韓國數學敎育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2004. 5. 제 8권, 제 1호, 33-50

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
May. 2004, Vol. 8, No. 1, 33-50

문제 장면의 모델화를 통한 수업이 곱셈적 사고력과 곱셈 능력 신장에 미치는 영향

남승인 (대구교육대학교)
서찬숙 (대구영선초등학교)

I. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

NCTM(1989)의 '학교 수학 교육과정과 평가의 새로운 방향'에서는 학교 수학에서 많은 비중을 차지하는 형식화된 지필 계산에 대한 지나친 의존을 경고하면서 표준화된 알고리즘을 강조하기에 앞서서 학생들 스스로 고안한 알고리즘에 의한 계산 학습, 훈련과 연습에 의한 기능 중심의 계산 학습에서 연산의 의미와 연산 감각 중심의 계산학습으로의 변화를 강조하고 있다.

그런 관점에서 곱셈을 지도할 때, 개념적인 이해가 충분히 진전되기 전까지 알고리즘 즉, 곱셈구구를 성급하게 도입하는 것은 바람직하지 못하다. 또 곱셈에 대한 개념적인 이해를 풍부하게 하기 위해서, 다양한 곱셈 장면을 제시하여 곱셈이 사용되는 장면을 학생들이 스스로 인식하여 곱셈 개념을 내면화하는 것은, 알고리즘적 기능의 습득보다 선행되어야 한다. 곱셈 개념에 대한 폭넓은 이해는 이후에 학습하게 될 보다 상위 수준의 수학 학습에 기초가 될 뿐 아니라, 학생 스스로 곱셈 알고리즘을 구안할 수 있게 하며 알고리즘을 이용하여 신속하고 정확하게 결과를 얻는 데에도 긍정적인 영향을 준다. 그러므로 곱셈구구를 학습하기 전에 동수누가, 비율, 비교, 넓이와 정렬, 조합의 장면과 같이 곱셈이 사용되는 다양한 곱셈 장면을 학생들이 충분히 접하도록 지도하는 것이 바람직하다.

이에 곱셈적 사고력과 곱셈 능력을 기르기 위해서는 곱셈이 이루어지는 다양한 문제 장면의 모델화를 통하여 곱셈의 의미를 바르게 이해하고, 문제 해결에 능숙하게 활용할 수 있는 능력을 기를 필요가 있다. 본 연구에서는 제 7차 교육과정의 2학년 '가' 수준 '8. 곱하기' 단원을 선정하여 알고리즘이 도입되기 전에 지각적으로 다양한 문제 장면을 제시하고 그에 따른 모델화가 곱셈적 사고력과 곱셈 능력의 신장에 미치는 영향에 대해 알아보고자 한다.

2.. 연구 문제

본 연구는 곱셈 알고리즘을 습득하기 전, 학습자들의 곱셈에 대한 이해를 도울 수 있는 곱셈 장면을 분류해 보고, 문제 장면에 따른 모델의 지도 및 적용이 학생들의 곱셈적 사고력과 곱셈 능력의 신장에 주는 영향에 대해 알아보고자 한다.

1) 곱셈 문제 장면에 따른 다양한 유형의 곱셈 모델 지도 및 적용이 학생들의 곱셈적 사고력 신장에 영향을 주는지 알아본다.

2) 곱셈 문제 장면에 따른 다양한 유형의 곱셈 모델 지도 및 적용이 학생들의 곱셈 능력 신장에 영향을 주는지 알아본다.

3. 용어의 정의

1) 곱셈 문제 장면의 모델

모델(model)은 표상(representation)과 비슷한 의미로 혼동되어 쓰이기도 하지만 일반적으로 수학적인 개념을 표상하기 위한 그림, 구체물, 식을 말한다. NCTM(2001)에서는 수학 학습에서 사용되는 표상을, (1) 수학 학습에서 교사가 사용하는 '교수적 표상'과 (2)

---

* ZDM 분류: F42
* MSC2000 분류: 97D40

수학적 개념을 이해하기 위한 시도나 문제를 해결하기 위한 시도에서 학생들이 구성하는 '인지적 표상'의 2가지로 나누고 있다. 본 연구에서는 개념 형성 및 문제를 해결하기 위한 시도에서 학생들이 구성하는 인지적 표상을 모델이라고 정의하고, 감각적 인식에 의존한 구체물이나 추상적 인식에 의존한 수식보다는 그들 사이에 매개적인 역할을 하는 시각적인 대상으로 한정하였다.

2) 곱셈적 사고

Piaget, Steffe, Schwarz, Davydov는 곱셈적 사고를 단순한 동수누가가 아니라고 보았으나, Fischbein, Deir, Nello, Marino는 곱셈을 동수누가와 동일한 것으로 보았다(이준자, 2001, 재인용). 그러나 본 연구에서는 Piaget 등의 주장을 곱셈적 사고로 받아들여, 곱셈적 사고란 동수누가로부터 시작되지만 동수누가 의미 이상을 포함하는 것으로 동수누가 뿐만 아니라 피승수를 하나의 군으로 보고 원소 각각을 동시적으로 사고할 수 있는 덧셈보다 높은 수준의 추상화를 의미한다.

II. 이론적 배경 및 문헌 검토

1. 곱셈 장면의 유형과 모델의 유형

연산은 실생활의 문제 해결에서 출발하고, 문제 해결의 첫 단계는 문제이해이므로 문제에 대한 이해정도를 표현하는 것은 연산 지도의 핵심이라 할 수 있다. 어떤 문제를 잘 이해하고 있다는 것은 눈으로 볼 수 없는 추상적인 영역에 해당하는데, 이해정도를 가시적으로 나타낼 때 모델이 사용된다. 모델(model)은 표상(representation)과 비슷한 의미로 혼동되어 쓰이기도 하지만 일반적으로 수학적인 개념을 표상하기 위한 그림, 구체물, 식을 지칭하는데, NCTM(2001)에서는 교실에서 사용되는 표상을 다음의 두 가지로 보았다. (1) 학생들에게 지식을 전수하는데 교사가 사용하는 '교수적 표상', (2) 수학적 개념을 이해하기 위한 시도나 문제를 해결하기 위한 시도에서 학생들 자신이 구성하는 '인지적 표상'이 그것이다. 교수적 표상은 학생의 외부에 있어 교사와 학습자 사이에 의사소통으로 공유될 수 있으며, 인지적 표상은 학생 내부에 있어 다른 사람과 공유되지 않을 수도 있다. 본 연구에서는 두 번째, 학생들이 문제를 해결할 때 구성하는 인지적 표상을 하기 위한 모델, 그 중에서도 구체물이나 식보다는 시각적인 그림을 주로 모델이라고 하였다.

곱셈의 지도에서는 문장제 문제 해결과 연산이 문제에서 이용되는 과정을 발견할 수 있는 모델이 사용되는데 하나의 모델만을 포함한 활동은 문제 풀이에 미흡하기 때문에(Walle, 1998), 학생들이 다양한 문제 장면을 접해서 그에 적절한 모델을 이용하고 모델이 의미하는 바와 모델을 식으로 나타내는 활동이 필수적이다. 모델은 한 언어에서 다른 언어로의 해석을 시각적으로 나타내기 때문에, 한 언어에서 다른 언어로의 해석(예; 문장에서 모델로, 모델에서 기호로, 기호에서 문장으로)은 학생들이 연산의 개념을 발달시키는데 도움이 된다. 문제 장면은 현실적이고 구체적인 상황을 나타내고, 모델은 그러한 문제 장면을 이해하고 사고를 촉진하기 때문에 사용한다. 학생이 처음 곱셈 개념을 획득할 때, 모델은 생각하는 것을 돕는 보조 역할도 하며, 아울러 구성하려고 하는 곱셈 아이디어를 세련되게 하고 강화하는데 도움이 된다(전평국, 1998).

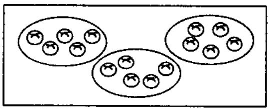
1) 곱셈 장면의 유형

곱셈 개념을 도입할 때 교과서에서는 주로 동수누가의 장면을 많이 사용하고 있는데 특히 현행 교과서는 한쪽에 편향된 곱셈 장면만을 제시하고 있어 학생들의 폭넓은 곱셈 개념 발달에 큰 공헌을 하지 못하고 있는 실정이다. 초등학교에서 다루는 수학은 중등수학, 나아가 고등수학의 기초가 되기 때문에, 학습자가 다양한 장면을 접해 보는 것이 곱셈에 대한 이해를 깊게 하고 수학의 여러 영역에 대한 내적 연결성을 깨닫는데 도움이 된다. 한편 교사의 입장에서는 곱셈 지도시 편협한 문제 장면만을 제시하기보다는 폭넓은 수학적 개념이 포함된 다양한 곱셈 장면을 수업에 활용하는 것이 바람직하겠다.

그런 관점에서 볼 때, 여러 사람의 곱셈 문제 장면에 대한 분류 가운데 Baroody와 Coslick의 분류와 Carpenter의 분류는 시사하는 바가 크다고 할 수 있다. 특히, Carpenter의 곱셈문제 장면 분류는 기초적 장면에서부터 곱셈이 확장될 수 있는 범위와 교환성질 등 대수적 구조까지 고려하여 그 수학적인 가치가 크다고 하겠다. 가격의 문제 장면은 생활 장면에서의 사용가능성과 분수에의 확장성을 고려하고 분류하였으나 달

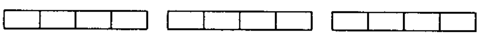
러화($3.4)를 사용하는 문화에서 3.4(달러)×5=17(달러)와 같이 분수에까지 곱셈을 확장시킬 수 있는 것이지 우리의 현실에는 맞지 않은 듯하다. 넓이와 정렬의 문제 장면이 분리량과 연속량이라는 관점에서 보면 차이가 있지만, 둘 다 분수에까지 적용이 가능하며 교환성질이 성립한다는 점과 본 연구의 대상이 곱셈을 처음 접하는 2학년임을 감안하면 정렬의 문제를 동수누가의 장면에 포함시키기보다는 넓이와 함께 다루는 것이 효과적일 것같다. 고로, 본 연구자는 Carpenter의 분류에 근거하되 여러 학자들의 의견을 종합하여 곱셈 문제 장면을 『① 동수누가, ② 비율, ③ 비교, ④ 정렬과 넓이, ⑤ 조합』의 장면으로 분류하였다.

(1) 동수누가의 장면 : 덧셈에서 곱셈을 도입할 때 주로 사용되는 장면으로 같은 수의 반복된 덧셈, 5+5+5를 5×3으로 표현할 수 있다. <그림 1>과 같이 동수누가의 장면을 나타내는데, 동수누가의 장면은 곱셈에서 교환성질을 적용하면 즉 5×3(5+5+5=15)은 3×5(3+3+3+3+3=15)는 결과는 같지만 같은 수의 반복(1번, 2번, 3번, 4번, …)을 통한 곱셈이므로 그 의미는 다르며, 그 범위는 자연수에까지 미친다.


<그림 1> 동수누가

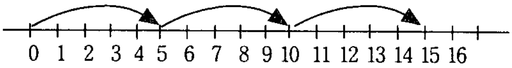
(2) 비율의 장면 : 비율 문제 장면은 '1개의 길이가 4cm인 막대 3개를 연결하면 전체 길이는 몇 cm인가?. '처럼 항목의 수와 비율이 주어졌을 때 전체를 찾는 것이다. 비율의 장면은 속도, 농도, 밀도 등과 같이 기준량에 대한 비교하는 양으로 나타낼 수 있다. 비율의 장면은 동수누가와 마찬가지로 교환을 하면 '(4×3)'와 (3×4)'처럼 연산 결과는 같으나 그 의미는 다르다. 또, 같은 수(同數)를 몇 번 더하는 것이 아니기 때문에 4×2.5와 같이 분수와 소수까지 그 범위를 확장할 수 있다는 점에서 동수누가보다는 수 체계에서의 확장가능성이 높다고 할 수 있다.

・문제 유형 : 1개의 길이가 4cm인 막대 3개를 연결하면 전체 길이는 몇 cm인가?.



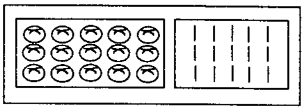
(3) 비교의 장면 : 비교 장면은 기준이 되는 한 집합의 크기와 다른 집합의 크기를 비교하여, 제시되지 않은 집합의 크기가 기준이 되는 집합 크기의 몇 배가 되는지를 구하는 것과 관련된다. 그러나 '몇 배가 더 크다'는 실마리를 반드시 포함하는 것은 아니다. 비교의 장면은 곱셈의 교환 성질을 적용하면 '사탕 2개의 3배가 있다(2×3)'와 '사탕 3개의 2배가 있다(3×2)'처럼 연산의 결과는 같으나 그 의미가 달라진다. 또, 같은 수(同數)를 몇 번 더하는 것이 아니기 때문에 '2개의 3.5배'와 같이 분수와 소수에까지 그 범위를 확장할 수 있다. 비교 장면에는 여러 모델을 사용할 수 있지만 <그림 2>처럼 수직선 모델을 사용할 수 있다.

・문제유형 : 승우는 연필을 5자루 가지고 있는데, 영인이는 승우가 가진 연필의 3배를 가지고 있다. 영인이가 가지고 있는 연필은 몇 자루일까?



<그림 2> 수식선 모델

(4) 정렬과 넓이 장면 : 넓이 장면은 가로와 세로가 주어진 직사각형의 넓이는 (가로)×(세로)라는 식과 관련된 장면이고, 정렬의 장면은 문제 장면을 넓이를 구하는 장면과 시각적으로 유사하게 나타낼 수 있는 장면을 말한다. 따라서 정렬의 장면을 동수누가, 비율, 비교의 장면과 엄격하게 구분하기는 힘들지만, '체육시간에 직사각형 모양으로 줄을 섰을 때, 가로로 5명, 세로로 3명이 서 있다면 전체 학생은 몇 명입니까?'하는 장면이 대표적이다. 넓이와 정렬의 장면은 동수누가, 비율, 비교의 장면과는 달리 곱셈의 교환성질을 적용해도 그 의미가 크게 달라지지 않을 뿐 아니라 교환성질을 한눈에 확인할 수 있다. 또, 분수에까지 확장이 가능하다는 점에서 Carpenter는 일반적 형태의 문제로 분류하였다.


<그림 3> 정렬

(5) *조합의 장면* : 하나의 유형이 다른 유형과 조합하여 만들어 낼 수 있는 모든 방법을 찾는 것과 관련이 있다. 조합의 장면을 나타낼 수 있는 모델은 다른 장면에 비해 다양하다고 할 수 있는데 <그림 4-1>는 수형도로 나타낸 것이고, <그림 4-2>는 문제에 대한 구체적인 그림으로 나타낸 다음 표로 나타낸 모델이다.

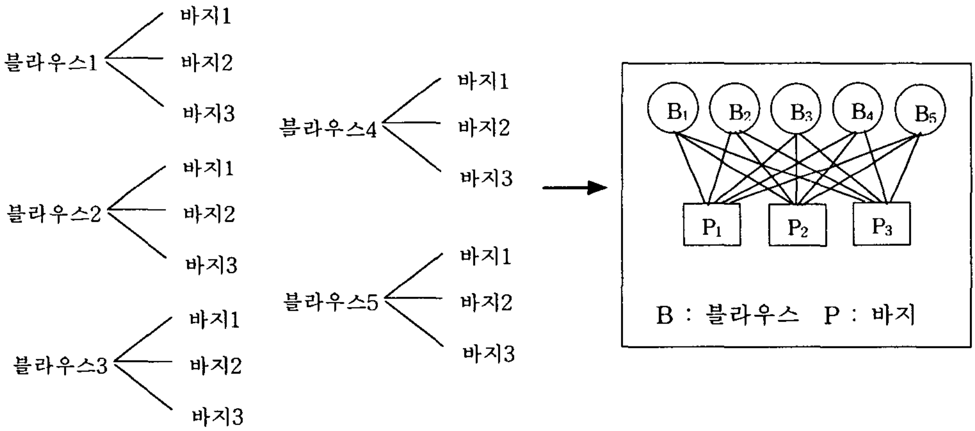
조합의 장면도 넓이·정렬의 장면과 같이 곱셈의 교환 성질을 적용해도 그 의미가 크게 달라지지 않을 뿐 아니라 분수에까지 확장이 가능하다는 점에서 Carpenter는 일반적 형태의 문제로 분류하였다.

·문제유형 : 희원이는 셔츠 5벌과 바지 3벌을 가지고 있다. 서로 다른 셔츠와 바지를 입을 수 있는 방법은 모두 몇 가지인가?

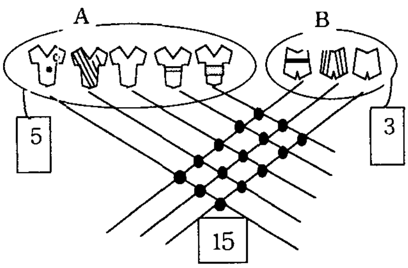
2) 모델의 유형

어떤 문제 장면에는 그 장면을 잘 나타내는 모델이 있으나, 하나의 모델을 하나의 곱셈 문제 장면과 일대일 대응을 시키는 것을 불가능하다. 하나의 장면을 여러 모델로 나타낼 수도 있으며 하나의 모델이 두 가지 이상의 장면에 이용될 수도 있다. 따라서 여기서는 앞에서 정리한 동수누가, 비율, 비교, 넓이와 정렬, 조합의 문제 장면처럼 의미는 차이가 있으나 사용하는 모델은 큰 차이가 없으므로 동수누가와 비교, 비율, 넓이와 정렬, 조합'을 기준으로 분류해 보았다. 또, 비율의 장면은 시각적으로 표현하였을 때 나타나는 모델이 다른 것과 구분이 되지 않으므로, '① 동수누가와 비교, ② 넓이와 정렬 ③ 조합'에 적절한 모델을 구체화하였다.

(1) 동수누가와 비교의 문제 장면에 적합한 모델 : 동수누가와 비교의 문제 장면은 장면의 특성상 두 가지가 큰 차이가 없으며 사용할 수 있는 모델이 많은데 <그림 5-1>과 같은 모델을 이용하여 나타낼 수 있다. 그러나 수직선 모델은 2학년 학생들이 혼란스러워할 수도 있으므로 주의해야 한다.

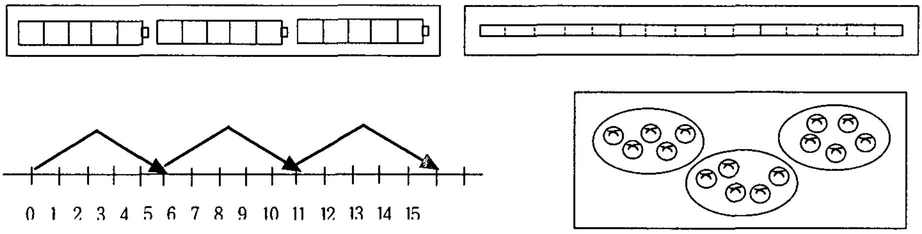


<그림 4-1> 조합 장면의 모델화(수형도)



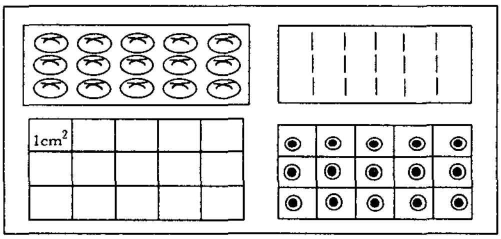
	셔츠1	셔츠2	셔츠3	셔츠4	셔츠5
바지1					
바지2					
바지3					

<그림 4-2> 조합 장면의 모델화(표)



<그림 5-1> 동수누가와 비율의 장면에 적합한 모델

(2) 넓이와 정렬의 문제 장면에 적합한 모델 : 넓이와 비교의 문제 장면은 직사각형 모양으로 나타낼 수 있는 모델을 사용하면 되는데 <그림 5-2>와 같은 모델을 이용하여 나타낼 수 있다.



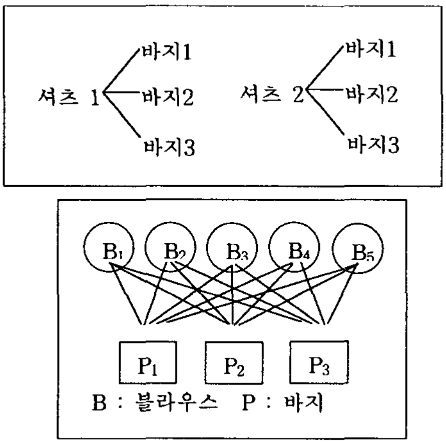
<그림 5-2> 넓이와 정렬의 장면에 적합한 모델

(3) 조합의 문제 장면에 적합한 모델 : 조합의 문제 장면은 <그림 5-3>과 같은 모델을 이용하여 나타낼 수 있다.

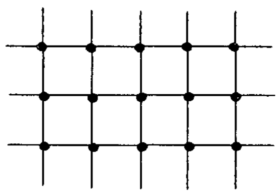
(4) 비율의 문제 장면 : 동수누가와 비교, 정렬의 장면에 사용된 모델을 사용하면 큰 무리가 없으므로, 문제의 상황에 따라 이용하면 되겠다.

3. 곱셈과 동수누가의 관계

Piaget(1977, 재인용)는 아동들의 사고 과정에 관심이 많았는데, 처음에 그는 수를 포함하지 않는 대상의 분류와 계열 과제를 수행할 때에 나타나는 사고를 '덧셈적 사고'와 '곱셈적 사고'로 구분하였다. 이를 위해 Piaget는 두 가지의 색깔과 두 가지 모양으로 된 도형 4개를 아동에게 제시하여 색깔과 모양에 따른 반응을 다음과 같이 두 가지 방법으로 분류하였는데, 곱셈적인 분류를 한 아이는 RC가 빨강/파랑과 원/사각형을 분류한 일부분임을 동시에 생각할 수 있으나 덧셈적인 분류를 한 아이는 그렇지 못하다.



	셔츠 1	셔츠 2
바지1		
바지2		
바지3		



<그림 5-3> 조합의 장면에 적합한 모델

<표 0-1> 곱셈적 분류

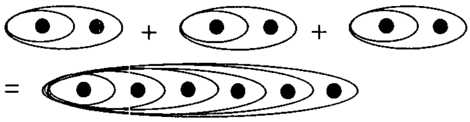
색 / 모양	빨강	파랑
원	RC	BC
사각형	RS	BS

<표 0-2> 덧셈적 분류

RC	BC

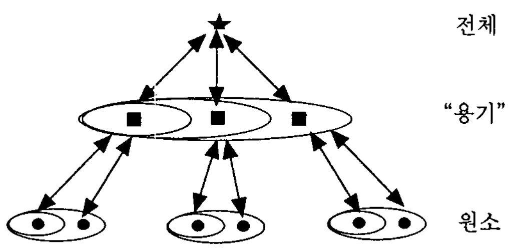
BC
BS

Piaget는 "자연수는 <그림 7-1>처럼 단지 1을 더하는 조작을 통해서 얻어진 영의 후속자에 지나지 않는다"고 보고, "자연수는 덧셈의 구체적 현시"라고 하였다. 반면에, 곱셈은 <그림 7-2>처럼 덧셈에서와는 달리 수의 구성에 내재해 있지 않은 보다 복잡한 조작, "인위적인 또 다른 것(1977, 이준자, 재인용)"이라 생각했다. 예를 들어 2×3=6을 A, B 두 학생이 해결했다고 가정하자. 학생 A는 2가 1의 후속자이므로 2=1+1이고, 2×3=2+2+2임을 이용하여 문제를 해결했다.



<그림 7-1> 2×3에 대한 덧셈적 사고

학생 B는 2가 1의 후속자이므로 2=1+1이고, 2를 하나의 단위인 집합으로 생각하여 문제를 풀었다.



<그림 7-2> 2×3에 대한 곱셈적 사고

학생 A는 처음의 2를 1의 후속자로 생각하였고, 2×3=2+2+2로 생각하여 1의 후속자가 "연속적"으로 합성된다고 보았다. 반면에 학생 B는 2가 1의 후속자라고 본 점에서는 학생 A와 같지만 2를 하나의 단위(군, group)로 보고 각각을 원소로 하여 "동시적"인 합성을 하였다. 물론 학생 B도 "원소"를 "용기"에 담을 때에는 연속적으로 생각하였지만 1의 후속자인 2, 2, 2 각각을 "동시적"으로 합성한 점이 주목할 만하다.

Piaget(이준자, 2001, 재인용)는 아이들이 곱셈적 사고를 할 수 있도록 다음과 같은 연구를 하였다.

> 아동들은 장난감 양(S) 한 마리, 장난감 오리(D) 한 마리, 그리고 동일한 낟알 한 무더기를 받았고 양은 한번 씹을 때마다(한 묶음 S) 낟알 3개, 오리는 한 번 씹을 때마다(한 묶음 D) 낟알 2개를 먹는다고 들었다. 곱셈 과제에서, 실험자는 S를 위해 낟알(g) 3개씩 4묶음(b)을 준비했고 아동은 D가 한 번 씹을 때 2개의 낟알을 먹음을 기억하여, D를 위해서 몇 낟알 몇 묶음을 준비해야 했다. 3가지 다른 위계적 수준의 변수는 다음과 같다 :
>
> 전체 = 총 낟알의 개수
> 용기 = 묶음의 개수
> 원소 = 묶음 당 낟알의 개수

Piaget는 아이들이 각 변수를 어떻게 해석하는지에 관심이 있었다. 즉, 원소를 포함하면서 동시에 전체에 포함되는 "용기"의 위계적 포섭 관계를 파악하고 있는지가 연구의 초점이었다. Piaget의 연구를 통해서 '2×3을 해결하는가'와 '실제로 곱셈적인 사고를 하고 있는가' 하는 것은 별개의 문제임을 알 수 있었다. 단순히 곱셈을 잘 한다고 해서 곱셈적 사고를 하고 있다고 단정짓기는 어려울 것같다.

심지어 Vergnaud(1983, 재인용)는 동수누가, a+a+a+…(b번)가 전혀 곱셈적 절차가 아님을 주장했는데, 곱셈 구조가 부분적으로 덧셈 구조에 의존하는 것은 사실이지만 곱셈 구조는 덧셈적인 측면으로 환원할 수 없는 그 자체의 본질적인 조직화를 포함하고 있다고 주장하였다.

이준자(2001)는 덧셈적 사고는 아동에게 ① 한 수준에서 포함 관계를 만들고, ② 일의 단위를 다루고, ③ 앞의 두 단계를 연속적으로 생각하며, ④ "몇 더"에 의

해 사고할 것만을 요구한다. 대조적으로 곱셈적 사고는 아동이 ① 한 수준 이상에서 포함 관계를 만들고, ② 일 이상의 단위를 다루고, ③ 앞의 두 단계를 동시에 사고하며, ④ "몇 배(번)"에 의해 사고할 것을 요구한다고 주장하였다.

이상에서 볼 때, 곱셈은 덧셈으로부터 구성되지만 단순한 동수누가가 아니며, 피승수를 하나의 원소로 보고 원소 각각을 동시적으로 사고할 수 있는 더 높은 수준의 추상화라 할 수 있겠다.

이준자(2001)는 피아제의 물고기모형, 10cm(A), 20cm(B), 30cm(C), 모형 3개와 먹이로 사용한 플라스틱 칩 50개를 가지고 1~5학년 아동들을 대상으로 인터뷰를 하였다. 그는 <표 1>과 같이 아동들의 곱셈적 사고가 4단계의 발달 수준을 거친다고 주장하였다.

<표 1> 곱셈적 사고의 수준과 특징

<table>
<tr><th colspan="3">사고 수준</th><th>사고의 특징</th><th>반응 사례</th></tr>
<tr><td rowspan="4">덧셈적 사고</td><td colspan="2">I</td><td>A 〈 B 〈 C 관계가 성립하면 어떤 수가 다 받아들여지는 수준으로 덧셈적이거나 곱셈적이지 못함.</td><td>B가 4개를 먹으면 A는 2개, C는 5개를 먹을 수 있지만 A가 4개를 먹으면 B와 같아져서 안된다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">II</td><td>A보다 B, C가 차례로 +1씩 더 먹는다고 반응하는 수준으로 덧셈적으로 사고하는 단계.</td><td>(A보다 B에 1을 더해주고, B보다 C에 1을 더해준다) B가 4개를 먹으면 A는 3개, C는 5개를 먹고, C가 9개를 먹으면 A는 7개 B는 8개를 먹는다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">III</td><td>A</td><td>A보다 B, C는 +2나 +1 이상씩 먹는다고 반응하는 수준으로 덧셈적으로 사고하는 단계.</td><td>(A보다 B에 2나 1이상을 더하고 B보다 C에 2나 1이상을 더해준다) A가 4개를 먹으면 B는 6개 C는 8개를 먹고 A가 7개를 먹으면 B는 9개 C는 11개를 먹는다</td></tr>
<tr><td>B</td><td>A보다 B는 +2, C는 +3을 더 먹는다고 반응하는 수준으로 덧셈적으로 사고하는 단계.</td><td>(B는 A+2로 받아들이고, C는 A+3 또는 B+3으로 받아들인다) C가 9개를 먹으면 A는 6개 B는 8개를 먹고 A가 4개를 먹으면 B는 6개 C는 7개를 먹는다.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">곱셈적 사고</td><td rowspan="3">IV</td><td>A</td><td>두 관계 AB 또는 BC 중 하나는 맞으나 하나는 틀리게 반응하는 단계로 곱셈적으로 사고하는 수준.</td><td>A가 7개를 먹으면 B는 14개, C는 17개를 먹는다.</td></tr>
<tr><td>B</td><td>A, B, C의 관계를 즉시 파악 못하나 교사의 도움을 받아 관계를 파악하는 수준.</td><td>(학생) : C가 9개를 먹으면 B는 7개 A는 5개를 먹어요.
(교사) : A의 2배를 B가 먹고, A의 3배를 C가 먹는다고 했는데...
(학생) : 제가 틀렸어요. C가 9개 먹으면 B는 6개, A는 3개를 먹어요.</td></tr>
<tr><td>C</td><td>A, B, C의 관계를 즉시 파악하는 수준.</td><td>모든 질문에 정확하게 답을 하고, 이유도 정확하게 설명한다.</td></tr>
</table>

※ 10cm(A), 20cm(B), 30cm(C) 길이의 물고기가 각각 한 마리씩 세 마리가 있다. A가 먹이를 1개 먹을 때, B는 2개, C는 3개를 먹는다.

4. 곱셈의 지도 단계

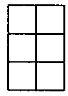
연구자는 Baroody와 Coslick이 제시한 곱셈 수업의 4단계(동수누가의 문제를 통해 곱셈기호 소개하기 → 곱셈기호를 다양한 실세계의 문제 상황, 모델과 관련시키기 → 학생 나름대로의 비형식적인 곱셈 전략을 고안·공유·개선시키기 → 곱셈의 교환성질과 결합성질의 안내된 발견학습)와 Carpenter의 곱셈 문제 장면(동수누가, 비율, 비교, 조합, 넓이와 정렬)을 바탕으로 곱셈 지도 단계를 고안해 보았다.

·*1단계(동수누가)* : 곱셈을 덧셈의 반복적인 연산(동수누가)으로 도입하고 곱셈 기호를 처음으로 소개한다. 처음 곱셈의 개념을 도입할 때는 동수누가에 의한 곱셈 문제를 제시하며, 그 문제의 해결은 학생들이 이미 가지고 있는 덧셈 지식에 바탕을 두어 이용할 수 있도록 한다. 문제 장면은 학생들의 실생활과 관련이 있는 것으로 하되, 덧셈의 반복적인 식으로 문제를 표현하도록 격려한다. 반복된 덧셈으로 표현된 식을 신속한 기호적 표현으로 나타낼 수 있는 방법을 생각해 보도록 한 다음, 형식적이고 표준적인 곱셈 기호(×)를 도입한다.

·*2단계(비율)* : 비율의 문제 장면을 제시하고, 곱셈을 다양한 모델로 표현할 수 있도록 지도한다. 곱셈에서 피승수를 "군"으로 인식하여 하나의 원소로 이해하도록 하는 곱셈적 사고의 기초를 다진다. 문제장면을 모델화할 때는 3단계에서 다룰 정렬의 모양으로 표현하도록 안내한다. 또 비율의 문제 장면이 분수에까지 확장됨을 고려한 문제 장면도 제시한다. 예를 들어 "상자당 2cm씩 붙어 있는 테이프의 3배 반"과 같은 문제는 동수누가가 자연수에서만 성립하는 한계성을 초월하여 고학년에서 곱셈이 분수에까지 확장될 수 있는 개념적 기초를 제공한다.

·*3단계(비교)* : 이 단계에서는 비교의 문제 장면에 중점을 두되, 곱셈 문제 장면에서 이미 학습한 다양한 모델을 학생들이 선택하여 표현하도록 하는데 지도한다. 비교의 장면은 '몇 배 더'라는 용어를 반드시 사용할 필요는 없으나 '~보다 몇 재 더 큰, 또는 작은'이라는 용어를 사용함으로써 곱셈의 의미를 확장시키는 데 유용하다. 동수누가의 장면은 분수까지 확장없으나 비율과 비교의 장면은 분수에도 확장될 수 있으므로 그 점을 고려한 문제 장면을 제시하도록 한다.

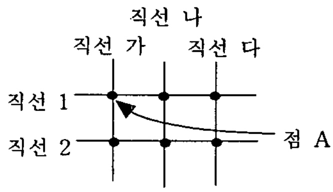
·*4단계(정렬·넓이)* : 이전 단계까지의 문제를 직사각형 모양으로 정렬하면 쉽게 이해할 수 있음을 상기하며 정렬의 문제 장면을 도입한다. 실생활에서 많이 볼 수 있는 문제 장면을 이용하되, 이미 다루었던 문제들을 조금만 바꾸면 정렬의 모델로 나타낼 수 있음을 이해시킨다. 아울러 <그림 8-1>과 같은 2×3을 왼쪽으로 90° 회전하면, <그림 8-2>와 같이 3×2가 됨을 보여주어, 곱셈의 교환법칙도 눈으로 확인하도록 하였다.



<그림 8-1>

<그림 8-2>

·*5단계(조합)* : 조합의 문제 장면을 모델로 나타내는데 중점을 두었다. 그러나, 초등학교 2학년 아동이 조합의 문제 장면을 처음부터 모델로 표현하는데 어려움이 있을 것 같아서 <그림 9>처럼 직선을 가로와 세로로 정렬했을 때 생기는 점의 개수와 의미를 파악하도록 함으로써 후의 모델 표현에 도움이 되도록 지도하였다. '직선 가', '직선 나', '직선 다' 와 '직선 1', '직선 2'가 만나서 생기는 점은 모두 6개이며, 점 A는 직선 가와 직선 1이 만나서 생기는 점이라는 사실을 이해하도록 하였다. 그 다음, 실제적인 문제 장면을 통해 표, 수형도 등의 모델로 표현하며 다른 사람이 나타낸 모델을 공유하도록 하였다.



<그림 9> 조합 문제장면의 모델

·*6단계(모델고안)* : 여러 가지 문제 장면을 제시하고 학생들이 나름의 모델을 선택하여 표현하며 서로 공유하고 개선시킬 수 있도록 한다. 1~5 단계가 교사 주도적인 수업이었다면 6단계는 학생들이 중심이 되어 직접 모델링하고 발전적인 전략을 선택하고 공유하며 다른 사람의 모델을 이해하도록 격려한다. 덧붙여, 학생들이 모델링한 문제 장면에서 교환 법칙과 같은 간단한 곱셈 연산 성질을 파악하고 사용할 수 있도록 교사는 도움을 준다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 실험 설계

가. 실험 설계 모형

본 연구에서 실험반은 문제 장면의 모델화를 통한 교수·학습 활동을 실시하고, 비교반에서는 전통적인 교수·학습 활동을 실시하였다. 두 변인간의 효과를 알아봄으로써 효과적인 교수·학습 방법을 찾아보는데 그 목적이 있다. 이에 실제 적용된 실험설계 모형은 사전-사후 통제집단 설계로 <표 2>와 같다.

<표 2> 실험 설계 모형

구 분	대 상	사전검사	처 치	사후검사
곱셈적 사고 수준 ·곱셈 능력	실험집단	O1, O3	X1	O2, O4
	비교집단	O1, O3	X2	O2, O4

O_1 : 곱셈적 사고 수준 사전 검사
O_3 : 곱셈 능력 사전 검사
X_1 : 문제 장면의 모델화를 통한 곱셈 지도
X_2 : 전통적인 방법에 의한 곱셈 지도
O_2 : 곱셈적 사고 수준 사후 검사
O_4 : 곱셈 능력 사후 검사

나. 사전·사후 검사지 제작

곱셈적 사고수준에 대한 사전 검사는 이준자(2001)의 곱셈적 사고 수준 검사를 이용하였고, 사후 검사는 사전 검사에 대한 동형검사로 본 연구자가 제작하고 전문가의 자문을 얻어 수정·보완하였다. 그리고 비교반·실험반 대상자가 2학년으로 학교 수학수업을 통해 곱셈을 학습한 경험이 없으므로, 곱셈의 기초가 되는 덧셈 능력을 사전 검사로 실시하였다. 실험 처치 이후 사후 검사는 곱셈 능력을 검사하였는데, 사전검사지와 사후검사지는 본 연구자가 실험반·비교반 교사 이외의 2인 동료 교사의 도움을 얻어 제작하고 전문가의 자문을 얻어 수정·보완하였다.

다. 연구 대상자의 선정

실험반은 남23명, 여17명, 계 40명이다. 비교반 아동들은 남24명, 여16명으로 모두 40명이다. 두 집단의 동질성 여부를 파악하기 위하여 곱셈적 사고 수준에 대한 검사와 연구자가 제작한 연산 능력에 대한 검사를 실시하였다. 곱셈적 사고 수준 검사는 물고기모형을 전체 학생들에게 보여주며 각 실험자가 문제를 읽어주고 피실험자들이 답지에 답만 적도록 하였다. 문항의 특성상 한 문제가 다른 문제의 답에 힌트를 줄 수 있기 때문에, 질문법과 지필검사를 병행하여 실시하였으며, 곱셈능력 검사는 검사지를 이용하여 지필 검사를 실시하였다. 실시 후, 두 집단의 검사 결과를 채점하여 곱셈적 사고 수준은 교차분석(χ^2-검정)을, 곱셈 능력 검사 결과는 양측검정(t-검정)을 실시하였다. 이 모든 자료 분석은 개인용 컴퓨터의 윈도우용 SPSS를 이용하여 처리하였다. 두 집단의 사전 곱셈적 사고 수준에 대한 검사는 <표 3>, 연산 능력 검사 결과는 <표 4>과 같다.

<표 3> 곱셈적 사고 수준 사전 검사 결과

구 분	곱셈적 사고 수준			덧셈적 사고 수준
	IVC	IVB	IVA	
실험반	3	3	4	30
비교반	2	3	4	31
$\chi2$	0.216			
p	0.975			

<표 4> 곱셈 능력 사전 검사 결과

구 분	인원수	평균	표준편차	t 값	유의수준
실험반	40	8.500	1.7097	-0.766	0.446
비교반	40	8.775	1.4934		

곱셈적 사고 수준 검사 결과 p값은 0.975, 곱셈 능력 검사 결과 p값은 0.446으로 실험반과 비교반의 사전 곱셈적 사고 수준과 곱셈 능력을 검사한 결과에서는 유의 수준 0.05에서 통계적으로 유의미한 차이가 없었다. 그러므로 두 집단은 곱셈적 사고 수준과 곱셈 능력의 면에서 동질한 집단으로 볼 수 있다.

3. 수업 설계

본 연구는 곱셈 알고리즘을 습득하기 전, 학습자들의 곱셈에 대한 이해를 도울 수 있는 곱셈 장면을 분류해 보고, 문제 장면의 모델화를 통한 수업이 곱셈적 사고력과 곱셈 능력 신장에 미치는 효과를 알아보고자 하는데 목적을 두고 있다. 이에 수업 프로그램을 개발하기에 앞서 자연수뿐만 아니라 분수에까지 곱셈의 확장을 고려하고, 문제 장면을 수준에 따라 3단계로 분류한 Carpenter의 주장을 참고로 하여 제 7차 교육과정에 제시된 단원을 선정, 그 지도 내용을 분석하였다. 분석한 내용을 Baroody와 Coslick이 제시한 곱셈 수업의 4단계에 의거하여 구체적인 차시 지도 계획을 수립하고, 그 계획에 따라 차시 지도안을 작성하였다.

가. 교육과정의 단원 선정

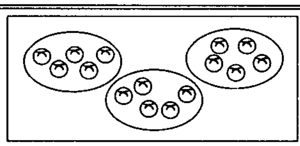
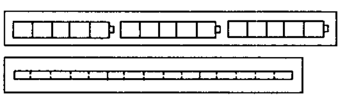
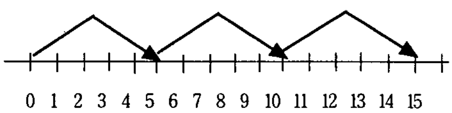
1학년과 2학년 초기에 습득한 기초적인 수개념과 연산감각을 바탕으로 초보적인 곱셈 개념의 기초를 마련하는 것이 본 단원의 목표이므로, 반복된 덧셈(동수누가)에서 곱셈의 필요성을 인식하고 곱셈 기호를 도입한다. 그러나 곱셈이 단순한 덧셈의 반복이 아닌 피승수를 하나의 원소("군", group)로 인식하여 통합적으로 생각할 수 있는 덧셈과 다른 차원의 사고수준을 요구하므로 학생들의 곱셈적 사고를 촉진할 수 있는 수업이 이루어져야 할 것이다. 그러기 위해서는 동수누가를 포함한 다양한 곱셈 장면을 통한 학습지도가 이루어져야 하나, 현행 교과내용은 주로 동수누가를 중심으로 "곱하기" 지도가 이루어지고 있는 실정이다. 아울러, 다양한 문제 장면을 통한 지도를 할 때 각각의 장면에서 곱셈을 이해하는 기본(primary) 단계의 이해보다는 곱셈 문제 장면에서의 공통된 특징으로부터 곱셈에 대한 반성적(reflective) 단계의 이해가 이루질 수 있도록 지도하는 것이 바람직하다고 생각된다. 곱셈은 2학년에서 처음 도입되어 범자연수를 대상으로 하지만, 고학년에서 분수의 곱셈으로 확장되며, 조합의 문제 장면은 경우의 수, 중등수학의 확률과도 관련이 있다. 이는 2학년에게 고차원적인 수학개념을 가르치자는 것이 아니라, 앞으로 학습하게 될 개념의 선행 조직자 역할을 할 수 있는 토대를 마련하자는 의도이다.

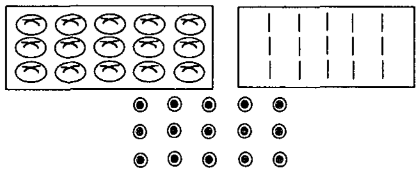
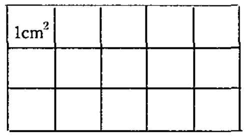
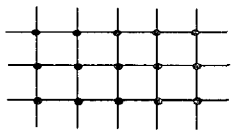
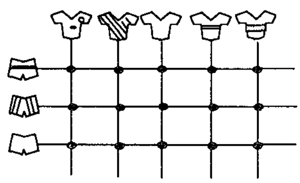
나. 차시별 지도 계획의 구체화

실험 집단의 지도는 곱셈 문제 장면을 곱셈 지도 단계에 따라 차시별로 구분하여 지도하였고, 비교집단의 지도는 2-가 '8. 곱하기'의 교사용 지도서에 제시된 단원의 전개 계획에 의거하여 지도하였다.

실험 집단은 곱셈의 지도 단계를 6단계로 나누고 단계에 따른 차시별 지도계획을 구체화하고, 차시별 지도 요소와 내용에 따라 중점적으로 이용할 모델을 <표 5>와 같이 정리하였다.

<표 5> 6단계 곱셈 지도에 의한 차시별 계획

지도 단계	문제 장면	차시	지도 요소	지도 내용	모델
1	동수누가	1	동수누가, 곱셈기호	반복된 덧셈의 문제 장면에서 곱셈의 필요성을 인식하게 하고 곱셈 기호를 도입한다.	
2	비율	2	비율 문제 장면의 모델화(I)	비율의 문제 장면을 적절한 모델로 표현하되 범자연수에 한정한다.	
		3	비율 문제 장면의 모델화(II)	비율의 문제 장면을 적절한 모델로 표현하되, 분수에까지 확장할 수 있는 문제 장면을 이용한다.	

지도 단계	문제 장면	차시	지도 요소	지도 내용	모델
3	비교	4	비교 문제 장면의 모델화, 다양한 모델 선택	비교의 문제 장면을 모델로 표현하고 지금까지 학습한 모델로 이용하여 다양하게 표현한다.	1~3 차시까지 사용한 모델을 자유롭게 사용한다.
4	정렬 · 넓이	5	정렬 문제 장면의 모델화	정렬의 문제 장면을 모델로 표현하고 비율이나 비교의 문제 장면도 정렬로 표현할 수 있도록 지도한다.	
		6	넓이 문제 장면의 모델화, 교환성	정렬 장면을 표현한 모델을 90° 회전하여 곱셈의 교환성을 이해하도록 지도한다.	
5	조합	7	조합 문제 장면의 모델화 (직선의 조합)의 이해	직선의 조합으로 문제 장면을 제한하여 2차원적인 모델을 이해하는데 초점을 두어 지도한다.	
		8	조합 문제 장면의 모델화 (다양한 문제 장면)	다양한 실생활 문제를 활용하여 조합 문제 장면을 모델화하며 조합의 장면을 나타낼 수 있는 모델이 여러 가지고 있음을 이해하도록 지도한다. 또 지금까지의 학습이 모두 곱셈을 나타낸 장면이었음을 정리할 수 있도록 한다.	
6	모델 고안	9	학생 주도의 모델 고안과 공유(문제해결)	다양한 문제 장면을 통해서 학생 스스로 모델을 선택하거나 고안하며 자신이 이용한 모델을 다른 사람과 공유할 수 있도록 지도한다.	

4. 자료 분석

본 연구에서는 문제 장면의 모델화가 곱셈적 사고력과 곱셈 능력 신장에 미치는 효과를 알아보기 위하여 두 가지의 연구 문제를 설정하고 자료를 수집하였다. 수집된 자료의 분석 방법은 다음과 같다.

가. '연구문제 1'은 문제 장면의 모델화가 곱셈적 사고력의 신장에 미치는 영향을 알아보기 위한 것으로써, 실험처치 이전에 실험집단과 비교집단을 대상으로 곱셈적 사고 수준을 실시하고, 실험 처지 후 사전 검사와 동형 검사지를 이용하여 사후 검사를 실시한 후 두 집단의 검사결과를 교차분석(χ^2-검정)하였다.

나. '연구문제 2'는 문제 장면의 모델화가 곱셈 능력의 신장에 미치는 영향을 알아보기 위한 것으로써, 실험처치 이전에 실험집단과 비교집단을 대상으로 실시한 검사 결과를 양측검정(t-검정)함으로써 동질집단임을 확인하였다. 실험집단은 문제 장면의 모델화를 통한 실험처치를 하고 비교집단은 교과서에 따른 전통적

인 실험처치를 한 후, 두 집단을 대상으로 한 곱셈 능력 검사 결과를 양측검정(t-검정)하여 비교하였다.

IV. 결과 분석 및 논의

본 연구 문제에 따른 결과 분석 및 논의를 연구 문제와 관련하여 제시하면 다음과 같다.

1. 연구 문제 1에 대한 결과 분석 및 논의

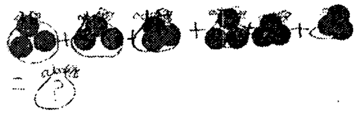
연구 문제 1 : 곱셈 문제 장면에 따른 다양한 유형의 곱셈 모델 지도 및 적용이 학생들의 곱셈적 사고력 신장에 영향을 주는지 알아본다.

곱셈 장면의 모델화를 적용한 수업을 한 집단과 전통적인 수업을 한 집단의 곱셈적 사고 수준에 차이가 있는가를 알아보기 위한 검사를 실시한 후 두 집단의 검사 결과를 채점하여 교차분석(χ^2-검정)을 하였고, 모든 자료 분석은 개인용 컴퓨터의 윈도우용 패키지인 SPSS를 이용하여 처리하였다. 실험반과 비교반의 곱셈적 사고 수준의 차이에 대한 결과는 <표 6>과 같다.

위의 표에서 알 수 있듯이 사전 검사에서는 두 집단 간에 유의 확률이 0.975로 유의미한 차이가 없는 것으로 판단된다. 사후 검사에서 얻은 결과에 대해 유의성을 검증한 결과 유의 확률 0.689로 두 집단간에 효과성에 대한 차이가 없는 것으로 드러났다.

그러나, 실험반이 비교반보다 곱셈적 사고 수준에 도달한 학생이 많은 것과 연구기간이 단기간임을 고려한다면, 학생들이 덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로 발달하고 있는 과도기를 거치고 있다고 볼 수 있겠다. 또, 어떤 사고의 수준이라는 것이 몇 일, 몇 달 동안의 단기간에 변할 수 있는 것은 아니라고 볼 때, 본 연구 대상자 가운데 곱셈적 사고에 도달한 학생의 비율과 이준자(2001)가 선행연구에서 밝힌 결과는 유사한 점이 있다. 그러나, 본 실험의 결과에서 곱셈적 사고에 도달한 학생의 비율보다 약간 높았는데, 그 이유는 1대 면담을 실시한 선행연구에 비해 본 연구는 면담과 지필 검사를 병행했기 때문인 것같다. 비교반에서도 덧셈적 사고에서 곱셈적 사고를 하게 된 학생들이 증가한 것은, 전통적인 곱셈의 학습을 통해 기준량의 2배, 3배를 계산할 수 있게 된 결과인 것 같다.

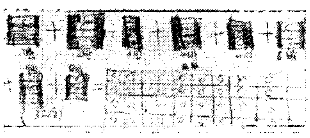
3+3+3+3+3+3으로 나타낼 수 있는 비율의 곱셈 문제 장면에서 3개의 원소를 묶어 하나의 군으로 나타낸 모델을 정렬 모델로 표현하기도 하였다. '서랍이 4개씩 달린 서랍장이 8반에 1개씩 있을 때, 서랍은 모두 몇 개일까요?' 라는 문제 장면을 그림으로 나타내 보도록 하였는데, 모델의 표현 방법을 가르쳐 주지는 않았다. 그런데, 소수이기는 하지만, 몇 명의 학생이 서랍장을 하나로 묶어서 표현하였는데, 이는 정렬모델이 초기 동수누가의 묶음모델(<그림 10>)에서 발전된 듯하다. 정렬 모델로 표현한 2명의 학생은 곱셈에 대한 나름대로의 지식망을 구축하고 있었는데, 그들 중 1명은 '같은 서랍장이므로 한 번에 나타내면 보기에 좋다.'고 하면서 <그림 11>과 같이 나타내었다.



<그림 10> 동수누가 묶음모델

<표 6> 실험반과 비교반의 곱셈적 사고 수준 검사 결과

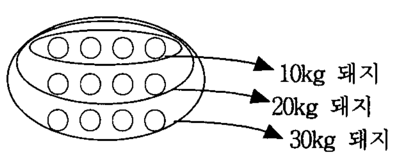
구 분	사 전				사 후			
	곱셈적 사고 수준			덧셈적 사고수준	곱셈적 사고 수준			덧셈적 사고수준
	IVC	IVB	IVA		IVC	IVB	IVA	
실험반	3	3	4	30	7	5	10	18
비교반	2	3	4	31	5	5	7	23
$\chi2$	0.216				1.473			
p	0.975				0.689			



<그림 11> 정렬 장면을 표현한 모델

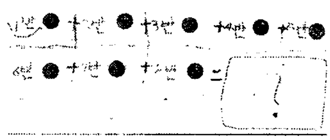
정렬의 문제 장면을 학습할 때, 7×3 모양으로 놓인 강낭콩 모형에서 가로로 7개, 1줄 놓인 것과 세로로 3개, 1줄 놓인 것을 각각 따로 보여주고 전체의 개수를 추론해 보도록 하고, 가로의 개수와 전체 개수를 알 때 세로의 개수를, 세로의 개수와 전체 개수를 알 때 가로의 개수를 추론해 보도록 하였다. 그러자, 학생들은 자연스레 7개씩 또는 3개씩 묶음으로 세기 시작하였고, 원소를 군으로 인식하는 능력은 다음의 비교 장면을 모델로 표현할 때 자연스레 나타났다.

정렬의 문제 장면에서 보이는 부분을 이용하여 보이지 않는 부분을 추론하는 것은 곱셈적 사고 검사지에서 동물의 몸무게에 따라 먹이의 양이 비례하는 것을 이용하여 먹이를 추론하는 것과 유사하다. 예를 들어, 10kg짜리 돼지가 먹이 4개를 먹을 때, 20kg짜리, 30kg짜리 돼지가 먹는 먹이는 8개, 12개인데 이는 정렬의 장면에서 가로의 4개와 세로의 2개 또는 3개를 보여주고 전체 개수를 질문하는 것과 유사하다. 따라서, 곱셈 문제 장면 중에서도 정렬의 문제 장면이 곱셈적 사고 수준 검사에 가장 큰 영향을 미친 것으로 볼 수 있다.



<그림 12> 정렬 문제 장면과 곱셈적 사고 검사 내용의 비교

정렬의 장면에 이어, 비교의 장면에서 학생들이 덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로 자연스럽게 발달해 가는 과정을 가시적으로 확인할 수 있었다. 2×8의 문제 장면을 제시하고 모델로 표현하도록 하였는데, 그림을 그리기가 어려울 것 같아서, 스티커를 이용하도록 하였다. 그러자, 한 학생이 <그림 13>에서와 같이, 2를 하나의 군으로 생각하고 스티커 1개를 나타내어, 스티커 1개가 2를 의미한다고 발표하였다. 수업을 거듭할수록 학생들이 원소를 군으로 표현하는 경향이 생겼는데, 이는 정렬의 문제 장면에서 묶어세기를 한 것이 도움이 된 것같다. 원소를 군으로 생각하는 것은 후에 곱셈적 사고의 밑거름이 된다.



<그림 13> 원소를 하나의 군으로 표현한 사례

2. 연구 문제 2에 대한 결과 분석 및 논의

연구 문제 2 : 곱셈 문제 장면에 따른 다양한 유형의 곱셈 모델의 지도 및 적용이 학생들의 곱셈 능력 신장에 영향을 주는지 알아본다.

곱셈 장면의 모델화 수업을 적용한 집단과 전통적인 수업을 한 집단의 곱셈 능력에 차이가 있는가를 알아보기 위한 검사를 실시한 후 두 집단의 검사 결과를 채점하여 양측 검정(t-검정)을 하였고, 모든 자료 분석은 개인용 컴퓨터의 윈도우용 패키지인 SPSS를 이용하여 처리하였다. 실험반과 비교반의 곱셈 능력의 차이에 대한 결과는 <표 7>과 같다.

곱셈 문제 장면의 모델화 수업을 적용한 집단과 전통적인 수업을 실시한 집단에서 실험처치가 이루어지기 전에 실시한 사전 검사의 점수를 이용하여 두 집단간의 동질성을 검증해 보았다. 그 결과 유의수준 0.446이므로 사전 두 집단 간에는 유의미한 차이가 없는 동질 집단이라고 할 수 있다.

사후 검사에서의 두 집단 간의 차이는 <표 7>에서와 같이 유의수준이 0.018로 통계적으로 유의미한 차이를 보이므로, 문제장면의 모델화를 적용한 집단의 연산 능력이 더 향상됨을 알 수 있다.

이를 통해 학생들이 다양한 문제 장면을 모델화하는 과정에서 곱셈의 문제 장면을 스스로 인식하고 곱셈이 사용되는 장면을 많이 접해 봄으로써 다양한 곱셈 문제 장면에 익숙해졌기 때문으로 보인다. 또한, 의사소통 및 사고력 강조, 곱셈이 사용되는 다양한 문제 장면을 통한 곱셈 의미 이해에 초점을 둔 수업을 한

실험반이 반복적인 곱셈 연산자 선택을 요구하는 전통적인 수업을 실시한 비교반보다 연산 능력에서 높은 성취도를 보였다는 것은, 다양한 문제 장면의 모델화를 적용한 새로운 교수·학습 방법의 도입으로 학생들의 곱셈 연산 능력을 충분히 향상시킬 수 있다는 것을 시사한다.

학생들은 다양한 곱셈의 문제 장면을 접해 봄으로써, 곱셈이 동수누가의 표현임을 스스로 깨닫게 되었다. 처음 곱셈 수업을 시작하면서 곱셈의 문제 장면을 예를 들어 보도록 하였을 때는 <그림 14>와 같은 반응이 있었으나, 서로 의사소통을 하면서 곱셈이 덧셈에서 시작되었지만 모든 덧셈을 곱셈으로 나타낼 수는 없으며 동수(同數)를 반복해서 더하는 경우에만 곱셈으로 나타낼 수 있음을 알게 되었는데 <그림 15>에 잘 나타나 있다.

다양한 곱셈 알고리즘의 표현이 가능하게 되었다. 여러 문제 장면을 모델로 표현한 후, 곱셈을 여러 가지 식으로 나타내도록 하였는데 학생들은 의미있는 방법으로 <그림 16>과 같은 곱셈식을 여러 가지 방법으로 표현하였다. 이는 문제장면을 의사소통하고 곱셈 문제 장면을 자신의 지식망에 적절하게 연결시켜 모델로 표현한 결과로 해석할 수 있다.

또, 학생들은 3×6의 상황을 동수누가와 곱셈, (3×5)+3=18로 나타내기도 하였다. 물론, 수식 표현 중에 괄호를 사용한 것은 아니었으나, 문제의 장면을 자기 나름대로 해석함으로써 여러 가지 수식을 사용한 것은 문제 장면을 나름대로 모델링한 것으로 결과라 생각된다.

<표 7> 실험반과 비교반의 곱셈 능력 검사 결과

구 분	사 전			사 후		
	인원수	평 균	표준편차	인원수	평 균	표준편차
실험반	40	8.500	1.7097	40	8.575	1.3939
비교반	40	8.775	1.4934	40	7.725	1.7393
t 값	-0.766			2.412		
유의수준	0.446			0.018*		

우리 반 남학생과 여학생은 몇 명이고 남학생과 여학생은 모두 몇 명일까요?

<그림 14> 덧셈 장면을 곱셈 장면으로 오해한 사례

1조에 4명씩 구성되어 있습니다. 1반에서 8반까지 한 조씩 더하면 모두 몇 명입니까?

곱셈식 : 4×8=32 답 : 32 명

덧셈식 : 4+4+4+4+4+4+4+4=32 답 : 32 명

<그림 15> 동수누가의 곱셈 장면을 식으로 표현

3+3+3+3+3+3=18	5+5+5+5+5+5+5+5=40
3×6=18	5×8=40
(3×5)+3=18	(5×1)+(5×7)=40, (5×7)+5=40

<그림 16> 곱셈의 다양한 알고리즘 표현

학생들 중에는 학원에서 곱셈을 미리 공부해서 곱셈의 의미와는 무관하게 기계적으로 구구단을 외우고 있는 경우도 있었다. 그런 경우, 동수누가의 장면을 학습할 때 5×8과 8×5는 결과가 같기 때문에 같다고 하였는데, 비율의 문제 장면을 공부하면서, 그 생각이 조금씩 바뀜을 알 수 있었다. 학생들은 5×8은 서랍이 5개씩 있는 서랍장이 8개 있는 것이고, 8×5는 서랍이 8개씩 있는 서랍장이 5개 있는 것이라고 하였다. 이는, 비율의 문제 장면에서 곱셈의 교환법칙이 성립하지 않음을 이해하게 되었기 때문이다. <표 9>처럼 학생은 곱셈의 교환법칙에 대해 나름대로의 생각을 가지고 있음을 알 수 있다.

<표 8> 다양한 곱셈 알고리즘을 고안한 사례

・활동 문제를 그림으로 나타내고, 식으로 나타내어 보자.

교 사	학 생
• 준영이가 산 사탕은 1봉지에 몇 개가 들어 있나요?	• 3개.
• 준영이는 가게에서 사탕을 몇 봉지 샀나요?	• 6봉지.
• 준영이가 산 사탕을 그림으로 나타내어 보자.	• (다양한 모델) : 묶음 모델, 수직선 모델, 정렬 모델
• 그림으로 나타낸 것을 식으로 나타내어 보자.	• (다양한 식) : 3+3+3+3+3+3=3×6=18, 3×5+3=18
• 3×6=18은 무엇이니?	• 예, 준영이가 사탕을 한꺼번에 6봉지 샀어요.
• 그렇구나!	
• 3×5+3=18은 무엇이니?	• 그건요. 준영이가 사탕 5봉지만 샀는데, 1봉지를 깜박했어요. 그래서 다시 가게로 가서 사탕 1봉지를 산 거에요. 그러니까, 3×5, 5봉지 사고, 1봉지를 사니까, 또 3개가 들어 있잖아요.

<표 9> 곱셈의 교환 법칙을 나름대로 이해하고 있는 사례

・상황

서랍이 5개 달린 서랍장이 8개 있습니다. 서랍은 모두 몇 개입니까?

・활동

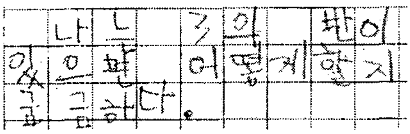
문제를 그림으로 나타내고, 식으로 나타내어 보자.

교 사	학 생
• (학생 A에게) 5×8=40은 무엇이니?	• (학생 A) : 예, 서랍장 1개에 서랍이 5개씩 있으니까, 8번하면 모두 40개에요.
• 그렇구나!	
• (학생 B에게) 8×5=40은 무엇이니?	• (학생 B) : 음, 서랍장 1개에 서랍이 5개씩 있으니까, 8번하면 모두 40개에요.
• (전체 학생들에게) 그럼, 5×8과 8×5는 같은 뜻일까요?	• (학생 B) : 예, 5개씩 8이면 40이니까 5×8과 8×5는 모두 40이기 때문에 같아요.
• (전체 학생들에게) 그럼, 어떤 학생이 문제를 풀었는데 문제를 잊어버리고 8×5만 있었어요. 그럼 나중에 그 식을 보고 전에 풀었던 문제는 무엇이라고 생각할까요?	• (학생 C) : 서랍이 8개 달린 서랍(장)이 5개 있었다고 생각할거에요.
• 그럼, 5×8과 8×5는 같은 식인가요?	• (학생 B) : 아뇨, 다른 거 같아요.

비교의 문제 장면에서 기준량에 대해 "~의 ~배"라는 개념을 어려워하는 학생이 많았는데, <그림 17>에 제시되어 있는 것처럼 학생들은 4의 3배를 4와 4×3의 합으로 오해하는 경우가 많았다. 이는 지금까지 덧셈과 뺄셈을 표현하는 모델이 더해지는 수와 빼지는 수처럼, 처음의 수를 항상 나타내기 때문에 발생하는 오류로 보인다. 이러한 경향은 시간이 지나면서 자연스럽게 없어졌다. 또, 호기심이 풍부하고 수학에 관심이 많은 한 학생은 기준량이 3일 때, 곱하는 수가 분수이면 어떻게 되는지 궁금해 했는데 <그림 18>과 같은 반응을 보였다.

문제 상황 : 수진이는 연필이 3자루 있고 종수는 수진이가 가진 연필의 4배가 있습니다.
학 생 : 수진이는 연필이 3자루 있고 종수는 수진이가 가진 연필보다 4배 더 많습니다.

<그림 17> 비교 문제의 장면을 바르게 이해하지 못한 사례



<그림 18> 정수의 곱셈을 분수의 곱셈으로 확장시킨 사례

이는 학생이 문제 장면을 자신의 상황으로 내면화하여 자신을 그 일부로 생각하였기 때문인 것 같다. 비록 분수로 표현한 것은 아니지만, 이러한 결과가 고학년에서 다루게 될 분수의 곱셈으로 연결될 수 있다면 도움이 될 것이다.

V. 결론

본 연구 결과 지필을 이용한 곱셈 알고리즘을 도입하기에 앞서 곱셈이 이루어지는 경우를 인식하고 모델을 통한 곱셈 원리를 이해한 후, 지필 알고리즘으로 지도하는 것이 바람직하다. 이를 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

첫째, 곱셈적 사고력의 획득은 다양한 문제 장면 중에서 정렬 장면을 이용하는 것이 유효하다.

둘째, 곱셈이 이루어지는 다양한 장면의 경험은 곱셈 개념의 표상에 긍정적인 영향을 미친다.

셋째, 곱셈 장면의 모델화는 학생 스스로 알고리즘을 고안할 수 있도록 하며, 이는 곱셈 능력 신장에 긍정적인 영향을 미친다.

넷째, 학생 스스로 표상한 모델과 알고리즘은 학생의 개별적인 곱셈적 사고 수준을 판단하는데 유용하다.

참 고 문 헌

남승인 · 류성림 (2002). 창의적인 문제 해결력을 기르기 위한 문제 해결 전략 지도의 실제. 형설출판사. 14

류순선 (1996). 국민학교 저학년 아동의 곱셈 · 나눗셈의 사용전략 분석. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

이준자 (2001). 초등학생들의 곱셈적 사고에 대한 조사 -1~5학년을 중심으로. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

전평국 (1998). 초등 수학 교육 이론과 실제. 교학사. 85-86

조완영 (2000). 알고리즘 어떻게 가르칠 것인가?, 한국수학교육학회지 <시리즈 A> **39(1)**, 49-58

초등학교 교육과정 해설 IV(1999). 교육부. 39

Baroody, J. & Coslick, T. (1998). *Fostering Children's Mathematical Power:* An Investigative Approach to K-8 Mathematics Instruction. Lawrence Erlbaum Assoc. 15-17

Carpenter, P. et al (1999). *Children's Mathematics Cognitively Guided Instruction.* Heinemann(Txt). 9

Cuoco, A. & Curcio, F. (2001). 2001 Yearbook, *The Roles of Representation in School Mathematics*, NCTM, 53

Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (1989). NCTM, 62-63

Eves, H.(저), 허 민 · 오혜영 공역 (1995). 수학의 기초와 기본 개념, 경문사, 198-199, 216-217

Hatfield, M. (2000). *Mathematics Methods for Elementary and Middle school Teachers*(4th Edition) John Wiley & Sons

Hiebert, J.. (1986). *Procedual and Conceptual Knowledge,* In P. Carpenter (Eds;) Conceptual Knowledge as a Foundation for Procedual Knowdge. Lawrence Eulbaum Assoc, 113-132

Kennedy, M., et al. (2000). *Guiding Children's Learning of Mathematics.*

Maurer, S. B. (1998). What is an algorithm? What is an answer? In L.J. Morrow & M.J. Kenney(Eds.) The Teaching and Learning of algorithms in School Mathematics, Reston, VA: National Council of Teachers Mathematics, 21-31

Musser, G. & Willam, B. (1999). *Mathematics for Elementary Teachers,* Fourth Edition. 98-100, 105

Principles and Standards for School Mathematics(2000), NCTM

Schwieger, R. D. (1999). Teaching Elementary School Mathematics, Wadsworth Publishing Company

Van de Walle, A. (1998). *Elementary and Middle School Mathematics.* Third Edition. Virginia Commonwealth University. 118, 126

Whitebread, D. *Emergent Mathematics or How to help.* Children's Mathematical Thinking in the Primary Years: Perspective on Children's Learning, Edited by Julia Anghileri. Press. 24

The Effect on Multiplicative thinking and Multiplicative ability by the Instruction of Modeling Problem Situations

Nam, Seung In
Deagu National University of Education
Sinam@dnue.ac.kr

Soe, Chan Sook
Deagu Youngsun Elementary School
joseo@kebi.com

This study is intended to investigate the effect on the development of multiplicative thinking and multiplicative ability by teaching repeated addition, rate, comparison, area-array, and combination problems.

Two research questions are established: first, is there any difference of multiplicative thinking between the experimental group(the modeling of problem situation learning group) and the control group(the traditional learning group)? Second, is there any difference of multiplicative ability between the experimental group and the control group?

The treatment process for the experimental group is based on modeling problem situations for nine lesson periods. In order to answer the research questions the chi-square analysis was used for the first research question and the t-test was used for the second one.

The findings are summarized as follows: there is no significant difference of multiplicative thinking between the experimental and the control group but there is significant difference of multiplicative ability.

* ZDM classification: F42

* MSC2000 classification: 97D40