

축 방향으로 이동하는 열탄성 보의 스펙트럴요소해석

Spectral Element Analysis of an Axially Moving Thermoelastic Beam

김도연¹ · 권경수¹ · 이우식²

Doyeon Kim · Kyungsoo Kwon · Usik Lee

Abstract

The use of frequency-dependent spectral element matrix(or exact dynamic stiffness matrix) in structural dynamics may provide very accurate solutions, together with drastically reducing the number of degrees of freedom to improve the computation efficiency and cost problems. Thus, this paper develops a spectral element model for the coupled thermoelastic beam which axially moves with constant speed under a uniform tension. The accuracy of the spectral element model is then evaluated by comparing the natural frequencies obtained by the present element model with those obtained by the conventional finite element model.

Keywords : Thermo-elastic Beam(열탄성 보), Moving Beam(이동하는 보), Spectral Element Model(스펙트럴요소 모델), Vibration(진동), Temperature(온도), Natural Frequency(고유진동수)

1. 서론

급격한 온도 변화에 따른 구조물의 동특성 변화는 관련된 여러 공학 분야에서 매우 중요한 연구 분야의 하나이다. 예를 들면, 항공기가 빠른 속도로 비행할 때 공기에 의한 가열이 열응력을 발생시켜 이는 항공기 구조물의 강성을 저하시킬 수 있다. 원자로의 경우 원자로 내부가 갖는 높은 온도와 온도구배 환경은 원자로 내부 구조물의 설계와 운영에 크게 영향을 미치는 사항이다. 도금 강판의 제조과정에서 강판이 고온의 용융 도금 탕을 거친 후 찬 공기에 의해 냉각되는 과정에서 열 충격(thermal shock)으로 발생하는 강판의 진동은 도금 강판의 품질을 저하시킬 수 있다. 철도공학에서 레일의 열팽창과 수축에 의해 발생하는 문제 또한 매우 중요한 열탄성(thermoelasticity) 문제의 하나이다.

Danilovskaya[1]는 반무한 탄성체에 열 충격이 가해지는 경우의 비연성 열탄성(uncoupled thermoelasticity) 문제를 다룬 최초의 연구자이다. 그 이후 Biot[2]이 탄성변형이 온도에 영향을 주지 않는다는 비연성 열탄성 이론의 모순

을 제거하기 위하여 연성된 열탄성(coupled thermoelasticity) 이론을 유도하였다. 열 충격에 의해 발생하는 보와 평판의 진동문제를 다룬 초기 연구자로서 Boley와 Barber[3]와 Kovalenko[4] 등이 있는데 이들은 온도장과 구조물의 변형 사이의 상호 연성을 고려하지 않았다. 온도장과 구조물의 변형 사이의 상호 연성을 고려하여 보와 평판의 진동 문제를 다룬 연구자는 Massalas 등[5,6]으로서 이들은 해석 과정에서 Laplace 변환법을 사용하였다. Eslami와 Vahedi[7]는 연성된 열탄성 보 문제에 유한요소법을 적용하였으며, 최근에는 Mukherjee와 Sinha[8]가 복합재료 평판에 열 충격이 가해지는 경우에 대한 연성된 열탄성 유한요소해석을 수행하였다.

지금까지 발표된 보와 평판의 열탄성 문제에 관한 연구들을 살펴보면 대부분의 연구에서 보나 평판이 정지 상태에 있는 경우에 관한 것이며, 이들이 축 방향으로 이동하는 경우에 대한 연구는 아직까지 찾아볼 수 없다. 따라서, 본 연구에서는 장력을 받으면서 축 방향으로 일정한 속도로 이동하는 경우의 열탄성 보에 대한 스펙트럴요소 모델을 유도하여 진동특성을 고찰하고자 한다.

1 인하대학교 대학원 기계공학과

2 정회원, 인하대학교 기계공학과 교수, 연락처자

2. 운동방정식

길이 L , 두께 h 인 얇은 보가 축 방향으로 장력 N_x 를 받으면서 x 방향으로 일정한 속도 c 로 이동하는 경우를 생각한다. 보의 단위 부피당의 질량은 ρ , 탄성계수는 E , 포아송의 비는 ν 이다. 보의 굽힘 변위를 $w(x, t)$ 라 할 때 보의 운동에너지 T 와 탄성변형 에너지 U 는 다음과 같이 주어진다.

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^L \left[c^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - M_T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dx \quad (1)$$

여기서,

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$M_T = \frac{E a}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Delta T z dz \quad (2)$$

식 (2)에서 $\Delta T = T - T_0$ 이며 T_0 는 절대 기준온도이다. 분포하중 $f(x, t)$ 와 경계에서의 전단력과 굽힘 모멘트에 의한 가상일(virtual work)은 다음과 같이 주어진다.

$$\delta W = \int_0^L f(x, t) \delta w dx + M_1 \delta \phi_1 + M_2 \delta \phi_2 + Q_1 \delta w_1 + Q_2 \delta w_2 \quad (3)$$

여기서 $f(x, t)$ 는 분포하중이며, (M_1, Q_1, ϕ_1) 와 (M_2, Q_2, ϕ_2) 는 각각 $x = 0$ 과 $x = L$ 에서의 모멘트, 전단력, 기울기 나타낸다. ϕ_1 과 ϕ_2 는 기울기로서 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_1(t) = \frac{\partial w(0, t)}{\partial x}, \quad \phi_2(t) = \frac{\partial w(L, t)}{\partial x} \quad (4)$$

축 방향으로 이동하는 열탄성 보의 운동방정식과 경계조건은 다음의 해밀턴 원리(Hamilton's principle)로부터 유도할 수 있다.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W) dt = 0 \quad (5)$$

식 (1)과 (3)을 식 (5)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + f(x, t) \right\} \delta w dx dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \{ -Q(x, t) \delta w|_0^L + Q_1 \delta w_1 + Q_2 \delta w_2 \} dt + \int_{t_1}^{t_2} \{ M(x, t) \delta \theta|_0^L + M_1 \delta \phi_1 + M_2 \delta \phi_2 \} dt = 0 \quad (6)$$

여기서 $M(x, t)$ 과 $Q(x, t)$ 는 모멘트와 전단력으로서 각각 다음과 같이 정의된다.

$$Q(x) = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \rho h c \left(\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} \right) + N_x \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial M_T}{\partial x}$$

$$M(x) = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_T \quad (7)$$

식 (6)으로부터 이동하는 연성된 열탄성 보에 관한 운동방정식과 경계조건을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

$$\{ w(0) = w_1 \quad \text{or} \quad Q(0) = Q_1 \},$$

$$\{ \phi(0) = \phi_1 \quad \text{or} \quad M(0) = -M_1 \} \quad \text{at } x = 0$$

$$\{ w(L) = w_2 \quad \text{or} \quad Q(L) = -Q_2 \},$$

$$\{ \phi(L) = \phi_2 \quad \text{or} \quad M(L) = M_2 \} \quad \text{at } x = L \quad (9)$$

온도장(thermal field)에 관한 지배방정식은 에너지 보존 법칙으로부터 다음과 구할 수 있다[9,10].

$$-k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \rho c_p c \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T_0 \alpha E}{1-\nu} \left[-z \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} + \frac{(1+\nu)\alpha}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial t} \right] = 0 \quad (10)$$

여기서 k 는 열전도율(thermal conductivity), c_p 는 비열, α 는 열팽창 계수이다. x 방향에 대한 열 유동(heat flux) q_x 는 다음과 같이 정의된다.

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p c T \quad (11)$$

식 (8)과 식 (10)의 지배방정식을 살펴보면 본 논문에서 다루고자 하는 문제는 구조물의 변위와 온도장이 상호 연성되어 있는 연성된 열탄성 문제임을 알 수 있다.

3. 스펙트럴요소해석

이동하는 연성된 열탄성 보의 진동응답을 다음과 같이 스

팩트럴 형태로 나타낼 수 있다.

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N W_n(x) e^{i\omega_n t}$$

$$T(x, z, t) = \sum_{n=1}^N \overline{T}_n(x, z) e^{i\omega_n t} \quad (12)$$

여기서 $W_n(x)$ 와 $\overline{T}_n(x, z)$ 는 주파수 $\omega_n = 2\pi n/T^*$ ($n = 1, 2, \dots, N$)에 각각 대응하는 Fourier계수이다. N 은 스펙트럴 해석에 사용하는 Fourier계수의 수를 나타내며, T^* 는 시간 창(time window)을 나타낸다. N 과 T^* 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$N = 2f_{NQ}T^* \quad (13)$$

여기서 f_{NQ} 는 Nyquist 주파수이며 단위는 Hz이다. 식 (12)에 사용된 아래첨자 n 과 합산기호는 표현의 간략화를 위해 앞으로 생략한다. 식 (8)과 (10)에 식 (12)를 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$D \frac{d^4 W}{dx^4} + (\rho h c^2 - N_x) \frac{d^2 W}{dx^2} + 2i\rho h c \omega \frac{dW}{dx}$$

$$- \rho c \omega^2 W + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{E \alpha}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{T}_z dz \right) = 0 \quad (14)$$

$$-k \left(\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial z^2} \right) + \rho c_p c \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} + i\rho c_p \omega \overline{T}$$

$$+ i\omega \frac{T_0 \alpha E}{1-\nu} \left[-z \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{(1+\nu)\alpha}{1-2\nu} \overline{T} \right] = 0 \quad (15)$$

식 (15)의 일반해를 다음과 같이 가정한다.

$$\overline{T}(x, z) = \Theta(x)Z(z) \quad (16)$$

여기서 $Z(z)$ 는 두께방향의 경계조건을 만족하는 선택된 함수이고 $\Theta(x)$ 는 해석적으로 결정해야 하는 미지의 함수이다. 식 (16)을 식 (15)에 대입하고 $Z(z)$ 를 곱한 후 적분을 하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다[11,12].

$$\frac{d^2 \Theta}{dx^2} - \frac{c}{\beta} \frac{d\Theta}{dx} - \left[-\zeta_2 + i\omega \left(\frac{1}{\beta} + \frac{(1+\nu)\alpha\eta}{1-2\nu} \right) \right] \Theta$$

$$+ i\omega\eta\zeta_1 \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \quad (17)$$

여기서

$$\beta = \frac{k}{\rho c_p}, \quad \eta = \frac{T_0 \alpha E}{k(1-\nu)}$$

$$\zeta_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z(z)^2 dz$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{\zeta_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z(z) z dz$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{\zeta_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z(z) \frac{d^2 Z}{dz^2} dz \quad (18)$$

식 (16)을 식 (14)에 대입하면

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \left(c_D - \frac{N_x}{D} \right) \frac{d^2 W}{dx^2} + 2i c_D \Omega^2 \frac{dW}{dx}$$

$$- \Omega^4 W + \frac{E \alpha \zeta_0 \zeta_1}{D(1-\nu)} \frac{d^2 \Theta}{dx^2} = 0 \quad (19)$$

여기서

$$c_D = c \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad \Omega^2 = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (20)$$

식 (17)과 식 (19)의 일반해를 다음과 같이 가정한다.

$$W(x) = A e^{\lambda x}, \quad \Theta(z) = A e^{\lambda z} \quad (21)$$

여기서 λ 는 파수(wave number)이다. 식 (21)을 식 (17) 및 식(19)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 형태의 행렬식을 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

여기서

$$a_{11} = \lambda^4 + \left(c_D^2 + \frac{N_x}{D} \right) \lambda^2 + 2i c_D \Omega^2 \lambda - \Omega^4$$

$$a_{12} = \frac{E \alpha \zeta_0 \zeta_1}{D(1-\nu)}$$

$$a_{21} = i\omega\eta\zeta_1 \lambda^2$$

$$a_{22} = \lambda^2 - \frac{c}{\beta} \lambda \left[\zeta_2 - i\omega \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\alpha\eta(1+\nu)}{1-2\nu} \right) \right] \quad (23)$$

식 (22)가 non-trivial해를 갖기 위한 조건으로부터 다음의 특성방정식을 유도할 수 있다.

$$\lambda^6 + C_1 \lambda^5 + C_2 \lambda^4 + C_3 \lambda^3 + C_4 \lambda^2 + C_5 \lambda + C_6 = 0 \quad (24)$$

여기서

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{c}{\beta} \\
 C_2 &= c_D^2 - \frac{N_x}{D} - i\omega\left(\frac{1}{\beta} + \mu\right) + \frac{i\omega E a \eta \xi_0 \xi_1^2}{D(1-\nu)} + \xi_2 \\
 C_3 &= \frac{cN_x}{\beta D} + 2i c_D \Omega^2 - \frac{c}{\beta} c_D^2 \\
 C_4 &= i\omega \frac{N_x}{D} \left(\frac{1}{\beta} + \mu\right) - i \frac{c_D}{\beta} (\omega c_D + 2c \Omega^2) \\
 &\quad - i c_D^2 \mu + \xi_2 \left(c_D^2 - \frac{N_x}{D}\right) - \Omega^4 \\
 C_5 &= \frac{c}{\beta} \Omega^4 + c_D \Omega^2 \left[2\omega\left(\frac{1}{\beta} + \mu\right) - 2i \xi_2\right] \\
 C_6 &= \frac{c}{\beta} \Omega^4 + c_D \Omega^2 \left[2\omega\left(\frac{1}{\beta} + \mu\right) - 2i \xi_2\right] \\
 C_7 &= \Omega^4 \left[i\omega\left(\frac{1}{\beta} + \mu + \xi_2\right)\right] \\
 \mu &= \frac{\alpha \eta (1+\nu)}{1-2\nu} \tag{25}
 \end{aligned}$$

식 (24)로부터 계산되는 여섯 개의 근을 이용하여 식 (17)과 식 (19)의 일반해를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$W(x) = \sum_{r=1}^6 A_r e^{\lambda_r x}, \quad \Theta(x) = \sum_{r=1}^6 \varepsilon_r A_r e^{\lambda_r x} \tag{26}$$

여기서

$$\varepsilon_r = \frac{(1-\nu)[N_x \lambda_r^2 D(\Omega^4 - \lambda_r^4) D c_D \lambda_r (2i\Omega^2 + c_D \lambda_r)]}{E a \xi_0 \xi_1 \lambda_r^2} \tag{27}$$

식 (26)을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$W = [E] \{A\}, \quad \Theta = [\bar{E}] \{A\} \tag{28}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 [E] &= [e^{\lambda_1 x} \ e^{\lambda_2 x} \ e^{\lambda_3 x} \ e^{\lambda_4 x} \ e^{\lambda_5 x} \ e^{\lambda_6 x}] \\
 [\bar{E}] &= [\varepsilon_1 e^{\lambda_1 x} \ \varepsilon_2 e^{\lambda_2 x} \ \varepsilon_3 e^{\lambda_3 x} \ \varepsilon_4 e^{\lambda_4 x} \ \varepsilon_5 e^{\lambda_5 x} \ \varepsilon_6 e^{\lambda_6 x}] \\
 \{A\} &= [A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ A_5 \ A_6]^T \tag{29}
 \end{aligned}$$

길이가 L인 가지는 보 요소에 대한 절점(node) 자유도는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
 W_1 &= W(0), \quad \phi_1 = W'(0), \quad \theta_1 = \Theta(0) \\
 W_2 &= W(L), \quad \phi_2 = W'(L), \quad \theta_2 = \Theta(L) \tag{30}
 \end{aligned}$$

여기서 (')은 공간 좌표 x에 관한 미분을 나타낸다. 식 (30)을 식 (28)에 대입하면 절점 자유도벡터 {d}와 상수벡터 {A}사이의 관계를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\{d\} = [P(\omega)] \{A\} \tag{31}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \{d\} &= [W_1 \ \phi_1 \ \theta_1 \ W_2 \ \phi_2 \ \theta_2]^T \\
 [P(\omega)] &= \begin{bmatrix} [E(0)] \\ [E'(0)] \\ [E(L)] \\ [E'(L)] \\ [\bar{E}(L)] \end{bmatrix} \tag{32}
 \end{aligned}$$

식 (31)을 식 (28)에 대입하면

$$\begin{aligned}
 W &= [E] [P]^{-1} \{d\} = [N] \{d\} \\
 \Theta &= [\bar{E}] [P]^{-1} \{d\} = [\bar{N}] \{d\} \tag{33}
 \end{aligned}$$

여기서 [N]과 [\bar{N}]는 동적 형상함수 행렬(dynamic shape function matrix)이다.

스펙트럴요소 행렬을 유도하기 위해 식 (14)와 식 (15)를 weak form으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \{DW'''' + (\rho h c^2 - N_x)W'' + 2i\omega \rho h c^2 W' \\
 - \rho h \omega^2 W + \frac{E a \xi_0 \xi_1}{1-\nu} \Theta'\} \delta W dx = 0 \\
 \int_0^L \{-k\Theta' + \rho c_p c \Theta' + [-k\xi_2 + i\omega \rho c_p + i\omega k\mu] \Theta \\
 - i\omega k \eta \xi_1 W''\} \delta \Theta dx = 0 \tag{34}
 \end{aligned}$$

식 (34)를 부분적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \{DW'' \delta W'' + [(\rho h c^2 - N_x)W' + i\omega c W'] \delta W' \\
 - \rho h (\omega^2 W - i\omega c W') \delta W + \frac{E a \xi_0 \xi_1}{1-\nu} \Theta \delta W''\} dx \\
 + M(x) \delta W'|_0^L + Q(x) \delta W|_0^L = 0 \tag{35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \{(k\Theta' - \rho c_p c \Theta) \delta \Theta' + [-k\xi_2 + i\omega \rho c_p + i\omega k\mu] \Theta \delta \Theta \\
 - i\omega k \eta \xi_1 W'' \delta \Theta\} dx + H(x) \delta \Theta|_0^L = 0 \tag{36}
 \end{aligned}$$

여기서 H(x) = -k\Theta'(x) + \rho c_p c \Theta이다.

식 (33)을 식 (35)와 식 (36)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \{\delta d\}^T ([S_S] \{d\} - \{f_S\}) &= 0 \\
 \{\delta d\}^T ([S_T] \{d\} - \{f_T\}) &= 0 \tag{37}
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 [S_s] &= \int_0^L \{ D[N'']^T [N''] - (\rho h c^2 - N_x) [N']^T [N'] \\
 &\quad - i\omega c [N]^T [N] - \rho h \omega^2 [N]^T [N] \\
 &\quad + i\omega p h c ([N]^T [N'] - [N']^T [\bar{M}]) \\
 &\quad + \frac{E\alpha\xi_0\xi_1}{1-\nu} [N'']^T [\bar{N}] \} dx \\
 [S_T] &= \int_0^L \{ k[\bar{N}]^T [\bar{N}] - \rho c_p c [\bar{N}]^T [\bar{N}] \\
 &\quad + (-k\xi_2 + i\omega p c_p + i\omega k\mu) [\bar{N}]^T [\bar{N}] \\
 &\quad + i\omega k\eta\xi_1 [\bar{N}]^T [\bar{N}] \} dx \\
 \{f_s\} &= [Q_1 \quad -M_1 \quad 0 \quad -Q_2 \quad M_2 \quad 0]^T \\
 \{f_T\} &= [0 \quad 0 \quad -H_1 \quad 0 \quad 0 \quad H_2]^T
 \end{aligned} \tag{38}$$

식 (37)로부터 외력벡터 $\{d\}$ 와 절점 자유도벡터 $\{d\}$ 사이의 관계식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\{f\} = [S(\omega)] \{d\} \tag{39}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \{f\} &= \{f_s\} + \{f_T\} \\
 [S] &= [S_s] + [S_T]
 \end{aligned} \tag{40}$$

식 (39)의 $[S(\omega)]$ 는 스펙트럴요소 행렬로서 주파수의 함수이며, 기존의 유한요소에서 사용되는 유한요소의 조합 (assembly) 과정과 동일한 방법으로 스펙트럴요소 행렬을 조합하여 전체 구조물에 대한 스펙트럴 행렬을 유도할 수 있다. 전체 구조물에 대한 스펙트럴 행렬에 경계조건을 적용하면 최종적으로 다음과 같은 행렬식을 유도할 수 있다.

$$[S^g(\omega)] \{d^g\} = \{f^g\} \tag{41}$$

여기서 $[S^g(\omega)]$ 는 전체 구조물에 대한 스펙트럴 행렬이며, $\{d^g\}$ 는 전체 구조물에 대한 자유도 벡터, $\{f^g\}$ 는 전체 구조물에 대한 외력벡터이다.

4. 수치예제 및 검토

수치해석 예제로서 생각한 보의 양 끝단이 단순 지지된 균일한 보이다. 두께 방향으로의 온도에 관한 경계조건은 $z = h/2$ 에서 40°C , $z = -h/2$ 에서 20°C 의 온도를 유지하고 있다. 보의 물성치는 탄성계수 $E = 200\text{GPa}$, 포아송의 비 $\nu = 0.333$, 단위 부피당 질량 $\rho = 7800\text{kg/m}^3$ 이다. 보의 두께와 길이는 각각 $h = 0.05\text{m}$, $L = 1.5\text{m}$ 이며 축 방향으로 장력 $N_x = 60000\text{N/m}$ 이 작용하고 있다. 또한 열전도율은 $k = 46.2\text{W/m}^\circ\text{C}$, 열팽창 계수는 $\alpha = 15.1 \times 10^{-6}$, 비열은 $c_p = 0.46\text{J/Kg}^\circ\text{C}$ 이다.

유도된 스펙트럴요소 모델의 정확성을 평가하기 위하여 보가 순수 탄성인 경우와 열탄성인 두 가지 경우에 대하여 유한요소법을 이용하여 구한 고유진동수와 비교하여 보았다. 이때 사용한 유한요소 모델은 다음과 같다

$$\begin{aligned}
 [M_s] \{\ddot{d}_s\} + [C_s] \{\dot{d}_s\} + [K_s] \{d_s\} + [K_{cs}] \{d_T\} &= 0 \\
 [C_T] \{\dot{d}_T\} + [C_{cT}] \{\dot{d}_s\} + [K_T] \{d_T\} &= 0
 \end{aligned} \tag{42}$$

여기서, $\{d_s\}$, $\{d_T\}$ 는 각각 구조와 온도에 관한 절점 자유도 벡터이다. 식 (42)를 연립하여 해석하기 위하여 다음과 같이 표현하였다[8].

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} [C_T] & 0 & 0 \\ 0 & [I] & 0 \\ 0 & 0 & [M_T] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_T \\ \dot{d}_s \\ \dot{d}_s \end{Bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} [K_T] & 0 & [C_{cT}] \\ 0 & 0 & -[I] \\ [K_{cT}] & [K_s] & [C_s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_T \\ d_s \\ d_s \end{Bmatrix} = 0
 \end{aligned} \tag{43}$$

Table 1은 일반적인 탄성 보에 관한 고유진동수를 보여주고 Table 2는 연성된 열탄성 보에 관한 고유진동수를 보여준다. Table 1과 Table 2에서 알 수 있듯이 스펙트럴요소법에 의한 결과는 사용된 요소의 개수가 단지 하나임에도 불구하고 요소 수를 많이 사용한 유한요소법에 의한 해석결과와 비슷하다는 것을 알 수 있다. 즉 스펙트럴요소 모델은 유

Table 1. Comparison of the natural frequencies (Hz) for the elastic beam

Mode	FEM					SEM (1 element)
	5 elements	10 elements	20 elements	50 elements	100 elements	
1	53.65	53.65	53.64	53.64	53.64	53.64
2	214.47	214.14	214.14	214.12	214.12	214.11
3	485.38	481.82	481.58	481.56	481.56	481.56
4	875.69	857.40	856.07	855.98	855.98	855.98
5	1484.35	1342.66	1337.73	1337.39	1337.38	1337.38

Table 2. Comparison of the natural frequencies (Hz) for the thermoelastic beam

Mode	FEM					SEM (1 element)
	5 elements	10 elements	20 elements	50 elements	100 elements	
1	53.86	53.85	53.85	53.85	53.85	53.85
2	215.27	214.96	214.94	214.94	214.94	214.94
3	487.08	483.66	483.43	483.42	483.42	483.41
4	878.29	860.65	859.37	859.29	859.28	859.28
5	1484.35	1347.68	1342.88	1342.55	1342.54	1342.54

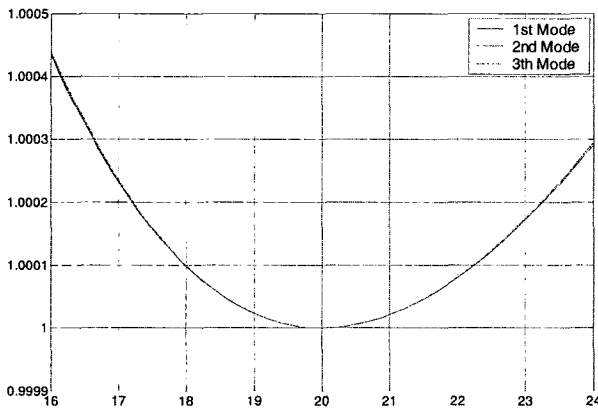


Fig. 1. The non-dimensional natural frequencies vs. the boundary temperature at $z=h/2$

한요소 모델에 비하여 훨씬 적은 수의 요소를 사용함에도 불구하고 보다 정확한 결과를 제공함을 알 수 있다.

또한 Table 2로부터 알 수 있듯이, 열탄성 보의 고유진동수가 탄성 보의 고유진동수보다 약간 높은 것을 알 수 있다. 이는 두께 방향의 온도 구배 때문에 생기는 모멘트의 영향 때문이다. Fig. 1은 $z = h/2$ 에서의 온도변화에 따른 연성된 열탄성 보의 고유진동수와 탄성 보의 고유진동수의 비를 나타낸다. $z = -h/2$ 에서의 온도 20℃와 차이가 많이 날수록 고유진동수의 비가 커짐을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 축 방향 장력을 받으면서 일정한 속도로 이동하는 연성된 열탄성 보에 대한 스펙트럴요소 모델을 유도하였다. 본 연구에서 유도된 스펙트럴요소 모델이 기존의 유한요소 모델에 비해 우수한 해석결과를 제공함을 수치예제를 통해 확인하였으며, 특히 고차모드에서 그 우수성이 뚜렷함을 확인하였다. 또한 두께 방향으로의 온도 구배에 따른 모멘트의 영향으로 온도 구배가 커지면 커질수록 고유진동수가 증가함을 확인하였다.

후 기

본 논문은 2004년도 인하대학교 지원에 의하여 연구되었음(INHA-31584).

참 고 문 헌

1. Danilovskaya, V., "Thermal Stresses in an Elastic Half-Space Due to Sudden Heating of its Boundary", Prikl. Mat. Mekh., Vol.14, 1950, pp.316-324.
2. Biot, M., "Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics", Journal of Applied Physics, Vol.27, 1956, pp.240-253.
3. Boley, B. A. and Barber, A. D., "Dynamic Response of Beams and Plates to Rapid heating", Journal of Applied Mechanics, Vol. 24, 1957, pp.413-416.
4. Kovalenko, A., Thermoelasticity, Basic Theory and Applications, Groningen, The Netherlands Wolters-Noordhoff, 1969.
5. Massalas, C., Dalamangas, A., and Tzivanidis, G., "A Note of the Dynamics of Thermoelastic Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol.81, No.2, 1982, pp.303-306.
6. Massalas, C. and Kalpakidis, V., "Coupled Thermoelastic Vibrations of a Timoshenko Beam", Journal of Appl. Engng Sci. Vol.22, No.5, 1984, pp.459-463.
7. Eslami, M. R. and Vahedi, H., "Coupled Thermoelasticity Beam Problems", AIAA Journal, Vol.27, No.5, 1988, pp.662-665.
8. Mukherjee, N. and Sinha, P. K., "Thermal Shocks in Composite Plates: A Coupled Thermoelastic Finite Element Analysis", Composite Structures, Vol.34, 1996, pp.1-12.
9. Carlaw, H. S. and Jaeger, J. C., Conduction of Heat in Solids, Oxford, London, 1959.
10. Lee, U., "Thermal and Electromagnetic Damping Analysis and Its Application", Ph.D. Thesis, Stanford University, California, 1984.
11. Bercin, A. N., "Free Vibration Solution for Clamped Orthotropic Plates Using Kantorovitch Method", Journal of Sound and Vibration, Vol.196, No.2, 1996, pp.243-247.
12. Xie, W. C. and Elishakoff, I., "Buckling Mode Localization in Rib-Stiffened Plates with Misplaced Stiffeners", Chaos, Solitons & Fractals, Vol.11, 2000, pp.1559-1574.
13. Reddy, J. N., Theory and Analysis of Elastic Plates, Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
14. Ugral, A. C., Stresses in Plates and Shells, McGraw-Hill, New York, 1999.
15. Doyle, J. F., Wave Propagation in Structures, Springer-Verlag, New York, 1997.