

(이하생략)

아래의 예시2는 앞 절의 본론 1. 표상의 의미에서 Francis Fennell 과 Tom Rowan 이 4학년 학생과 교사가 주고받는 대화에서 보여주었던 표상에 관한 잘못된 사고가 때로는 아이들을 가르치는 일선 현장의 교사에게서도 일어나고 있음을 보여주고 있다.

예시 2. 피자 두 판을 각각 똑같이 4조각으로 잘라 형은 3조각을 먹고, 동생은 2조각을 먹었다. 형과 동생이 먹은 피자의 양은 모두 얼마인가?

현장 교사의 말에 의하면 이 문제에 관한 설명으로 교사용지도서도 설명이 제각각 이라는 것이다. 또한 동료 교사들 간에도 $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}$로 나타내어야(표상해야)한다는 교사가 있는가하면 $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$로 나타내어야 한다는 의견이 팽팽히 서로 맞서 있었다는 것이다.

이러한 문제에 부딪혔을 때 문제는 기준량을 어떻게 보는가에 따라 상황은 달라진다. 현장 선생님들 간에 의견이 분분한 주 원인도 여기에 기인한다고 볼 수

있다. 그러나 일반적으로 분수의 계산에서 피자 두 판이라 했을 때 한판을 기준량(1)으로 보아야하며 똑 같이 각각을 4조각으로 나누었더라도 한 조각은 $\frac{1}{4}$ 이지 $\frac{1}{8}$ 로 의미를 부여해서는 곤란할 것이다. 교사들 간에도 의견이 제각각이었던 주된 이유는 아마도 이와 같은 기준량에 관한 관점의 차이에서 오는 문제로 보여진다. 이 예에서 보는 것처럼 수학학습에서 주어진 문제 상황의 의미를 잘 표상 할 수만 있다면 그 만큼 학습자에게 있어 문제해결은 더욱더 용이해지게 됨을 알 수 있다.

예시 3. 어린이들이 생각하는 등호( = , equality sign)에 관한 표상

어른들이 사용하고 어른들이 보기에는 당연하게 여겨지는 표상들도 어린이들은 이해하지 못하는 경우가 종종 있다. 그 대표적인 예가 등호(=)기호이다. 지난 수십 년 동안 이와 관련한 우리 수학교과서를 살펴보면 전형적으로 등호기호는 언제나 어김없이 연산기호 다음에 오는 경우가 대부분이었다. 이를테면, 68 = 23 + 45 으로 표현되는 경우보다는 지금까지의 교과서는 23 + 45 = 68 로 표현되는 경우가 그 대표적인 예이다. 이처럼 등호가 놓이는 위치는 많은 어린이들에게 '=' 에 대한 오해를 불러일으키는 주원인이 되고 있다(Falkner et al.1999).

어린이들은 대체적으로 등호를 "계산을 실행하시오" 로 생각하거나 혹은 "그 다음에 계산한 답을 쓰시오" 라는 표시로 생각하는 것으로 보인다. 따라서 초등학교 저학년 어린이들에게 8 + 3 = __ + 4 라는 문제에서 밑줄 친 곳에 들어갈 수로 상당수의 어린이들이 11이라고 생각할 뿐만 아니라 심지어 8 + 3 = <u>11</u> + 4 = 15 와 같이 원래 문제에도 없는 등호까지 붙여 15 라고 생각하는 어린이도 종종 있다.

이것은 비록 어린이들에게만 국한되는 이야기는 아니다. 본 연구자가 2003년 1년간 뉴질랜드 오클랜드 교육대학교에서 연구교수로 있으면서 이곳에서 이루어지고 있는 예비교사교육에 직접 참여하여 본 결과 심지어 상당수의 예비교사들 조차도 이따금씩 무의식적으로 이와 같이 표상하고 있었음을 관찰 할 수 있었다. 이와 같은 오 개념은 국경을 초월하여 학습자의 사고가 앞서처럼 등호가 "계산을 실행하시오" 혹은 "그 다음에 계산한 답을 쓰시오" 와 같이 생각하는데도 문제가 있지만 그렇게 된 근본적인 배경에는 뉴질랜드의 초등학교에서 사용되고 있는 텍스트[2)]나 현행 초등학교에서 사용되고 있는 우리나라의 국정 수학교과서가 한결같이 계산한 결과를 등호 다음에 쓰는 형식의 문제가 주를 이루는 것도 아이들의 사고를 이와 같이 편협되게 하는 원인 중에 하나라고 생각된다. 이와 같은 편협 적인 사고는 자칫 식과 등식에 관한 보다 복잡한 사고를 요하는 상급 학년의 수학에 상당한 지장을 초래 할 수도 있다. 기호는 학습자의 수학적인 사고를 대신 나타내 주는 것으로 볼 수 있으므로 교사는 학생들의 사고에 민감하게 대처해야하며 학생들이 이들 기호를 올바르게 해석하도록 하기 위해 학생들과 함께 활동해야만 한다.

이와 같은 현행교과서의 불합리성을 보완하고 아이들의 그릇된 사고를 줄이는 대안적인 방안으로 수업중에 아래와 같은 몇 가지 제안들을 병행한다면 아이들의 등호기호에 관한 편협적인 사고는 상당히 개선될 것으로 여겨진다.

· 주어진 수들을 다시 고쳐 써 보시오

① 50 = ___ + ___

② 48 = 40 + 8 = 35 + 13

· 같은 수끼리 서로 연결하여 보시오

| | |
|---|---|
| 4 + 2 | 2 + 0 |
| 3 + 5 | 1 + 2 |
| 1 + 4 | 3 + 3 |
| 7 + 2 | 2 + 5 |

2) 뉴질랜드는 국정교과서가 따로 없으므로 초등학교에서 우리의 국정교과서를 대신하여 주로 사용되고 있는 텍스트 및 자료(Resources)들을 열거하여 보면 대체로 아래와 같다
Beginning School Mathematics, Numeracy Development Project, Pearson Series, mathematics Matters, National Curriculum Mathematics, Rigby Mathematics, *Figure it out, Connect 3, School Mathematics Class Sets, Math Development Bond Certificate* 등이 있다. 이 중에서 이탤릭체로 표시된 것은 자료를 나타냄

| | |
|---|---|
| 3 + 0 | 2 + 2 |
| 1 + 1 | 4 + 4 |
| 1 + 3 | 3 + 6 |

· 퀴즈네르 막대의 활용

소그룹 혹은 전체 활동으로 두 개의 막대를 결합하여 주어진 퀴즈네르 막대의 길이와 똑같은 길이를 만들어 보는 활동을 하면서 그 결과를 식으로 표상 하여 보는 활동, 이를테면 8 = 1 + 7 = 5 + 3 = 2 + 6 = 4 + 4 = ⋯

이와 같은 생각은 가로 셈 뿐 만 아니라 세로 셈 형식으로 표상 했을 때나 계산기에서도 역시 마찬가지인데 왜냐하면 세로 셈에서는 아래에 있는 숫자 밑에 있는 가로줄이 답을 찾으라는 어떤 표상으로 대부분 생각하기 때문이다. 따라서 어린이들에게는 하나의 수를 다른 여러 가지 표상으로 나타낼 수도 있다는 개념을 강화시켜줄 필요가 있으며 이를 위해 위와 같은 활동뿐만 아니라 두 개 이상의 수와 아울러 한 개 혹은 그 이상의 연산을 사용하여 주어진 수를 다양한 서로 다른 방식으로 나타내 보게 하는 활동 또한 상당한 도움이 될 것으로 판단된다. 어린이들이 등호가 두 양 사이에 상등관계를 묘사한다는 것을 인식하는 것은 개인에 따라 상당한 차이가 있겠지만 최소한도 그와 같은 의미를 깨닫고 나서야 비로소 단지 수로서만이 아닌 양과 연산에 관한 자기 나름대로의 추론에 몰두할 수 있을 것으로 생각된다.

예시 4. 둘레와 넓이에 대한 표상

어린이들은 중학년에서조차도 둘레와 넓이에 대한 개념을 학습하는데 상당한 어려움을 가지고 있는 것이 사실이다. 둘레와 넓이는 항상 함께 학습되기 때문에 아이들이 흔히 혼동하기도 한다.

이를테면, 둘레가 28인 여러 가지 모양의 직사각형을 생각해보자. 어린이들은 둘레는 28로 똑같지만 이와 같은 직사각형들의 넓이는 제각기 다르다는 사실을 주목할 수 있다. 이와 같은 사고의 중요한 핵심은 등호를 사용하여 둘레 28을 여러 가지 서로 다른 문장으로 표상 해 봄으로서 알 수 있다. 이를테면, 28 = 4 + 10 + 4 + 10, 28 = 7 + 7 + 7 + 7 , 28 = 5 + 9 + 5 + 9, 28 = 6 + 8 + 6 + 8 등이다. 따라서 둘레는 28로 똑 같지만 이와 같은 직사각형의 모양은 가로가 10, 세로가 4 인 직사각형, 가로 세로가 똑같이 7인 정사각형으로서의 직사각형, 가로가 9, 세로가 5인 직사각형, 가로가 8, 세로가 6인 직사각형 등으로 다양하게 나타난다는 사실을 이와 같은 등호를 사용한 표상을 통해서 학습자들은 인식할 수 있으며 이러한 직사각형들의 넓이 또한 제각기 다르다는 사실을 학습자 스스로 쉽게 인식할 수 있다(최창우, 2001).

예시 5. 다이어그램을 사용한 표상

다이어그램을 읽고 그리는 능력은 학습자의 수학발달에 있어서 필수적인 구성요소이다. 다이어그램이 수학교실에서 학습자에게 효율적으로 사용되어질 수 있는 도구가 되기 위해서는 어떤 식으로든 학습자에 대한 교사의 사전 주의가 반드시 필요하며 이는 공간적인 배열을 적절히 함으로서 정보를 표현하는 하나의 시각적인 표상으로 볼 수 있다. 특히 문제해결에서, 다이어그램은 문제의 구조를 "푸는 것" 과 문제의 해결을 위한 단초를 제공할 수 있다. 그러나 모든 학습자에게 이와 같은 표상이 다 효율적인 것은 아니며 학습자에 따라 효과적으로 사용하는 사람도 있고 또 어떤 사람은 사용을 꺼리는 경우도 있다. 아래의 문제는 실제로 이 문제를 해결하는 어떤 특별한 공식이 있는 것도 아니고 일반적인 목적의 다이어그램을 적절히 사용하면 쉽게 해결될 수 있는 문제의 전형적인 보기이다

보기. 철수, 영희, 진영이 그리고 영찬이는 학교의 관현악단에 속해 있다. 그들 중에 한 사람은 트럼펫을 연주하고, 한 사람은 바이올린, 한 사람은 비올라, 그리고 한 사람은 드럼을 연주한다. 영희는 트럼펫을 연주한다. 철수의 친구는 비올라를 연주한다. 진영이 와 영찬 이는 바이올린을 연주하지 않는다. 영찬이는 드럼을 좋아하지 않으며 드럼을 결코 연주하지 않는다면 누가 각각의 악기를 연주하는가?

이와 같은 문제에서 누가 각각의 악기를 연주하는가를 알아보기 위해 가로줄(행)에 악기이름, 세로줄(열)에 철수, 영희, 진영, 영찬이의 이름을 차례로 써놓

은 행렬형태의 아래그림을 만들어보면 문제 해결 자가 이와 같은 표의 다이어그램을 통해 주어진 문제에서의 알려진 정보는 그대로 유지하면서 함축적인 정보를 명확하게 할 수 있기 때문에 쉽게 추론이 가능하게 된다.

| | 비올라 | 바이올린 | 트럼펫 | 드럼 |
|---|---|---|---|---|
| 철수 | | | | |
| 영희 | | | | |
| 진영 | | | | |
| 영찬 | | | | |

<그림 2> 다이어그램을 사용한 표상

다이어그램을 읽고 그리는 능력은 학생의 수학 발달에 있어 필수적인 구성요소이다(NCTM 2000). 따라서 일선 현장교사, 교육과정집필자, 그리고 교육자들은 다이어그램이 아이들의 사고 및 문제해결을 위한 효과적인 도구가 될 수 있도록 각별한 주의를 기울여야 할 필요성이 요구되어 진다고 여겨진다.

예시 6. 모델을 사용한 표상

개념을 표상하기위해 모델을 사용할 수 있다. 노란색 육각형 모양의 블록이 1을 나타낸다고 가정할 때 이 블록을 이용하여 분수 1/2, 1/3, 1/6, 2/3 등을 표상하는 문제를 생각해보자. 이를테면, 1개의 사다리꼴 블록이나 3개의 삼각블록을 이용하여 1/2을 표상할 수 있으며 다양한 블록 또는 블록의 조합으로 전체 1을 나타낼 수도 있다. 이러한 상황에서, 주어진 전체의 부분을 일관되게 보여주는 학생은 영역의 부분으로서의 분수의 개념을 잘 이해하고 있는 것이 된다. 학생들은 개별적으로 또는 소집단이나 대집단별로, 또는 특정한 분수를 나타내는 블록을 선택하는 선다형 문항을 사용하여 이러한 활동을 할 수 있다(구광조외, 1994).

예시 7. 두 수 사이의 관계(대응 표)를 사용한 표상

7차 초등학교 수학교과서 4-나( p.106 - p.108) 에서는 미술시간에 색 테이프를 가위로 자를 때 자른 횟수와 색 테이프 도막의 수, 형의 나이와 동생의 나이 사이의 관계, 대응 표를 보고, □ 와 △ 사이의 관계를 알아보도록 하고 있다. 초등수학에서는 함수 그 자체를 가르치는데 그 목적이 있는 것이 아니라 함수적인 사고를 기르는데 주안점을 두고 있으므로 교과서에서의 표현은 이러하지만 이는 사실상의 함수개념을 나타내고 있는 것으로 따라서 변하는 두 양의 관계를 대응 표를 사용하여 표상한 것으로 볼 수 있다.

이것을 좀더 상위 개념에서 조망해 보면 두 수 사이의 관계는 꼭 이처럼 대응 표 뿐 만아니라 그래프, 순서쌍 그리고 대수식 등으로도 얼마든지 표현이 가능하다. 문제는 학생들이 이러한 여러 가지 표상들이 서로 동치라는 사실을 인식하지 못한다는데 있다. 대부분의 상급 학년의 학생들도 함수를 표현하는 방법이 오로지 식으로 표현되었을 때만 함수로 인정하려는 경향이 있는 것처럼 보인다. 따라서 일선 현장의 선생님들은 동일한 개념도 여러 가지 표상을 사용할 수 있다는 것과 학생들이 다양한 표상들 사이의 관계를 인식할 수 있도록 지도가 요망된다.

이상에서 우리는 표상은 일반적으로 무엇을 의미하는지, 초등학교의 수학 특히 문제해결과 관련하여 표상은 왜 중요하며 초등학교의 실제 수학수업에서 아이들은 자신들의 수학적인 사고를 대체로 어떻게 표상하는지에 관해 고찰해 보았다. 이것으로부터 얻은 몇 가지 시사점은 아래와 같다

## III. 맺음 말

우리는 무심코 지나쳐 버리지만 가만히 생각해 보면 수학을 가르치고 수학을 행할 때 언제나 사용하고 있는 활동 중의 하나가 바로 이 표상활동이다. 수학에 관해서 어린이들이 창의적이고 또한 비판적인 생각을 갖도록 하려면 무엇보다도 우선 이러한 수학적인 표상을 사용하여 자신들의 과제를 해결해보게 하는 충분한 시간을 주어야 할 것이다. 이러한 의미에서 궁극적으로 보면 표상은 수학적 사고를 위한 하나의 도구임에

틀림없다. 학습자의 측면에서 개개인들은 여러 가지 아이디어와 관계를 이해하는 수단으로 학습 중에 스스로 나름대로의 독특한 표상들을 사용하며 이러한 것들이 하나둘씩 모여 문제해결과 의사소통의 강력한 힘이 되는 것이다.

한편 교사의 측면으로 보면 학생들에게 수학에 관한 개념을 분명하게 해주기 위한 수단으로, 학생들의 수학에 관한 사고에 가까이 다가갈 수 있는 수단으로, 아니면 수학의 개념에 관해 학생들이 지식을 얻도록 하기 위해 심적 혹은 육체적으로 조작할 수 있는 형태로 전환시키는데 있어서 학습자를 도와주기위한 수단으로 표상을 사용할 수 있다. 따라서 표상은 수학을 모델화하고 학생들이 수학에 관해 자신들의 사고를 보여주기 위한 하나의 방법으로서 교수와 학습 모두를 위해 필수 불가결한 요소인 동시에 과정이라 볼 수 있다.

1980년대를 대표하는 수학교육의 흐름이 문제해결이고 1990년대를 대표하는 수학교육의 흐름이 규준과 구성주의라지만 문제해결은 여전히 오늘날에도 학교수학의 핵심이라 해도 과언이 아니며 훌륭한 문제해결의 결정적인 단초가 될 수 있는 것 중의 하나가 바로 표상이 아닌가 생각된다. 따라서 일선 현장에서 아이들을 지도하는 교사는 수학에서 공식위주나 암기위주의 결과 중심적인 교수·학습 방법을 지양하고 아이들이 어떤 수학적인 문제에 직면했을 때 그러한 문제 상황을 잘 표상 하게 해봄으로서 때로는 동일한 개념도 여러 가지 표상으로 나타낼 수 있다는 것과 학생들이 다양한 표상들 사이의 관계를 인식할 수 있도록 문제 상황에 보다 더 친근하게 접근 할 수 있는 지도 방안이 절실히 요구되어 진다고 생각된다.

## 참 고 문 헌


구광조 외 (1994). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 경문사.

전평국 (2001). 개방형 문제를 통한 창의성 개발과 측정, 제25회 초등수학교육과 교육 세미나, 한국 초등수학교육연구회.

최창우 (2001). 대수적인 관점에서의 수와 연산, 한국수학 교육학회지 시리즈 E, **제 11집**, 71-83.

Falkner, Karen P., Linda Levi, and Thomas P. Carpenter (1999). "Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra." *Teaching Children Mathematics* **6**: 232-236.

Fennema, E. & Franke, M.L., (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D.Grouws(Ed). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, New york: Macmillan Publishing Company, 147-164.

Francis Fennell and Tom Rowan (2001). Representation: An Important Process for Teaching and Learning Mathematics, *Teaching Children Mathematics* **7**, Number 5, 288-292.

Greeno, James G. and Roger B. Hall (1997) "Practicing Representation: Learning with and about Representational Forms." *Phi Delta Kappan* **79**, 361-67

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA.*

__________ (2001). *The Roles of Representation in School Mathematics*, 2001 Yearbook

__________ (2002). *Teaching Children Mathematics October*, Volume 9, Issue 2

__________ (1993). Assessment in the Mathematics Classroom, 1993 Yearbook

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher*, **15(2)**, 4-14.

# A Study on the Representation of Elementary Mathematics Learning

**Choi, Chang Woo**
Department of Mathematics Education, Daegu National University of Education, 1797-6 Daemyung 2 Dong, Korea
E-mail: cwchoi@dnue.ac.kr

It is not too much to say that problem solving is still the focus of school mathematics though the trend of mathematics education for ten year from the one of 1980 is problem solving and the one of mathematics education for ten year from the one of 1990 is standards and constructivism.

There are so many crucial clues or methods in good problem solving but I think that one of them is a representation.

So, the purpose of this study is to investigate what is the meaning of representation in general and why representation is so important in elementary mathematics learning. Moreover, I have analyzed the gifted children's thinking of representation which is appeared in the previous internet home task of 40 gifted children who are selected through the examination of 1st, 2nd with paper and pencil and 3rd with practical skill and interview and finally I have presented some examples of children's representation how they use representation to model, investigate and understand special concept more easily in elementary school mathematics class.

* ZDM classification : C52
* MSC2000 classification: 97D50