대한수학교육학회지 <학교수학> 제 6 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.6, No.3, 283-299. Sep 2004

수학적 모델링 과정에 포함된 추론의 유형 및 역할 분석

김 선 희* · 김 기 연**

학생들이 실제 문제 상황에서 수학을 이용하고 문제를 해결하는 것은 수학교육의 중요한 목표이다. 이 연구는 수학적 모델링이 그러한 수학 학습의 목표에 적합하다고 보고 수학적 모델링을 통해서 학생들이 어떤 수학내용을 학습하고 어떤 추론을 경험하고 사용하는지 살펴보았다. 학생들은 수학적 모델링 과정에서 학교수학에서 강조되어 왔던 연역과, 규칙성을 찾는데 기여했던 귀납 뿐 아니라 여러 유형의 가추를 사용하였다. 하나의 사례 연구를 통해 일반화할 수는 없지만, 수학적 모델링에서 연역은 수학적 모델이 옳은지 현실에 비추어 확인하는 과정에서 그리고 수학적 결과를 유도하여 해를 구할 때, 귀납은 수학적 모델이 옳은지를 실험적으로 검증해 보고자 할 때 사용되었다. 가추는 현실 모델로부터 수학적 모델을 추상화하고, 수학적 결과에 대한 현실적 근거를 제시하는 해석을 하고, 현재의 수학적 모델을 수정하여 새로운 수학적 모델을 도출하는데 사용되었다.

Ⅰ. 서 론

수학을 학습하는 이유 중 하나는 수학적 지식의 습득과 기능의 숙달을 통하여 실생활 문제를 해결하거나 다른 교과의 학습에 적극적으로 활용할 수 있기 위해서이다(교육부, 1999). 현실 상황에서 마주치는 여러 문제들은 수학을 이용하여 해결되는 경우가 많으며, 학생들이 급변하고 다양화된 사회에 적응하기 위해서는 이러한 문제해결이 수학교육에서 강조되어야 한다. 그러나 지금까지 수학교과에서의 문제해결은 수학적으로 잘 정의된 상황에서 학생들이 구한 해의 진위만을 측정하려 했기 때문에, 문제해결을 통하여 학생들이 수학의 유용성을 깨닫고 수학을 실생활에서 활용하기에는 교육적 한계가 있었다. 이에 NCTM(1989)에서는 문제해결의 한 측면으로서 수학적 모델링의 중요성을 강조하였다.

수학적 모델링은 실세계 상황에서 문제를 도출하고 그 문제를 수학적으로 해결하여 다시 현 상황으로 해석하는 과정을 거치게 하여, 학생들은 수학적 모델링을 통해 수학이 실생활에 응용됨을 알 수 있고, 현실 상황을 수학적 모델로 바꾼 후 계산하고 잘 정의된 수학문제를 해결하기 때문에 문제해결력 또한 향상될 수 있다. Lesh & Doerr(2003)는 수학 교수, 학습, 문제해결에 대한 기존의 관점이 모델과 모델링의 관점으로 변화될 것을 주장하기도 했는데, 모델과 모델링 관점을 취한다면 수학은 고정된

*이화여자대학교((ilovemath@empal.com)
**이화여자대학교대학원(freenego@lycos.co.kr)
***이 논문은 2004년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2004-030-B00049).

실체가 아니라 학생들이 추론하고 표현하여 생성해가는 것이라 여겨지고, 학생들은 기존 문제해결에서 경험하지 못했던 추론과 표현을 드러내는 것이 중요함을 깨닫게 될 것이다.

수학의 본질이 무엇인가에 대한 관점에 따라 수학교육의 내용과 방법이 달라지겠지만, 수학이 고정된 학문이 아니라 상황에 따라 해석되고 실생활의 문제를 해결하는데 유용하며 사고력 또한 신장시킬 수 있는 학문이라 한다면, 수학적 모델링은 학생들의 흥미를 돋우고 활동적인 학습 과정이 이루어질 수 있게 하는 교육의 한 방법이 될 것이다. 하지만, 수학적 모델링은 현실 상황의 문제를 다루고 해결하고 검증하고 해석하기 때문에 그를 통해서 추상적이고 형식적인 수학을 과연 배울 수 있는지, 논리적인 추론 능력이 형성될 수 있는지 고찰해 볼 필요가 있다. 즉, 학생들이 모델링에서 수학의 기본적인 지식과 기술을 학습할 수 있는지, 수학에서 강조되는 연역이나 귀납의 추론 등이 학습될 수 있는지 연구될 필요가 있다.

추론은 학생들이 가정에서 출발하여 결론에 이르기까지 논리적인 사고를 조직하는 것으로 수학적 사고와 관련한 정신 활동이다. 수학적 추론 능력은 수학 학습을 통해 신장되어야 할 목표 중 하나로, NCTM(1989, 2000)에서 학교 수학의 규준으로 선택되기도 하였는데, 본 연구에서는 추론이 수학적 모델링에서 모델의 타당성을 검증하고 그러한 표현을 생성하기 위해서 가설을 세우고 이를 검증하는데 유용할 것이며 모델링을 통해 자연스럽게 경험될 수 있을 것이라 본다.

수학적 모델링 방법을 통해서 본 연구는 학생들이 수학 개념을 확실히 알고 응용하며 논리적인 사고를 경험하는 수학적 추론 능력을 신장시킬 수 있는지 그 가능성을 탐색해 볼 것이다. 이를 위해 수학적 모델링 과정에서 수학적 추론이 어떤 유형으로 나타나고 각각 어떤 역할을 담당했는지를 살펴볼 것이다. 본 연구는 수학적 추론을 연역에 한정시키지 않고 귀납과 가추를 포함하여 이들 추론이 어떻게 활용되는지 살펴본다.

II. 이론적 배경

1. 수학 학습에서 모델링

수학 학습지도와 문제해결에 대한 관점은 모델링 관점으로 변화되고 있다(Lesh & Doerr, 2003). 전통적인 관점에서 수학이란 어떤 조건이 주어졌을 때 학생들이 무엇인가를 할 수 있다는 식의 행동주의 이론에 의해 묘사되었으나, 모델링 관점에서 수학이라는 지식은 살아있는 유기체로서 유용한 상황을 구성하고, 묘사하고, 설명하는데 사용되는 개념 체계로 인식된다. 그리고 전통적인 관점에서 문제해결은 주어진 조건으로부터 강력한 수단이 되는 해결전략을 가지고 목표에 도달하는 과정으로, 인위적이고 비실제적인 방법으로 제한된 사실과 규칙을 사용하여 질문에 답하는 것이지만, 모델링 관점에서 문제해결은 조건, 목표, 가능한 해의 경로, 사물에 내재된 패턴과 규칙을 해석하는 유용한 방법을 발전시키는 것과 관련되며, 해를 구하기 위해 서술, 설명, 예측이 점차 세련화되고 정교해지는 여러 과정이 포함된다. 즉 모델링 관점을 취한다면, 수학 학습은 수학적 모델을 만드는 것을 주축으로 하여 구체-추상, 특수-일반, 상황-탈맥락화, 직관-분석, 미분화-세련, 단편-종합과 같은 차원을 따라 구성 활동을 하는 것이다. 이때 교사의 지도는 학생들이 수학적으로 의미 있는 요인을 필요로 하고 현재의 사고 방법을 반복해서 표현하고 검

증하고 세련화하고 수정하는 경험을 신중하게 구조화하는 것에 초점을 두어야 한다.

최근 수학교육은 모델링에 많은 관심을 보이고 있으며 모델링을 수업 현장에 적용하려는 움직임을 보이고 있다. 수학적 모델링과 관련한 국내 연구를 살펴보면 모델링 지도의 가능성을 탐색하는 경향이 많았는데, 예를 들면 홍정희와 송순희(1995)는 중학교 2학년 학생들을 대상으로 수학적 모델링 문항을 개발하고 모델링을 도입한 탐구수업을 실시하였다. 수학적 모델링을 활용한 수학 탐구 수업은 전통적인 수업과 비교했을 때 교과서식 응용문제와 모델링 문제 해결에서 유의미한 효과를 거두었지만, 수학에 대한 흥미, 태도, 유용한 동기유발 검사에서는 유의적인 차이를 보이지 않았다고 한다. 권기석과 박배훈(1997)은 고등학교 수준에서 학교수학과 실생활을 관련시켜 수학적 모델링 자료를 개발하고 고등학교에서의 활용 가능성을 제시한 바 있다. 또 신은주(2000)는 실생활 문제를 통한 탐구활동에서 나타난 모델링 과정과 구성된 모델의 특징, 모델링 활동에 영향을 미치는 요인, 모델구성 능력을 촉진시키는 방법에 대하여 연구하였다. 그의 사례 연구에서 모델링 활동은 많은 예측, 가설 형성, 검토의 실험 단계를 거쳤고, 학생들은 자신이 구성한 모델의 합리성을 판단하고 증명하고, 구체적 활동과 추상적 활동 사이에서의 상호작용을 통해 상황적 의미와 수학적 의미의 연계성을 재형성했다.

지금까지 수학적 모델링과 관련된 연구가 주로 모델링 수업의 탐색과 효과 분석에 대한 것이었다면, 본 연구는 수학학습에서 모델링 관점을 취했을 때 학생들의 수학적 모델이 어떻게 발전하고 어떤 수학을 학습하게 되는지, 그를 통해 어떠한 수학적 추론이 경험되는지를 심도 있게 논의하는 것이다. 먼저, 수학적 모델링이 무엇인지에 대하여 생각해 보기로 한다.

수학적 모델링은 실세계 상황을 수학적인 용어로 묘사하고 예측하고 이에 대한 이해를 얻는 과정으로(Lege, 2003), 학생들은 모델링을 통해 주어진 문제 상황에서 수학을 활용하고 수학적 지식을 이용하여 해결 방법을 찾고 해석해내는 과정을 경험할 수 있다. 현실 상황이 너무 복잡하여 즉시 수학적으로 다루기 힘들 때, 학생들은 먼저 현실 문제를 확인하고 그것을 단순화하여 정확하고 간결하게 현실 모델로 묘사하고, 그 모델의 단어와 개념을 수학 기호와 표현으로 대치하여 수학적 모델로 만들어 문제를 해결해야 한다. 수학을 응용하고 문제 상황을 극복하고 난 후 그 문제해결 과정을 개념화하는 추상은 바로 모델링 관점에서 본 수학의 본질이라 할 수 있을 것이다.

수학적 모델링을 실행할 수 있는 문제는 수학적 개념, 알고리즘, 발견술, 기호 등의 수학적 지식이 활용되어 해결될 수 있는 것으로 학생이 선택하는 수학적 모델에 따라 여러 가지 방법으로 해결되어야 한다. 다른 영역의 지식 대신 수학이 유용하게 사용되어 문제가 해결될 수 있고, 그러한 과정에 대한 교사의 안내와 학생들의 활동이 중시되고, 해결된 산출물에 대한 수학적 평가가 이루어진다는 점에서 수학적 모델링은 문제 중심 학습(problem based learning; PBL) 등의 교육 프로그램과는 차별된다고 할 수 있다.

2. 수학적 모델링의 과정

수학적 모델링은 복잡한 현실 상황에서 특정한 문제를 제안하면서 시작되는 다단계의 과정이다. Maki와 Thompson(1973; Kehle, 1998, 재인용)은 학생들이 문제에 포함된 주요 개념을 확인하여 단순화시키고, 형식적인 수학 개념을

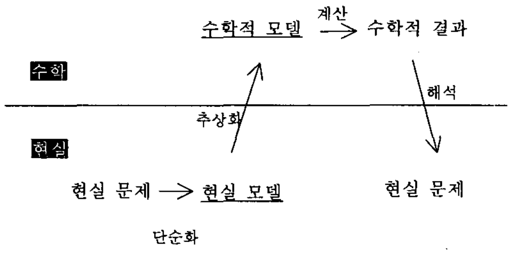
도입하여 추상화하고, 수학적 표현을 조작하고 결론을 유도하며, 문제의 해에 대한 해석을 내리는 단계를 모델링 과정에 필수적인 것으로 보고 있다. 각각의 단계를 자세히 설명하면 첫째, 단순화 단계는 그 문제에 가장 직접적으로 관여될 것 같은 주요 개념을 확인함으로써 복잡한 환경을 단순히 하는 것이다. 이 단계에서 학생들은 필수적인 수학 개념이 문제 상황과 어떻게 연결되는지를 인식하면서 무엇이 무시될 수 있는지 결정하며, 현실 모델을 만들게 된다. 현실 모델은 원래 상황보다 조사하고 조작하고 이해하기에 더 쉽다. 모델을 만드는 사람은 모델의 구성에서 세세한 것을 생략하여 부적절한 이해나 잘못된 해에 도달할 위험을 겪기도 하므로, 조작의 용이함과 모델의 타당성 사이에서 효율적인 균형을 맞추어야 한다.

다음은 형식적인 수학 개념을 도입하는 추상화 단계이다. 이 단계는 현실 모델의 필수적인 특징을 표현하기 위하여 수학 개념을 선택하는 것을 포함한다. 종종 추상화 단계에서 학생들은 주어진 표현이 후속적인 계산에서도 가능한 것인지 생각해야 한다. 문제를 수학의 상징체계로 명확히 표현하는 것은 수학적 모델을 구성하는 것이다. 일단 문제 해결자가 원래 상황을 수학적으로 표현하고 그 표현과 관련된 특정한 수학적 문제를 생성한다면, 그 수학적 모델은 그 자체로 의미가 있다. 즉 수학적 모델은 분리되고 잘 정의된 수학문제로서 의미가 있으며 현실 맥락을 무시하는 사람에게 의미있게 제안될 수 있다. 이런 점에서 수학적 모델은 원래 문제 상황과 현실 모델보다 더 추상적이다.

수학적 모델링 과정의 세 번째 단계는 수학적 표현을 조작하고 수학적 결론을 도출하는 것이다. 이 단계 동안 학생들은 수학적 사실, 기술, 일반적인 수학적 문제해결 전략 등을 발휘한다.

수학적 모델링 과정의 마지막 단계에서 학생들은 원래 상황에 의해 수학적 결론을 해석하고 그 가치를 판단한다. 이 단계는 수학적 표현과 그로부터 연역된 결론이 원래 문제에 의해 의미 있다고 확신하는데 있어 중요하다. 이 단계는 해의 의미를 반성하는 문제해결의 마지막 단계와 유사하다. 종종 수학적 표현은 원래 문제의 맥락에서 분리되며, 수학적 해를 해석하는 것은 항상 단순한 문제가 아니다.

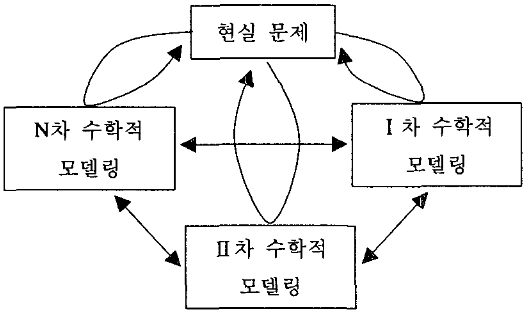
이러한 수학적 모델링 과정을 정리하면 아래의 [그림 Ⅱ-1]과 같다. 이것은 Kehle & Lester(2003)가 수학적, 비-수학적 맥락을 분리한 것을 참조하여, Maki와 Thompson의 모델링 순환 과정을 수학 세계와 현실 세계를 넘나드는 것으로 재구성한 것이다. 밑줄 친 것은 각 세계에서 생성된 모델을 말한다.



[그림 Ⅱ-1] 수학적 모델링의 1차 과정

수학적 모델링은 [그림 Ⅱ-1]과 같이 선형적으로 끝나지는 않는다. 모델링 과정에서 학생들은 지속적으로 모델이 현실 상황에 비추어 적합한지, 옳은 추론을 하고 있는지를 반성하게 되며 어떤 해를 찾았다면 그것이 적절한지에 대해 다시 생각해보면서 새로운 모델을 만드는데 참여할 수 있다. 이런 점에서 본 연구는 수학적 모델에 의해 구해진 결과가 현실 문제에 따라 해석될 때 학생들이 점차 세련되고

타당한 해를 찾아갈 것으로 보고, 여러 개의 모델링이 나타나는 [그림 II-2]의 과정을 제안한다. 현실문제에서 출발하여 I 차의 수학적 모델링을 과정을 거친 후 그 수학적 결과가 의심될 때 학생들은 II, III, ...차의 모델링을 하면서 새로운 수학적 결과에 이를 수 있다.



[그림 II-2] 수학적 모델링의 전반적 과정

3. 수학적 추론의 유형

이 절에서는 학생들이 수학 학습을 통해서 배우고 신장될 수 있는 수학적 추론이 무엇이 있는지 살펴보고자 한다. 추론의 정의는 주어진 전제들로부터 결론을 도출하기 위해 생각하거나 논증하는 것이다(이성범, 2001). Peirce는 인간에게 어떠한 정신적 행동도 귀납법, 연역법, 가추법이라는 세 가지 논증형태에 의존하지 않고서는 불가능하다는 주장을 하였다. 즉 인간의 모든 정신적 활동이 추론에 의해 설명 가능하다는 것이며, Peirce에 따르면 추론은 세 가지 형식으로 분류된다[1]. Peirce(1978; 김성도, 1997, 재인용)는 추론을 규칙과 사례, 결과에 의해 <표 II-1>과 같이 설명했다. 연역은 규칙과 사례를 통해 결과를 도출하는 추론이고, 귀납은 주어진 사례와 결과를 통하여 규칙을 도출하는 것이다. 연역과 귀납이 모두 사례를 통해 결론을 이끌어내는데 반해 가추는 결과와 규칙으로부터 사례에 대한 짐작을 하게 하는 추론이다. 가추를 통해서는 일반적인 예측을 할 수 있지만 성공할 것이라는 보장은 없다. 가추는 절대적으로 확실한 것을 도출할 수 없으며, 귀납과 마찬가지로 개연적 추론에 속하게 된다(김선희와 이종희, 2002).

<표 II-1> 세 가지 추론의 예 (김성도, 1997)

연역	규칙: 이 가방 속에 들어있는 모든 완두콩은 하얗다 사례: 이 완두콩들은 이 가방에서 나왔다 결과: 이 완두콩들은 하얗다
귀납	사례: 이 완두콩들은 이 가방에서 나왔다 결과: 이 완두콩들은 하얗다 규칙: 이 가방 속에 들어있는 모든 완두콩은 하얗다
가추	결과: 이 완두콩들은 하얗다 규칙: 이 가방 속에 들어있는 모든 완두콩은 하얗다 사례: 이 완두콩들은 이 가방에서 나왔다

연역이나 귀납은 주어진 정보 내에서 다른 것을 창조할 수 없고 기존 사실을 진술하는 것이지만, 가추는 새로운 것을 얻어낼 수 있는 창조적인 특징을 갖고 있다. 수학은 논리적인 엄밀한 상징체계로 이루어져 있어 수학에 필요한 추론이 연역뿐이라고 생각하는 경향이 많지만, 수학적 증명 뿐 아니라 수학 개념의 발명과 발견을 경험하는 수학 학습 과정에서 연역 추론 뿐 아니라 개연적 추론의 중요성이 많이 인정되고 있으며, 수학적 모델링에서도 연역과 귀납, 가추가 모두 역할을 담당할 것이다. 김선

1) Polya(1954)는 수학적 추론을 연역과 귀납 두 가지로 구분하고 귀납을 개연적 추론으로 그 범위를 넓게 두었으나 유추 등의 추론은 귀납의 논리로 설명되지 않으므로, 본 연구는 연역과 귀납이 아닌 추론을 생각한 Peirce의 추론 유형을 따라 수학적 추론을 논하기로 한다.

희와 이종희(2002)는 Polya(1954)가 언급한 일반화와 특수화를 귀납에, 유추, 은유, 환유는 가추에 속하는 추론 유형으로 구분하면서 개연적 추론에 포함시켰다.

Ho(1994)는 Peirce의 세 가지 추론이 각기 다른 장점과 단점을 갖고 있다고 했다. 추론가는 탐구를 수행하기 위해서 이 세 가지 추론을 모두 적용해야 하는데, 가추와 연역은 현상에 대한 개념적 이해에, 귀납은 양적인 검증에 사용된다고 한다. 특히 가추는 자료를 탐색하고, 패턴을 찾고, 적당한 카테고리를 사용해서 그럴듯한 가설을 제안하는데 쓰이고, 연역은 다른 그럴듯한 전제에 기초하여 논리적이고 검증 가능한 가설을 세우는 것이며, 귀납은 더 많은 탐구를 위하여 신념을 확고히 하기 위해 진리에 접근한 것이다. 즉 가추는 창조하고 연역은 설명하고 귀납은 검증하는 기능을 담당하는 추론이다. 이 절에서는 연역과 귀납 이외에 수학교육에서 많이 다루어지지 않았던 가추에 중점을 두고 수학적 추론을 논의해 보기로 한다.

가추는 수학적 문제해결에서도 등장하는데, Cifarelli(1997)는 문제의 이해와 해결 활동을 구성한 참신성에 기여하는 것으로 가추, 연역, 귀납의 추론을 강조했다. 학습자가 수학적 문제해결 상황에서 새로운 지식을 구성하는데 있어 가추는 문제해결의 발전을 촉진시켰는데, 기대하지 못했던 문제가 발생할 때 어떻게 진행해야 할지에 대하여 아이디어를 구성하는 이해 활동에 특징적이었다. 특히 새로운 탐색을 돕고 후속적인 해결 활동을 조직하고 구조화하는 것을 도왔다.

Bonfantini와 Proni(1983)는 독창성과 창의성의 증폭에 따라 가추법의 유형을 세 가지로 구분하였다. 가추는 주어진 결과를 보고 사례를 추론할 때 매개가 되는 규칙에 의존하는데, 그 규칙이 어떻게 등장한 것인지에 따라 분류되는 것이다. 첫째는 그 규칙이 의무적으로, 그리고 자동적 혹은 반자동적으로 주어지는 것이고, 둘째는 그 규칙이 여러 가지 규칙이 존재하는 곳에서 선택적으로 발견되는 것이며, 셋째는 그 규칙이 새로이 개발되고 창안되어 추측작용이 일어나는 것이라 할 수 있다. 이것은 Eco (1983)가 '지나치게 규범화된(over-coded)', '덜 규범화된(under-coded)', '창조적(creative)' 가추로 나눈 세 가지 분류에 상응한다.

지나치게 규범화된 가추는 규범화된 법칙이 자동으로 또는 반자동으로 주어지는 추론이다. 예를 들어, 영어로 /man/이라 한다면 이것은 "어른 남자"를 의미하는 것이다. 이러한 의미를 이해하기 위해서는 /man/이라는 소리를 듣고 이것이 영어단어라는 것을 가정해야 한다. 이러한 가정은 단어를 듣고 자동적으로 나온 규칙이며, 어른 남자라는 것을 추론할 수 있게 한다.

덜 규범화된 가추는, 특정한 사례가 주어질 때 동일한 수준의 개연성을 지닌 일련의 규칙 중에서 어느 한 규칙을 선택하는 것이다. 이때의 규칙은 올바른 것인지 확실하지 않고 검증을 기다리며 받아들여지고 있는 것이다. Kepler가 화성의 타원궤도를 발견할 당시, 그는 여러 기하 곡선 중에서 하나를 선택해야 했다. 우주의 규칙에 대한 가정은, 행성이 임의로 점프하지도 않고 나선이나 사인 곡선에 의해 나아가지도 않는다는 것이었고 그래서 닫혀 있는 초월 곡선만을 찾아야 했다. 여러 초월 곡선 중 타원을 선택한 것은 덜 규범화된 가추에 의한 것이었다.

특정한 사례를 암시하는 결과에 대하여 알려진 일반 법칙이 존재하지 않을 수 있다. 그때 추론가는 새로운 일반 규칙을 발명해야 한다. 새로운 일반 법칙의 발명을 포함한 가추를 Eco는 창조적 가추라고 불렀다. 창의적 가추의 예

는 확립된 과학적 패러다임을 바꾸는 혁명적인 발견에서 찾아진다(Kuhn, 1962). 창조적 가추는 규칙을 새로 만들어내기 때문에 새로운 규칙이 입증되면 새로운 발견은 패러다임의 변화를 가져올 수 있게 된다.

Eco(1983)는 이들 가추의 유형에 '메타-가추'를 추가했다. 메타-가추는 앞서의 세 가지 가추법이 기초하고 있는 세상이 우리의 경험에 의한 세상과 동일한지 아닌지를 결정하는 것과 관련되는 것이다. 수학적 발견을 이루고 난 후 그것을 검증하고자 하는 생각이 메타-가추이며, 수학에서는 후속적으로 연역을 필요로 한다. 창조적 가추는 새로운 규칙을 발명하고 이를 검증할 필요성이 지나치게 규범화되거나 덜 규범화된 가추보다 더 크기 때문에 메타-가추를 더 필요로 한다. 이러한 네 가지 유형의 가추는 기호학에서 많은 연구가 진행되어 왔지만 수학교육에서는 아직 생소한 추론이다.

Kehle & Lester(2003)는 연역, 귀납, 가추가 수학적 모델링에서 의미를 이해하는 활동에 사용된다고 설명했다. 그는 실세계의 경험으로부터 어떤 것을 나타내기 위한 기호를 사용하고 새로운 것을 설명하기 위해 기호를 생성하거나 점유하는 데에는 가추, 새로운 아이디어가 도입되지는 않지만 구문론적 규칙에 따라 기호를 조작하는 과정에서는 연역, 기호체계로부터 시작해서 의미 있게 이해되리라 여겨지는 특정한 경험에 기호를 적용하는 데에는 귀납이 사용된다고 보았다. 이를 통해 모델링 과정에서 학생들의 추론을 연역, 귀납, 가추에 의해 설명했다. 하지만 경험으로부터 기호를 나타내는 데에는 가추, 기호로부터 경험에 대한 설명에는 귀납의 추론만 사용되는 것이 아니므로, 모델링 과정에서의 추론을 그렇게 한정시켜 설명하는 데에는 무리가 있다. 일상의 경험으로부터 현실 모델이나 수학 모델을 유도하는 단순화나 추상화 뿐 아니라 현실적 경험에 대한 해석에 있어서도 가추가 사용될 수 있으며, 기호체계 내의 패턴을 찾아 일반화된 규칙을 생성하여 새로운 기호를 만드는 데에 귀납이 사용될 수도 있다. 따라서 본 연구는 여러 유형의 추론이 수학적 모델링 과정 중 어디에 나타나는지를 살펴봄으로써 각 추론의 역할을 생각해 보고자 한다. 가추는 사례에 대한 추론을 하기 때문에 모델링 과정에서 모델을 형성하는 단순화와 추상화, 그 모델이 적합한지 확인하고 수정하는 해석에 사용될 수 있을 것이며, 귀납은 수학적 모델의 타당성을 현실의 예로 여러 번 양적으로 확인하고 해석하는 경우, 연역은 수학적 모델의 계산 등에서 등장하게 될 것이다.

III. 연구 방법

1. 연구 대상

실제 수업에 모델링을 적용하기 위해서는 교사가 수업 내용을 모델링 관점에서 재구조화해야 하며, 문제해결에 비교적 긴 시간을 필요로 한다. 본 연구는 학교 정규과정 이외에 별도의 교육을 받고 있는 영재 학생들을 대상으로 수학적 모델링 수업을 실시하였다. 이 학생들은 영재교육원에서 한 차시를 90분 단위로 수업을 받는다. 서울시의 S 교육청 산하 영재교육원에 선발된 중학교 1학년 19명이 수업에 참여했으며 이들은 영재교육진흥법에 의거 서울시교육청 중점사업에 따라 교육을 받고 있다. 이 영재교육원에서는 수학영재에게 적합한 수업이 모델링임을 인식하고 모델링 관점에서 학습 지도를 하고자 노력하고 있으며, 교육을 담당하고 있는 교사들도 이에 동의하고 있다.

본 연구에 참여한 학생들은 모두 수학에 흥

미를 가지고 열심히 학업에 임하려는 자세를 가지고 있으며, 수학적 성취에서도 일반 학생의 능력을 넘어선다. 본 연구에서 시도한 모델링에서 중요한 개념인 비례 관계에 대해 이미 알고 있는 상태이며, 4명씩 그룹 활동을 했다. 집중 관찰된 4명의 학생 W, T, E, J은 한 그룹에 속해 있다.

학생 W는 기존에 배웠거나 들어본 적이 있는 사실이나 지식, 정보 등을 문제해결에 적용해보는 데에 적극적이며 자신의 생각이나 의견을 나타내거나 발표하는 것을 좋아하는 편이고, 학생 T는 문제해결에 있어서 스스로 독창적인 아이디어나 해결책을 제시하는 편은 아니지만 일단 주어진 방법이나 논리, 지식에 대해서는 이해와 적용이 빠른 편이다. 관찰 그룹에서 이 두 학생이 대부분의 상황을 이끌어갔다. 학생 E는 여학생으로 다른 학생들의 활동을 따라가는 편이며 자신의 주장이나 논리를 펴는 능력이나 의지, 기술이 부족했다. 학생 J는 또래 학생들보다 키가 매우 작아 수업의 소재가 키라는 것을 마땅하게 생각하지 않았으며 문제해결 활동을 하는 동안 거의 참여하지 않았다. 모델링의 소재를 선택함에 있어서는 학생들에게 호응될 수 있는 것을 고려해야 할 것이다.

2. 연구 절차

수업은 2004년 6월에 실시되었으며, 학생들은 수업 시간에 수학적 모델링을 처음 경험하였다. 수업은 90분 동안 진행되었으며, 지도교사는 다른 영재 학생들을 대상으로 이 수업을 한번 진행한 경험이 있다. 지도교사 이외의 연구자는 관찰 그룹에 주로 머물면서 학생들이 모델을 선택하는 과정에 개입하지 않고 연구 결과에 영향을 주는 질문을 피하면서 학습과정을 관찰하였다. 학생들의 사고 과정에 대한 자료를 수집하고 관찰하기 위해 소리 내어 사고하기를 하도록 했다. 비디오 두 대를 사용하여, 한 대는 교사에게 고정시키고 한 대는 관찰 그룹의 활동을 녹화하였다. 학생들의 수업 활동지와 보조교사의 현장노트, 비디오 녹취록을 기반으로 자료를 분석하였다.

3. 수업 내용

본 연구에서 시도한 수학적 모델링은 Purdue 대학과 Syracuse 대학의 대학원 프로그램 등에서 수업과 평가에 사용된 중학생 대상의 사례연구 문제(Lesh & Doerr, 2003)를 각색한 것이다. Big Foot이라 불리는 문제로, 학생들이 사용할 핵심적인 아이디어는 비례 관계이다. 학생들은 신문기사를 읽고 탐정이 되어 범인을 찾는 활동에 임해야 한다. 학생들에게 제시된 문제 상황은 다음 [그림 Ⅲ-1]과 같다.

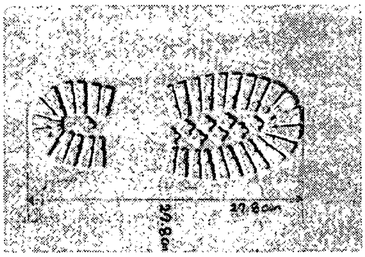
용의자의 발자국이 발견되다!!

서울시 행복구 화목동에 이상한 일이 발생했다. 어느 날부터 동네 공터에 있는 놀이터를 누군가가 망가뜨리기 시작한 것이다. 아이들이 맘껏 뛰어 놀 수 있도록 만들어 놓은 모래밭과 잔디밭이 엉망이 되기 시작했고, 매일 아침 놀이터를 찾아가 보면 주변의 나무가 한 그루씩 없어져 있었으며, 크고 작은 놀이기구들이 하나씩 망가지고 있었다.

밤마다 사람들 몰래 이곳을 찾아와 놀이터를 망가뜨리는 사람이 누군지를 밝혀내기로 한 동네 사람들은 밤새 놀이터를 지키기도 했지만 결국 그가 누구인지 밝혀내지 못한 채 놀이터는 사라져 가고 있었다. 동네 사람들은 그를 거미아저씨라고 불렀다. 그러던 어느 날 화목동 신문에 다음과 같은 특종기사가 실렸다.

지난 6월 5일 아침, 밤새 비가 내린 후 놀이터

를 찾은 아이들이 놀이터에 찍혀있는 발자국 하나를 발견했다는 제보전화가 걸려왔다. 밤새 내린 비 때문에 놀이터에 나온 동네사람이 아무도 없을 것으로 생각한 경찰은 그 발자국의 주인이 용의자(일명 거미아저씨)가 분명하다고 판단, 그를 찾기 위한 수사에 착수했다. 경찰의 기초 수사결과 용의자는 화목동 주민이 분명하며 그를 찾기 위한 수사에 S영재교육원 탐정팀도 참여한다고 밝혔다. 탐정팀은 이 수사에서 용의자의 키를 찾아내는 일을 맡았다고 한다. 하루 빨리 용의자의 신상을 파악하여 범인이 검거되기를 바란다. <S일보, 김○○ 기자>



<6월 5일 아침, 놀이터에서 발견된 용의자의 발자국>

자, 이제 거미아저씨를 찾아보자!

우리에게 주어진 단서는 이 발자국 하나뿐이다.

우리가 알아내야 할 것은 용의자의 키가 대략 얼마나 되는가 하는 것이다.

[그림 Ⅲ-1] 학생들에게 제시된 모델링 문제

문제 상황에서 용의자의 키를 알아내기 위해 학생들에게 제시된 활동 내용은 다음과 같다. 수학적 모델링 과정에 따라 학생들은 현실 모델을 만들기 위해 문제를 이해하고(①), 문제 상황을 단순화하여 현실모델을 구성하고(②), 수학적 모델을 만들기 위해 추상화를 하며(③), 계산을 하여 수학적 결과를 얻고(④), 현실 문제에 맞게 해석을 해야 한다(⑤).

① 신문기사를 읽고 무엇을 구해야 하는지 토의하라.
② 어떤 방법을 사용할 수 있는지 토의하고 고쳐야 할 부분을 생각하라.
③ 어떤 수학적 성질이 사용되었는가?
④ 찾아낸 방법을 수학적으로 표현하여 용의자의 키를 구하라.
⑤ 결과가 올바른지 생각하라.

위의 활동 내용에 따라 수업이 진행되었으며, ②와 ⑤의 활동 후에 학생들은 그룹별 결과를 발표할 기회를 가졌다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 학생들의 수학적 모델링과 학습 내용

본 연구에 참여한 학생들의 모델 발달 과정과 학습한 수학 내용을 살펴보기로 한다. 문제 상황이 주어졌을 때 학생들은 무엇을 해결해야 하는지 파악해야 한다. 학생들은 현실 문제에서 시작하여 용의자의 키를 찾아야 한다는 것을 지각하고, 주어진 발자국을 단서로 하여 키를 찾아야 한다고 생각하여 발사이즈와 키의 관계로 현실 모델을 구성했다.

관찰 그룹은 인터넷에서 본 적이 있는 신체 비율에 의해 키를 찾을 수 있다고 생각했다. 이 학생들의 첫 번째 수학적 모델은 신체 비율이었다. 학생들은 두 팔을 벌려 양손 끝까지의 거리가 키와 같고 발사이즈는 팔목에서 팔꿈치까지의 거리임을 확인한다. 각 그룹별로 키를 찾는 방법을 발표했을 때, 관찰 그룹은 신체 비율에 대한 지식을 동원해서 손끝에서 팔꿈치까지의 길이의 4배를 키로 하고 팔목에서 팔꿈치까지의 길이를 발사이즈로 하여 키가 168cm이라 했다. 어떤 조는 조원들의 발사이즈(mm)에서 키(cm)를 뺀 값의 평균을 구하고, 용의자 발 사이즈에서 이 평균을 빼서 180cm라는 키를 얻었다. 또 다른 조는 (발사이즈/키)의 평균을 구해서 용의자의 (발사이즈/평균)으로 키를 구

했으며 180cm를 얻었다.

첫 모델링 결과를 발표함으로써 관찰 그룹은 문제를 해결하는데 여러 수학적 모델이 사용될 수 있음을 알 수 있었고, 이 학생들은 원하는 결과를 얻는데 어떤 수학적 모델이 가장 타당한지 결정하고 최종적인 해를 구해야 했다. 교사는 가장 좋은 방법을 찾기 위해 좀 더 많은 자료를 조사할 것을 제안했다.

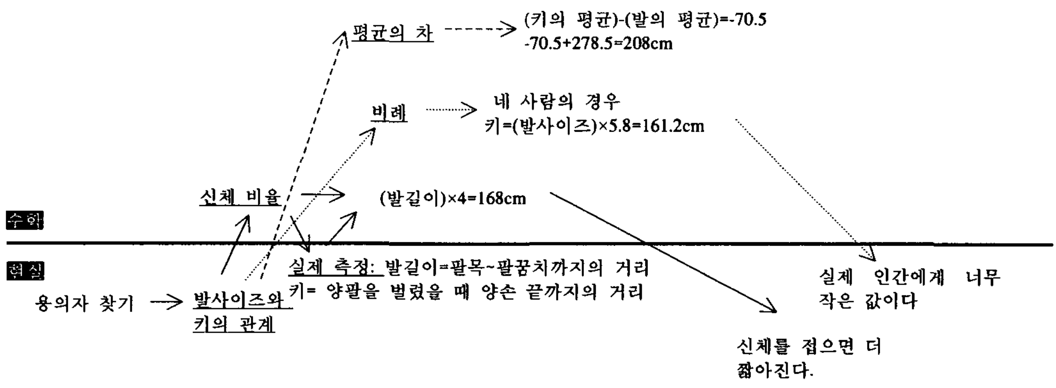
관찰 그룹은 다른 조원들의 키와 발사이즈를 더 조사했고, 신체 비율과 비례 관계 어느 것이 적합할지를 고민했다. 신체비율을 이용했을 때는 키가 손끝에서 팔꿈치까지의 거리의 4배라는 결과를 얻었고, 비례 관계를 사용했을 때는 키가 발사이즈의 5.8배라는 결과를 얻었다. 하지만 학생들이 그룹에서 선택한 최종적인 수학적 모델은 (키의 평균)-(발사이즈의 평균)의 값을 구하여 발사이즈 대신 27.8을 대입하는 것이었다.

관찰 그룹 이외의 학생들은 (키/발사이즈)의 평균(=0.62)을 계산한 후 키를 구했다. 다른 그룹은 반 전체 학생의 (발사이즈-키)의 평균(=84.2)을 가지고 신발은 발보다 크므로 10mm의 여유까지 계산하여 183.8cm의 키를 구했다. 같은 방법을 사용한 다른 조는 평균이 100이 나왔다. 학생들 중에서 발사이즈와 키의 단위를 통일시켜 계산한 사람은 아무도 없었고, 그래서 키가 발사이즈보다 작은 수치로 나오기도 했다.

학생들이 Big Foot 문제를 해결하기 위해 생각해낸 수학적 모델은 다음과 같다:

- 신체 비율:
  (발길이)=(손목뼈에서 팔꿈치까지의 거리),
  (손길이)=(발길이)×0.5
  (손끝에서 팔꿈치까지의 거리)=(발길이)×1.5
  (키)=(손끝에서 팔꿈치까지의 거리)×4
- 키=(발사이즈)×5.8.
- $\frac{\text{발사이즈}}{\text{키}}$ 의 평균
- (키의 평균)-(발사이즈의 평균)
- (발사이즈-키)의 평균.

학생들의 다양한 해에 의하면 용의자는 168~208cm의 키를 가진 사람이다. 교사는 방법이나 과정상의 몇 가지 문제점을 지적했다. 평균을 구함에 있어서의 표본 추출, 단위의 통일, 계산 등에서 오류가 있을 수 있음을 학생들은 같이 논의했으며, 학생들은 여러 번 고민하고



[그림 Ⅳ-1] Big Foot 문제의 모델링 과정

실선(______)은 Ⅰ차 모델링

점선(..........)은 Ⅱ차 모델링

긴 점선(------)은 Ⅲ차 모델링

수정하여 얻은 수학적 모델이 세련되고 타당하기 위해서는 이러한 경험에 친숙해져야 함을 깨달았다.

본 연구에서 시행한 수업의 주제는 비례 관계이므로, 중학교 1학년 학생들에게는 이미 친숙한 것이다. 하지만 학생들은 알고 있는 개념을 처음부터 적용시킬 수 없었으며 비례 관계에 의해 답을 유도한 그룹도 5개의 그룹 중에서 두 그룹뿐이었다. 이미 알고 있는 개념을 사용하여 모델링에 접근함에 있어, 학생들이 배운 개념은 필요한 상황에서 나타나지 않았다. 수학에 추상적으로 접근한 후 응용을 하는 것은 배운 내용에 대한 점검으로 다루어질 뿐, 그것이 실생활의 문제해결까지 전이되지 않을 수 있는 것이다. 수학적으로 재능이 뛰어난 영재교육원 학생들이 연구 대상이었음에도 불구하고 이런 현상이 일어났다는 것은 실생활로의 응용과 문제해결을 강조하는 수학교육이 제대로 이루어지지 않음을 보여주는 것이다. 하지만 이 모델링을 경험한 후 학생들은 비례 개념이 무엇이고 양적인 관계를 다룸에 있어 유용함을 깨닫게 되었다. 관찰 그룹은 Ⅱ차 모델링에서 비례 개념을 사용하는 경우를 보였지만 학생들은 최종 모델로 다른 것을 선택했고, 학급 전체의 발표에서 다시 비례 관계에 의한 모델로 되돌아갔다. 각 그룹마다 최종 모델을 발표하는 토의에서 학생들은 그룹 내에서 어떤 모델로의 합의가 이루어졌더라도 비례 관계에 의한 모델인 '$\frac{\text{발사이즈}}{\text{키}}$의 평균'이 가장 적합한 것으로 파악하였다. 이 과정에서 학생들은 자료를 요약하여 대표하는 값으로 평균을 선택하고 계산할 수 있었다. 그리고 학생들이 비례 관계를 추론함에 있어서 자료조사나, 평균값 계산 등 통계영역의 수학적 개념을 사용함으로써 실생활에서 발견하게 되는 비례 관계가 교과서에서 다루는 정비례의 정확한 비율과는 달리 "대략적으로" 일치하는 것이라는 것도 알게 되었다. 이는 교사가 문제를 선정할 때, 후에 통계영역에서의 상관이나 선형회귀 등의 개념과 연관된 수업을 하기 위해 의도한 부분이기도 하다.

Big Foot 문제 상황에서 관찰 그룹 학생들이 경험한 모델링 과정을 [그림 Ⅳ-1]과 같이 도식화하였다. 학생들은 모델을 현실에 맞게 해석하여 잘못된 점이 발견되었을 때 현실 모델에서부터 다시 새로운 수학적 모델을 구성하는 절차를 밟았다. 수학적으로 타당한 근거가 없는 모델을 만들었을 경우 학생들은 실험에 의존하려는 태도를 보였는데, 신체 비율에 따라 모델을 만들 때 이러한 사례가 발생했다. 그리고 수학적 결과를 해석할 때, 수치에 대한 평가만 할 뿐 모델 자체의 타당성에 대한 평가는 하지 않았다. 즉 수치가 현실에 맞지 않다고 판단될 때 학생들은 모델 자체를 바꾸는 경향이 있었다. 이것은 학생들이 수학적 모델링 경험이 부족하고 그에 대한 교사의 지도가 세세하게 이루어지지 못했기 때문으로 보인다.

2. 수학적 모델링에서의 추론

수학적 모델링 과정에서 관찰 그룹이 사용한 추론에 대해 살펴본다. 수학교육에서 중요하게 다루어지는 논리적 추론이 수학적 모델링에서 어떻게 나타나는지 그리고 각각의 추론이 어떤 역할을 담당했는지 알아보려 한다. 이 수업에서 관찰 그룹은 모델을 여러 번 수정했으나 처음에 신체 비율에 의한 모델에 가장 많은 시간을 투자했다. 신체비율에 따라 키를 추정하는 Ⅰ차 모델링과 Ⅱ차 모델링에서 나타난 추론을 집중적으로 다루어 볼 것이다.

문제 상황이 주어지고 발사이즈와 키의 관계를 찾는 것으로 현실 모델을 만든 후 학생들은

용의자의 키를 구하기 위해 어떤 방법을 사용할지 토의했다. 그룹별로 선택한 방법은 여러 가지였으며 그에 따라 구성된 수학적 모델 또한 달랐다. 교사는 발사이즈와 키의 관계를 학생들이 비례 관계에 의해 구할 것이라 예상하고 수업 활동을 계획했지만 학생들의 반응은 여러 가지였다. 발사이즈와 키의 관계를 추상화시킨 신체 비율의 수학적 모델을 구성하면서 학생들은 그룹별로 키를 구할 수 있는 여러 수학적 관계 중에서 하나를 선택했으며, 이것은 덜 규범화된 가추를 사용한 것이라 할 수 있다. 연구 대상 그룹은 덜 규범화된 가추에 의해 신체 비율을 수학적 모델로 선택했고 이 모델이 옳은 것인지를 확인하기 위해 현실 세계로 가서 해석해 볼 때는 자신들의 신체 사이즈를 쟀다. 이때 학생들은 신체 사이즈의 사례에서 나온 결과를 가지고 규칙을 만드는 귀납 추론을 하고 있었다.

4. T: (자로 손의 길이를 재어보면서) 아니잖아...
13. W: (자기 발과 팔길이를 재어보면서) 맞는데?
26. (T와 W가 양팔 간격의 거리를 실제로 측정함.)
27. W: 내 키랑 1cm 밖에 차이가 안 나.

신체 비율 모델에 의해 나온 키가 생각보다 작자 학생 T는 용의자가 나무를 소리 없이 뽑는 사람이니 아마 역도 선수였을 것이고 그래서 키가 작을 수도 있다는 추론을 한다. 나무를 톱으로 자르지 않고 뽑을 수 있다고 해서 그 사람이 역도선수라고 할 수는 없을 것이다. 하지만 학생 T는 나무를 뽑았다는 결과에 대해 역도선수는 나무를 뽑을 수 있다는 규칙을 적용하여 용의자는 역도선수와 같은 사람으로 키가 작다는 사례에 대한 추론을 한 것이다. 키가 작다는 것에 역도 선수라는 규칙을 만들어 적용했다는 점에서, 모델을 뒷받침하는 근거를 찾을 때의 학생 T의 추론은 창조적 가추에 해당한다.

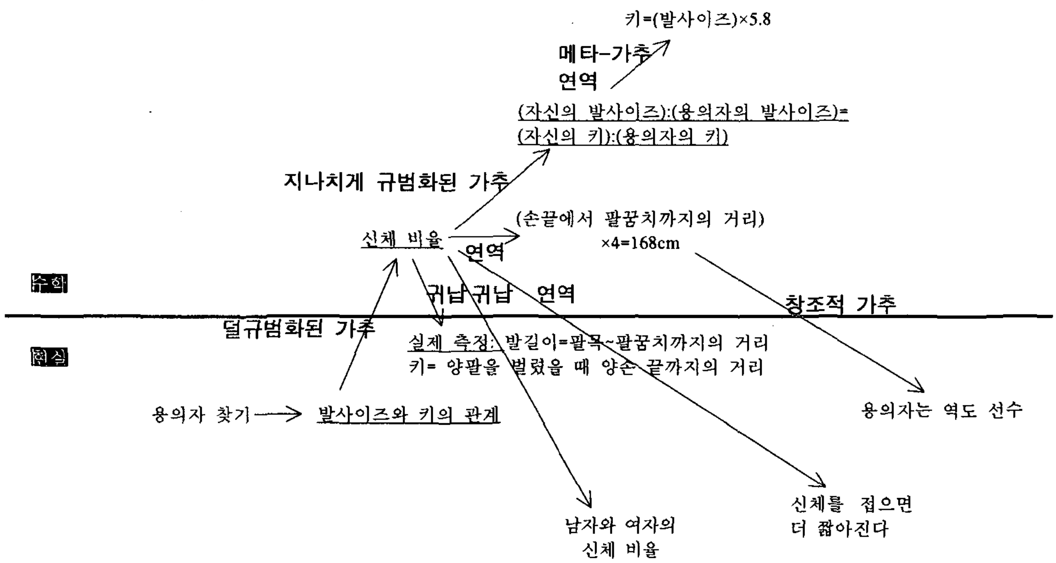
31. T: 여기 봐. 놀이터에서 이 사람이 나무도 뽑았다고 나오잖아. 나무를 톱으로 잘랐다면 소리가 다 들렸을 텐데 안 그랬다는 건 나무를 뽑아서 위로 들어 올렸다는 거야... 역도 선수들도 무거운 걸 드니까 키가 작잖아. 그러니까 이 사람도 키가 작을 거야.

이후 신체비율이 여학생에게도 성립하는지 현실 세계에서의 해석을 하면서 학생들은 귀납 추론을 하여 모델을 양적으로 검증한다. 남녀 학생 한명씩의 신체 비율을 조사했을 때 키는 비슷하지만 발사이즈가 차이가 났다. 이런 결과에 대하여 확신을 얻기 위해 학생들은 늦게 온 학생을 대상으로 신체 비율을 적용하여 남자와 여자에게 차이가 있음을 귀납했다.

39. W: (양팔을 벌리며) 여자가 이렇게 된 거랑, 남자가 이렇게 된 거랑 틀린가 봐. 남잔 어깨가 넓잖아.
40. T: 이 사람은 거미 아저씨잖아. 남자야.
42. T: (E에게) 발사이즈하고 손사이즈하고 5:4거든? 그러니까 넌 발이 작은 거야.

97. T: 너 혹시 150 좀 안 되니?
98. J: (끄덕)
99. T: 거봐 내가 딱 맞아. (E를 가리키며) 얘가 이상한거야.
100. W: 남자와 여자 차인가 봐.
101. T: 나하고 얘하고는 비가 딱 맞아. 5.7~8배가 되면 얘 키가 190이 되어야 하는데 아니잖아.

교사는 관찰 그룹에게 신체 비율에 의해 키를 구하는 경우 몸은 종이처럼 접었을 때 길이가 반이 되지 않는다는 사실을 상기시켰다. 교사의 조언에 의해 학생들은 접었을 경우 길이



[그림 Ⅳ-2] 수학적 모델링에서 나타난 추론

가 더 짧아진다는 연역 추론을 했고, 길이를 더하지 말고 양팔을 펼친 손끝 사이의 거리를 그대로 키로 구하면 된다는 연역 추론도 했다.

65. T: 아, 그렇구나. 사람은 완전히 접히지 않는구나. 그렇지, 만약에 이게 다 똑같으면 다 접혀야지.
70. T: 네, 살 때문에 안 돼요.
74. T: 접는 건 안 되지만 펼친 거로는 키를 잴 수 있잖아.

학생 W는 어른의 키를 구하는데 청소년을 대상으로 해도 되는 건지 질문하면서 모델링 과정에서 단순화될 수 없는 현실을 지적하기도 했다. 이때 학생 W의 추론은 연역이었다.

89. W: 하나도 못했는데... 저희가 아직 다 안 컸잖아요. 근데 저희 키를 가지고 구해도 될까요?

신체 비율에 의해 올바른 해가 구해지지 않자 학생 T는 자신과 용의자의 발사이즈가 같으므로 키도 같을 것이라는 유추를 했다. 유추는 가추에 속하는 추론으로 여기서 학생의 가추는 신체비율을 구할 때 자동적으로 자신의 신체를 기준으로 사용한 지나치게 규범화된 가추였다.

78. T: 이 아저씨는 발이 나랑 똑같아... 그냥 간단하게 이렇게 할까? 신발사이즈가 나랑 똑같으니까 키도 나랑 똑같다고.

학생 T는 나중에 비례 관계에 의해서 키는 발사이즈의 5.8배이고 따라서 발사이즈가 278.5인 용의자는 키가 162.8이 되어야 한다고 계산을 하여 연역 추론을 했다. 그리고 용의자가 역도 선수일 것이라는 창조적 가추가 현실에 부합되는지 메타-가추를 사용한다. 여기서의 창조적 가추는 구한 해를 정당화시키는데 사용될 뿐 문제해결이나 수학 개념의 발견에 영향력을 발휘하지는 않았다.

107. T: 내가 280 신는데 키가 163이야. 그러니까 이 사람은 162.8 정도면 돼. 역도 선수

들은 키 작잖아…. 네 명 조사해 보니까 키는 발의 5.8배야.

신체 비율을 이용한 것에 대한 근거는 인터넷에서 본 지식이었지만 정확한 것이 아니기 때문에 학생들은 결국 이 모델을 포기하였다.

신체 비율에 의하여 학생들이 구성한 Ⅰ차와 Ⅱ차 수학적 모델링에서 나타난 추론을 조사했을 때, 학생들은 연역, 귀납 뿐 아니라 가추를 사용했다. 특히 학생들이 새로운 모델을 선택하고 구성하고 해석하는 전 과정에서 가추는 유용하게 작용했다. 각 과정에서 사용된 추론을 정리하면 [그림 Ⅳ-2]와 같다.

수학적 모델링 과정에서 학생들의 생각은 가추, 귀납, 연역 세 가지 추론으로 설명될 수 있었으며 가추의 네 가지 유형도 발견되었다. 모델링 과정에서 나타나는 학생들의 추론은 대개 수학적 모델의 생성과 검증, 수정과 관련되어 나타났다. 현실 모델로부터 수학적 모델을 생각해낼 때 학생들은 덜 규범화된 가추를 사용하였고, 그 모델이 옳은 것인지를 검증하는 과정에서는 귀납을 주로 사용했고 연역도 사용했다. 수학적인 결과를 얻기 위해 계산을 하고 식으로 나타낼 때는 연역 추론을 사용했다.

수학적 결과에 대한 현실적 근거를 찾기 위한 추론에서는 임의의 규칙을 적용하는 창조적 가추를 사용했고, '신체는 반으로 접힌다.'는 잘못된 가설을 수정할 때에는 연역 추론을 사용했다. 그리고 모델을 수정하여 2차 모델링을 시작할 때는 자신의 신체를 근거로 비례 관계를 찾아 지나치게 규범화된 가추가 사용되었다. 그리고 임의의 규칙을 도입한 창조적 가추에 대한 현실적 확인을 위해 메타-가추를 사용하기도 했다.

모델링 과정에서 나타난 추론은 모델의 생성과 검증, 수정에서 여러 역할을 담당했다. 가추는 이 세 가지에 모두 쓰였으며, 연역은 수학적 계산과 모델의 검증에, 귀납은 모델의 검증에서 주로 역할을 담당했다.

V. 결론 및 제언

이 연구는 수학이 실생활에서 유용함을 학생들이 깨닫고 문제해결 능력을 향상시키기 위해 수학적 모델링이 활용될 수 있음을 알리고, 수학적 모델링에서 어떤 수학적 내용과 추론이 다루어질 수 있는지 탐색해 보고자 한 것이다.

수학적 재능이 있는 중학교 영재학생들을 대상으로 수학적 모델링을 실시했으나 학생들은 비례 관계의 쉬운 개념을 금방 적용하지 못했다. 수학 개념을 도입하고 그것을 이해하고 응용할 수 있는지 문제를 해결하게 하는 수학교육의 문제점이 나타난 것으로 보인다. 본 연구에서 실시한 수학적 모델링은 학생들에게 실생활 속에서 수학이 어떻게 활용될 수 있고 수학적으로 문제를 해결하는 경험을 줄 수 있었다. 처음에는 생각하지 못했던 비례 개념을 모델 형성 과정에서 생각해내고 나중에 가장 타당한 개념으로 선택하면서 학생들은 적극적인 사고 활동에 참여하여 고등 사고 기술을 접했으며 자료를 요약하기 위해 평균이라는 개념을 스스로 도입하여 사용하기도 했다.

이를 통해 수학적 모델링에서 학생들이 기본적인 지식이나 기술을 학습할 수 있음이 드러났다. 하지만 이 개념이 보다 형식적이 되고 학생들이 개념 간의 위계나 관계를 파악할 수 있기 위해서는 모델링 과정에서 어떤 지도가 있어야 하는지 더 많은 연구가 진행되어야 한다. 그리고 가장 좋은 모델이 어떤 것이고 무슨 의미가 있는 것인지에 대해서 학생들 간의

토의와 교사의 안내가 어떻게 이루어져야 하는지에 대해서도 연구가 더 필요하다. 본 연구에서 학생들은 단위를 통일시키지 않고도 잘못된 것을 깨닫지 못했는데, 세세한 개념이 잘못 적용될 때 수학적 결과가 달라질 수 있으므로 그에 대한 학습 안내가 더 구체적으로 명시되어야 수학적 모델링 수업이 활성화될 수 있을 것이다.

본 연구는 학생들이 수학적 모델링을 통해 수학적 추론을 경험할 것이며 그 추론이 모델링에서 하는 역할이 무엇인지도 파악하고자 했다. 본 연구에서 조사한 바로는 연역과 가추가 수학과 경험 세계 내에만 머무르는 것이 아니라 두 세계를 넘나드는 것이었다. 수학적 모델링에서 연역은 수학적 모델이 옳은지 현실에 비추어 확인하는 과정에서 그리고 수학적 결과를 유도하여 해를 구할 때 사용되었다. 귀납은 수학적 모델이 옳은지를 실험적으로 검증해 보고자 할 때 사용되었다.

수학적 모델링에서 여러 역할을 담당한 추론은 가추였다. 가추는 현실 모델로부터 수학적 모델을 추상화하고, 수학적 결과에 대한 현실적 근거를 제시하는 해석을 하고, 현재의 수학적 모델을 수정하여 새로운 수학적 모델을 도출하는데 사용되었다. 수학교육에서 관심을 받지 못해왔지만 가추는 수학적 사실의 발견에서 유용하게 작용할 수 있으며, 수학적 모델링을 통해 문제의 해를 찾아가는 과정에서도 중요한 역할을 했다. Kehle & Lester의 연구에서는 본 연구와 다른 주제의 모델링 수업을 했고 모델링에서의 추론에 대해서 다른 결과를 얻었다. 모델링은 학생이 임하는 수업 상황과 교사의 지도, 주제에 따라 여러 다른 결과가 산출될 수 있으며, 이렇게 모델링 과정에 나타난 추론의 유형과 그 역할에 대한 해석이 다를 수도 있을 것이다. 본 연구도 하나의 사례를 통해 추론의 역할을 살펴보고 일반학생이 아닌 영재를 대상으로 하여 모델링 수업을 진행했다는 점에서 제한점이 있다. 하지만 수학적 모델링에서 학생들이 현실 모델을 추상화하여 수학적 모델을 만들고 그것을 계산하여 수학적 결과를 낳고 그것을 현실적으로 해석하는 여러 과정이 순환됨에 있어 수학적 추론이 큰 역할을 담당하고 여러 유형의 추론이 사용되는 것은 분명하다.

수학적 모델링은 일상의 문제해결 상황에서 학생들이 사용할 수 있는 수학적 아이디어를 갖게 하며, 학교 밖에서 수학이 사용될 수 있다는 수학의 실용성을 느끼게 하고 수학적 문제해결력을 갖게 한다. 뿐만 아니라 본 연구에서 모델링은 학생들이 다양한 수학적 추론을 자연스럽게 경험하게 하였고, 학생들의 모델이 발전하게 하였다. 이러한 연구 결과에 따라, 수학적 모델링의 방법을 수학 학습 지도에 적용할 때 학생들의 수학적 추론 능력을 신장시킬 수 있을 것으로 본다.

본 연구에서는 수학적 모델링에서 나타난 추론을 조사하였지만, 모델링 이외의 다른 학습 상황에서도 연역과 귀납 이외에 가추는 유용하게 사용될 수 있을 것이다. 하지만 논리적 엄밀성을 보장하는 연역과 달리 귀납과 가추는 개연적 추론에 속하는 것이므로 규칙과 사례에 대한 추론을 한 후에는 그에 대한 근거를 찾고 증명하고 확인하는 것이 필수적이다. 본 연구에서 진행된 과정에서도 메타-가추에 대한 결과를 학생들이 연역함을 볼 수 있었다. 수학적 모델링에서 학생들이 잘못 진행했던 과정과 수학적 내용을 수업 마지막에 교사가 정리하면서 학생들의 귀납과 가추에 대한 결론을 연역 추론으로 보여준다면 수학적 모델링의 수업에서 나타난 단점을 보완할 수 있을 것으로 생각된다.

참고문헌

교육부(1999). 중학교 교육과정 해설.

권기석 · 박배훈(1997). 고등학교에서 수학적 모델링의 활용에 관한 연구. **수학교육, 36**(2), 149-159.

김선희 · 이종희(2002). 수학적 추론으로서의 가추법. **수학교육학 연구, 12**(2), 275-290.

김성도.(1997). 기호와 추론-퍼스의 가추법을 중심으로. 한국기호학회(편). **삶과 기호,** 351-379. 서울: 문학과 지성사.

신은주(2000). **탐구지향 수학적 모델링에 관한 연구: 사례연구**. 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.

이성범(2001). **추론의 화용론** - 언어와 추론-. 서울: 한국문화사.

片桐重男(1992). **수학적인 생각의 구체화- 수학적인 생각 · 태도와 그 지도 I**. (이용율 · 성현경 · 정동권 · 박영배, 역). 서울: 경문사. (일어 원작은 1988년 출판).

홍정희 · 송순희(1995). 수학적 모델링을 활용한 수학 탐구수업 효과의 고찰 - 중학교 2학년 부등식, 일차함수, 확률을 중심으로-. **수학교육, 34**(1), 83-96.

Kehle, P. E. (1998). *An expirical semiotic analysis of abstraction in mathematical modeling.* Indiana University doctoral thesis.

Bonfantini, M. A., & Proni, G. (1983). To guess or not to guess? In U. Eco & T. A. Sebeok (Eds.), *The sign of three: Dupin, Holmes, Peirce* (pp.119-134). Indiana University Press.

Cifarelli, V. (1997). *Emergence of abductive reasoning in mathematical problem solving.* Paper presented at the annual meeting of the american educational research association(Chicago, IL, March, 1997). ED 408 167.

Eco, U. (1983). Horns, Hooves, Insteps - some hypotheses on three types of abduction. In U. Eco & T. A. Sebeok (Eds.), *The sign of three: Dupin, Holmes, Peirce* (pp.198-220). Indiana University Press.

Ho, Y. C .(1994). *Abduction? deduction? induction? Is there a logic of exploratory data analysis?* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association(New Orleans, LA, April 4-8, 1994). ED 376 173.

Kehle, P. E,. & Lester, F. K. (2003). A semiotic look at modeling behavior. In R. Lesh & H. M. Doer (Eds.), *Beyond Constructivism : models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp.71-96). Lawrence Erlbaum Associates.

Kuhn, T. S. (1992). **과학혁명의 구조**. (김명자 역). 서울: 동아출판사. (영어 원작은 1962년 출판).

Lege, G. F. (2003). *A comparative case study of contrasting instructional approaches applied to the introduction of mathematical modeling.* Doctorial dissertation of Teachers College, Columbia University.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism : models and modeling perspectives on* *mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp.3-34). Lawrence Erlbaum Associates.

NCTM(1989). *Curriculum and evaluation standard for school mathematics.* VA: NCTM.

NCTM(2000). Principles and standards for school mathematics. VA: NCTM.

Polya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics.* Princeton University Press.

Analysis on Types and Roles of Reasoning used in the Mathematical Modeling Process

Kim, Sun Hee (Ewha Womans University)
Kim, Ki Yeon (Ewha Womans University, Graduate School)

It is a very important objective of mathematical education to lead students to apply mathematics to the problem situations and to solve the problems. Assuming that mathematical modeling is appropriate for such mathematical education objectives, we must emphasize mathematical modeling learning. In this research, we focused what mathematical concepts are learned and what reasoning are applied and used through mathematical modeling. In the process of mathematical modeling, the students used several types of reasoning; deduction, induction and abduction.

Although we cannot generalize a fact by a single case study, deduction has been used to confirm whether their model is correct to the real situation and to find solutions by leading mathematical conclusion and induction to experimentally verify whether their model is correct. And abduction has been used to abstract a mathematical model from a real model, to provide interpretation to existing a practical ground for mathematical results, and elicit new mathematical model by modifying a present model.

* key words : mathematical modeling(수학적 모델링), deduction(연역), induction(귀납), abduction(가추)

논문접수 : 2004. 7. 30
심사완료 : 2004. 8. 29