

Full-3D 와 Quasi-1D Supercompact Multiwavelets 의 비교 연구

박준표^{*} · 이도형[†] · 권도훈^{*}

(2004년 7월 31일 접수, 2004년 9월 7일 심사완료)

A Study on the Comparison Between Full-3D and Quasi-1D Supercompact Multiwavelets

Junpyo Park, Dohyung Lee and Dohoon Kwon

Key Words : CFD(전산유체역학), Supercompact Multiwavelets(슈퍼컴팩트 다중웨이블렛), Thresholding Method(임계처리법)

Abstract

CFD data compression methods based on Full-3D and Quasi-1D supercompact multiwavelets are presented. Supercompact wavelets method provide advantageous benefit that it allows higher order accurate representation with compact support. Therefore it avoids unnecessary interaction with remotely located data across singularities such as shock. Full-3D wavelets entails appropriate cross-derivative scaling function & wavelets, hence it can allow highly accurate multi-spatial data representation. Quasi-1D method adopt 1D multiresolution by alternating the directions rather than solving huge transformation matrix in Full-3D method. Hence efficient and relatively handy data processing can be conducted. Several numerical tests show swift data processing as well as high data compression ratio for CFD simulation data.

1. 서 론

최근 전산유체역학(Computational Fluid Dynamics, 이하 CFD)에서는 high fidelity 시뮬레이션의 일환으로 full unsteady Navier-Stokes 방정식을 풀어야 하는 경우가 빈번해졌으며 높은 정확도를 얻기 위해서 격자(grid)를 조밀하게 생성해야 한다. 이러한 경우 해석 데이터(data) 양은 기하급수적으로 증가하게 되어, 결국 요구되어지는 계산 시간과 데이터 저장 장치(memory)의 막대한 증가가 문제점으로 대두되어질 수 있다. 이와 관련하여 최근 많은 시간과 큰 연산 사양의 요구로 인해 복렬처리 및 분산처리 시스템이 각광 받고 있는데, 데이터 전송 시간은 시스템의 성능을 결정짓는 중요한 척도로 작용하게 된다.

이러한 문제들을 개선하기 위해서 최근 음성 및 영상, 신호처리 분야에서 주목 받고 있는 웨이블렛(wavelets)^(1,2)을 이용한 CFD 데이터 압축이 연구되고 있다. 한편, 신호처리 분야에서와 CFD에서의 데이터 특성이 서로 다르기 때문에 각 데이터 특성에 적합한 웨이블렛을 적용하여야 한다. 음성 및 영상, 신호처리 분야에 사용되는 데이터의 특성은 데이터가 거의 모든 곳에서 불연속성을 갖고 있으며 약간의 내재적 매끄러움을 지니는 반면, CFD 데이터는 거의 모든 곳에서 매끄럽고, 국부적으로 충격파, 와동, 전단층 등의 불연속성과 특이성(singularity)을 갖게 된다. 이러한 조건들을 만족시키고 효율적인 CFD 데이터 압축을 수행의 방법으로 집약적인 지지(compact support)를 지닌 Supercompact Multiwavelets 을 이용할 수 있다.

Supercompact Multiwavelets 은 Alpert⁽⁴⁾의 다중웨이블렛 기저(basis)를 바탕으로 Beam 과 Warming⁽³⁾에 의해서 개발되었다. 특히, 이 웨이블렛은 직교성(orthogonality), 대칭성(symmetry), 집약적인 지지(compact support)의 장점을 지니고 있고 특이점들

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계정보경영공학부
E-mail : dohyung@hanyang.ac.kr
TEL : (031)400-5289 FAX : (031)406-5550

* 한양대학교 대학원 기계공학과

에 걸쳐있는 유동정보간의 불필요한 상호작용을 막을 수 있다. 또한 다중해상도를 적용할 때 구간 경계 부근에서 특별한 처리가 필요 없고, 구간 내에서 부분 연속 함수(piecewise continuous function)에 효과적으로 적용할 수 있다. 이 후 D. Lee⁽⁵⁻⁷⁾는 다차원으로 확장하여 Full-3D Supercompact Multiwavelets 을 개발하였다. Full-3D Supercompact Multiwavelets 은 1D Supercompact Multiwavelets 과는 다르게 교차 방향(cross-direction) 의 구배(gradient) 정보값들을 보존하게 되어 평균값과 교차 미분항들의 원소들을 갖게 된다. Full-3D 법에서는 분해 과정에서 이 값들을 이용하여 고차 기저 함수에 대응되는 계수들을 명확하게 정의, 높은 정확도를 보여준다. 하지만 연산자(operator) 계산 과정 중에 커다란 행렬을 풀어야 하기 때문에, 연산 시간이 오래 걸리고 연산 과정이 복잡하며 처리 과정 중에 많은 메모리(memory)를 필요로 한다. 또한, 적용 범위에 있어 2 의 급수 크기 제한을 받게 되어 다중해상도법 적용 시 각 차원의 방법을 조합한 방법(Hybrid method)⁽⁸⁾을 이용하기도 하였다.

본 논문에서는 Full-3D 법에서의 문제점들을 해결할 수 있는 Quasi-1D Supercompact Multiwavelets 을 제안한다. 이 방법은 Full-3D 법에서의 복잡한 연산 과정을 상대적으로 작은 크기의 행렬로 대치하게 되어 연산 비용(cost)을 줄일 수 있다. 하지만, 교차 방향에 대한 정보가 반영되지 않기 때문에 정확도면에서 약점을 가질 수 있을 것으로 예상된다. 본 연구에서는 실제 CFD 시뮬레이션 데이터에 Full-3D 법과 Quasi-1D 법을 적용하여 비교·분석한다.

2. 슈퍼컴팩 다중웨이블렛

다중웨이블렛(multiwavelets)은 하나의 웨이블렛에만 의존하는 기준의 방법과는 달리 하나 이상의 모(mother) 웨이블렛을 이용하여 분해와 복원과정을 수행한다. 다중웨이블렛은 직교성, 대칭성, 집약적인 지지, 높은 정확도와 같은 장점들⁽³⁾을 제공한다. 이런 특징들은 단일(single) 웨이블렛에 비해 보다 뛰어난 데이터 압축과 특징 추출(feature extraction)을 가능케 한다. 즉, 충격파(shock)와 같은 불연속면에서의 계산에서도 그 강도의 감소 없이 비교적 정확하게 계산을 수행하게 된다. 본 논문에서는 Legendre 다항식을 scaling 함수로 이용했고 이에 대응하는 다항식 함수를 모 웨이블렛으로 사용한다.^(3,6)

그러나, 다중웨이블렛을 사용하기 위해서는 기존의 데이터 영역을 웨이블렛 영역으로 변환시키는 pre-transformation 과정과 역과정(reverse process)

인 post-transformation 과정이 요구되어진다. 전체 변환과정은 다음과 같이 구성된다.

CFD data → Pre-transformation(전-변환) → Decomposition(반복적용) → Thresholding → Reconstruction(반복적용) → Post-transformation(후-변환) → CFD data

2.1 Full-3D 슈퍼컴팩 다중웨이블렛

1 차원 Supercompact Multiwavelets 을 다차원 scaling 함수와 웨이블렛 함수를 이용하여 3 차원으로 일반화한다. 이 때, 직교성은 그대로 유지된다.

2.1.1 전-변환과 후-변환

정확도 차수(order)를 q 라고 하면 기저 함수의 차수 l 은 $q-l$ 이 된다. 3 차원 영역 x_{ijk} 는 $x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, z_{k-1} \leq z \leq z_k$ 에서 다음과 같은 부분구간 점들을 갖는다.

$$(x_{ijk})_n = (x_{i-1+\frac{l_i(n)}{l}}, y_{j-1+\frac{l_j(n)}{l}}, z_{k-1+\frac{l_k(n)}{l}}) \quad (1)$$

여기에서,

$$l_i(n) = \text{mod}(n - l_k(n)q^2, q) \quad (2)$$

$$l_j(n) = \text{quotient}(n - l_k(n)q^2, q) \quad (3)$$

$$l_k(n) = \text{quotient}(n, q^2) \quad (4)$$

또한 n 은 정수이고 $0 \leq n \leq q^3 - 1$ 이다. 그리고 mod 는 정수로 나눈 나머지이고 quotient 는 그때의 몫을 나타낸다. u_{ijk} 는 (1)에서처럼 배열된 열 벡터이며 다음과 같이 나타낸다.

$$(\vec{u}_{ijk})_n = u(x_{ijk})_n \quad \text{for } (x_{ijk})_n \in x_{ijk} \quad (5)$$

$\vec{\alpha}_{ijk}$ 에서 \vec{u}_{ijk} 로의 변환 행렬은 다음과 같다.

$$\vec{u}_{ijk} = T \vec{\alpha}_{ijk} \quad (6)$$

여기에서 T 는 post-processing 행렬로 이 절 마지막에서 설명한다. 함수 $(\vec{u}_{ijk})_n$ 를 정확히 표현하는 1 차 다항식은 다음과 같다.

$$(\vec{u}_{ijk})_n \approx \sum_{n=0}^{q^3-1} \alpha_n \varphi_n(x, y, z) \quad (7)$$

그 다항식의 형태 함수가 다음과 같이 차원이 나

누어질 수 있다고 가정하면,

$$\varphi_n(x, y, z) = \phi_{l_i}(x)\phi_{l_j}(y)\phi_{l_k}(z) \quad (8)$$

이다. 그러므로, 식 (7)은

$$\sum_{n=0}^{q^3-1} \alpha_n \varphi_n(x, y, z) = \sum_{l_i} \alpha_{l_i} \phi_{l_i} \sum_{l_j} \alpha_{l_j} \phi_{l_j} \sum_{l_k} \alpha_{l_k} \phi_{l_k} \quad (9)$$

로 나타낼 수 있다. $\varphi_n(x, y, z)$ 는 직교 함수이므로,

$$(\alpha_n)_{ijk} = \frac{8}{h_x h_y h_z} \times \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{z_{k-1}}^{z_k} (u(x, y, z))_{ijk} (\varphi_n(x, y, z))_{ijk} dx dy dz \quad (10)$$

이 된다. 식 (1)의 구간 x_{ijk} 에서 $u(x)$ 는 다음과 같다.

$$u((x_{ijk})_m) = \sum_{n=0}^{q^3-1} \alpha_n \varphi_n((x_{ijk})_m) \quad (11)$$

이 식은 식 (6)과 동일해야 하므로 변환 행렬은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\mathbf{T}_{mn} = \varphi_n((x_{ijk})_m), m, n = 0, 1, \dots, q^3 - 1 \quad (12)$$

2.1.2 분해와 복원

분해과정에서는 다중해상도법(MRA)이 적용되는 데, 각 단계의 분해과정은 다음과 같다.

$$\mathbf{R}^{p-1} = \mathbf{L}\bar{\mathbf{a}}^p \quad (13)$$

여기에서, $\bar{\mathbf{a}}^p$ 는 조밀한 격자의 원본 데이터, 행렬 \mathbf{L} 은 분해행렬, 행렬 \mathbf{R}^{p-1} 은 분해된 값들을 저장하는 등성한 격자의 행렬을 나타낸다. 다시 표현하면,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{ijk} \\ \bar{r}_{000,ijk} \\ \bar{r}_{010,ijk} \\ \bar{r}_{100,ijk} \\ \bar{r}_{011,ijk} \\ \bar{r}_{101,ijk} \\ \bar{r}_{110,ijk} \\ \bar{r}_{111,ijk} \end{bmatrix} \quad (14)$$

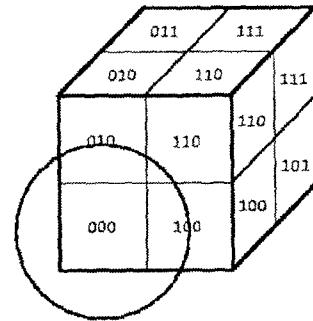


Fig. 1 One step multi-resolution cell merging in 3D
(Average values are stored at 000 subcell)

$$\bar{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{2i-1,2j-1,2k-1} \\ \bar{\alpha}_{2i,2j-1,2k-1} \\ \bar{\alpha}_{2i-1,2j,2k-1} \\ \bar{\alpha}_{2i,2j,2k-1} \\ \bar{\alpha}_{2i-1,2j-1,2k} \\ \bar{\alpha}_{2i,2j-1,2k} \\ \bar{\alpha}_{2i-1,2j,2k} \\ \bar{\alpha}_{2i,2j,2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{000} \\ \bar{\alpha}_{100} \\ \bar{\alpha}_{010} \\ \bar{\alpha}_{110} \\ \bar{\alpha}_{001} \\ \bar{\alpha}_{101} \\ \bar{\alpha}_{011} \\ \bar{\alpha}_{111} \end{bmatrix} \quad (15)$$

이다. 여기에서, $\bar{\alpha}$ 는 등성한 격자에서의 보간 벡터이고 \bar{r} 은 residual 벡터이다. 행렬 \mathbf{L} 에서 첫 행 \mathbf{H} 는 보간 연산자로 (1×8) 행렬이고, \mathbf{G} 는 residual을 구하기 위한 연산자로 (7×8) 행렬이다.

Fig. 1에서 나타낸 바와 같이 한 셀(cell)은 8 개의 부분 셀(sub-cell)로 분해된다. 식 (13)은 다음처럼 두 부분으로 나누어 표현할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{a}}^{p-1} = \mathbf{H}\bar{\mathbf{a}}^p \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{r}}^{p-1} = \mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}^p \quad (17)$$

여기에서 행렬 \mathbf{H} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}^{000} \mathbf{H}^{100} \mathbf{H}^{010} \mathbf{H}^{110} \mathbf{H}^{001} \mathbf{H}^{101} \mathbf{H}^{011} \mathbf{H}^{111}] \quad (18)$$

$$\mathbf{H}_{i+1,j+1}^{000} = 8 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi_j(2\xi + 1, 2\eta + 1, 2\zeta + 1) \times \varphi_i(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (19)$$

$$\mathbf{H}_{i+1,j+1}^{100} = 8 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi_j(2\xi - 1, 2\eta + 1, 2\zeta + 1) \times \varphi_i(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (20)$$

$$\mathbf{H}_{i+1,j+1}^{010} = 8 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi_j(2\xi + 1, 2\eta - 1, 2\zeta + 1) \times \varphi_i(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (21)$$

$$\mathbf{H}_{i+1,j+1}^{111} = 8 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \phi_i(2\xi - 1, 2\eta - 1, 2\zeta - 1) \times \phi_j(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (22)$$

.....

(i=0, 1, 2, ..., q³-1, j=0, 1, 2, ..., q³-1)

행렬 \mathbf{G} 는 오차 차이 벡터 \vec{d} 를 이용하여 간접적으로 구한다. 먼저, 보간 오차를 나타내는 오차 벡터 $\vec{\epsilon}$ 를 정의한다.

$$\vec{\epsilon}^P = \mathbf{G}^{-1} \vec{r}^{P-1} = \mathbf{G}^T \vec{r}^{P-1} \quad (23)$$

오차 차이 벡터 \vec{d} 는 Fig. 1에서 (0 0 0)지점과 다른 부분과의 차이값을 나타낸다.

$$\vec{d}_n^{P-1} = \vec{\epsilon}_{n+1}^P - \vec{\epsilon}_1^P, n=1,2,...,7 \quad (24)$$

\vec{a}^P 와 \vec{r}^{P-1} 사이의 변환에 \vec{d}^{P-1} 를 삽입한다.

$$\begin{aligned} \vec{r}^{P-1} &= \mathbf{B} \vec{d}^{P-1}, \vec{d}^{P-1} = \mathbf{D} \vec{a}^P, \\ &= \mathbf{B} \mathbf{D} \vec{a}^P \\ &= \mathbf{G} \vec{a}^P \end{aligned} \quad (25)$$

여기에서, 다음과 같이 연산자 행렬 \mathbf{B} , \mathbf{D} 를 구한다.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I} & & & & & \\ -\mathbf{I} & & \mathbf{I} & & & & \\ -\mathbf{I} & & & \mathbf{I} & & & \\ -\mathbf{I} & & & & \mathbf{I} & & \\ -\mathbf{I} & & & & & \mathbf{I} & \\ -\mathbf{I} & & & & & & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \mathbf{M}^T \mathbf{H} \quad (26)$$

$$\text{여기에서, } \mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{100}^T - \mathbf{H}_{000}^T \\ \mathbf{H}_{010}^T - \mathbf{H}_{000}^T \\ \mathbf{H}_{110}^T - \mathbf{H}_{000}^T \\ \mathbf{H}_{001}^T - \mathbf{H}_{000}^T \\ \mathbf{H}_{101}^T - \mathbf{H}_{000}^T \\ \mathbf{H}_{011}^T - \mathbf{H}_{000}^T \\ \mathbf{H}_{111}^T - \mathbf{H}_{000}^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{D} \mathbf{D}^T)^{-\frac{1}{2}} \quad (27)$$

\mathbf{G} 행렬은 두 연산자 행렬을 이용하여 $\mathbf{G} = \mathbf{B} \mathbf{D}$ 로 구할 수 있다. 또한 \mathbf{H} , \mathbf{G} 행렬은 서로 직교한다. 재

구성 과정은 직교성(orthogonality)에 의해 다음과 같이 분해과정의 역과정으로 나타내어진다.

$$\vec{a}^P = \mathbf{H}^T \vec{\alpha}^{P-1} + \mathbf{G}^T \vec{r}^{P-1} \quad (28)$$

2.2 Quasi-1D 슈퍼컴팩 다중웨이블렛

Full-3D 법은 식 (13)~(28)에서와 같이 다중해상도법으로 분해할 때 교차 방향으로의 속성을 포함하게 된다. 따라서 각 방향의 데이터들끼리의 연관성이 증가하여 다음 장에서 설명하게 될 임계처리 과정에서 더욱 정확한 압축을 가능하게 한다. 하지만, 복잡하고 커다란 연산자 계산 과정을 포함하고 있기 때문에 연산 시간이 증가하여 실질적인 압축시간과 전송속도 면에서는 효율성이 반감된다. 이러한 Full-3D 법의 대안으로 Quasi-1D Supercompact Multiwavelets 을 제안한다. Quasi-1D 다중해상도 방법은 하나의 레벨을 다중해상도 할 때 웨이블렛 계수들을 세 개의 각각 다른 방향으로 1차원 분해 연산자들(1D decomposition operators)에 의해 세 번 분해하기 때문에 분해와 복원 과정은 다음과 같이 텐서(tensor) 형태로 나타낼 수 있다.

$$(\vec{\alpha}_j^{P-1})_d = \frac{1}{\sqrt{2}} ((\mathbf{H}^0)_d (\vec{\alpha}_{2j-1}^P)_d + (\mathbf{H}^1)_d (\vec{\alpha}_{2j}^P)_d) \quad (29)$$

\mathbf{H}^0 와 \mathbf{H}^1 은 직교 웨이블렛 기저를 이용하여 평균 변환하기 위한 각종 계수들이고 d 는 차원(x, y, z) 을 나타내는 지수(index)이다. Residual 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(\vec{r}_j^{P-1})_d = \frac{1}{\sqrt{2}} ((\mathbf{G}^0)_d (\vec{\alpha}_{2j-1}^P)_d + (\mathbf{G}^1)_d (\vec{\alpha}_{2j}^P)_d) \quad (30)$$

\mathbf{G}^0 와 \mathbf{G}^1 은 \mathbf{H}^0 와 \mathbf{H}^1 로부터 구하고 $\vec{\alpha}_{2j-1}^P$, $\vec{\alpha}_{2j}^P$ 은 조밀한 격자에서의 홀수와 짝수 벡터를, $\vec{\alpha}_j^{P-1}$, \vec{r}_j^{P-1} 는 듬성한 격자에서의 평균과 residual 벡터를 나타낸다. 식 (29)는 두 격자(듬성한 격자, 조밀한 격자) 사이에서 다항식의 관계를 나타낸다 \mathbf{H}^0 , \mathbf{H}^1 , \mathbf{G}^0 , \mathbf{G}^1 는 다음으로부터 구할 수 있고 텐서는 생략한다.

$$\mathbf{H}_{i+1,j+1}^0 = 2 \int_{-1}^0 \phi_j(2\xi + 1) \phi_i(\xi) d\xi \quad (31)$$

$$\mathbf{H}_{i+1,j+1}^1 = 2 \int_0^1 \phi_j(2\xi - 1) \phi_i(\xi) d\xi \quad (32)$$

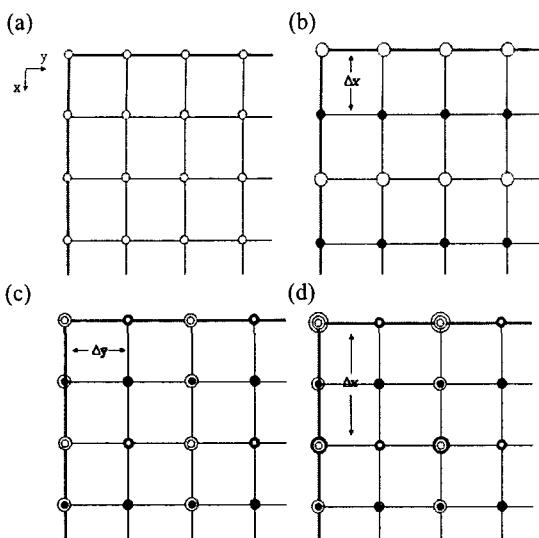


Fig. 2 Decomposition using the Quasi-1D method – (a) Original data, (b) 1st level x-direction decomposition, (c) 1st level y-direction decomposition (d) 2nd level x-direction decomposition

여기에서, $i = 0, 1, \dots, l$, $j = 0, 1, \dots, l$

$$\mathbf{G}^0 = \sqrt{2}\mathbf{B} \left(-\mathbf{I} + \frac{1}{2}(\mathbf{H}^0)^T \mathbf{H}^0 - \frac{1}{2}(\mathbf{H}^1)^T \mathbf{H}^0 \right) \quad (33)$$

$$\mathbf{G}^1 = \sqrt{2}\mathbf{B} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}(\mathbf{H}^1)^T \mathbf{H}^1 + \frac{1}{2}(\mathbf{H}^0)^T \mathbf{H}^1 \right) \quad (34)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[\mathbf{I} - \frac{1}{4}(\mathbf{H}^0 - \mathbf{H}^1)^T (\mathbf{H}^0 - \mathbf{H}^1) \right]^{-1} \right\}^{1/2} \quad (35)$$

Fig. 2는 x, y 방향으로의 분해과정을 나타낸 그림으로 3 차원에서도 같은 방법으로 적용된다. Fig. 2(b)는 x 방향 분해과정으로 속이 빈 원은 average 값을, 흑색은 residual 값을 나타낸다. 이 값을 이용해서 Fig. 2(c)와 같이 y 방향으로 분해한다. 이 때, x 방향으로 분해된 값들은 x-average 값, x-residual 값끼리 독립적으로 y 방향 분해(decomposition)를 수행하게 되는데, 그림에서는 바깥쪽 원이 y 방향의 평균(흰색)과 residual(흑색)값을 나타낸다. Average 값, residual 값이라고 해서 각기 다른 분해 방법을 적용하는 것은 아니다. 2nd resolution 단계에서는 Fig. 2(c)에서처럼 간격을 2 배로 늘려서 전 단계의 절반에만 적용하게 된다. 복원 과정은 Full-3D 일 때와 마찬가지로 multiwavelets 의 직교성을 이용한다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{2j-1}^p \\ \tilde{\alpha}_{2j}^p \end{bmatrix} &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^0 & \mathbf{H}^1 \\ \mathbf{G}^0 & \mathbf{G}^1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_j^{p-1} \\ \tilde{r}_j^{p-1} \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} (\mathbf{H}^0)^T & (\mathbf{G}^0)^T \\ (\mathbf{H}^1)^T & (\mathbf{G}^1)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_j^{p-1} \\ \tilde{r}_j^{p-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

이 방법은 Full-3D 법에 사용되는 커다란 행렬 곱셈 과정이 상대적으로 작은 크기의 행렬 곱으로 대체되기 때문에 상당히 간단하다. 또한 Quasi-1D 법은 기저 함수의 유연성(flexibility)으로 다양한 다른 수치 기법을 쉽게 병합할 수 있는 장점이 있다. 예를 들면, 리프팅 기법(lifting scheme)^(9,10)을 접목시켜서 메모리 사용에 관한 문제들도 보다 개선시킬 수 있다. 비록, Quasi-1D 다중해상도 방법은 교차 방향의 구배 정보(gradient information)이 정확하지 않아 정확도(accuracy)면에서 Full-3D 법에 비해 다소 떨어지는 면이 있지만 압축 연산 시간이라는 실질적인 데이터 처리 효과 면에서는 보다 경제적이라 할 수 있다.

3. 임계처리법

Supercompact Multiwavelets 을 통해 분해된 데이터들은 서로 많이 연관(correlated)된다. 이러한 특성을 이용하면 적은 수의 데이터로 원 데이터를 표현하는 것이 가능해진다. 데이터 압축은 분해된 데이터들 중 적절한 임계값 λ 보다 작은 값을 버림으로써 이루어진다.^(11,12) 모든 분해과정이 끝난 후 가장 낮은 다중해상도 단계의 값들에 임계처리가 적용된다. 정확도를 유지하면서도 큰 압축율을 얻기 위해서는 적절한 임계처리법(thresholding method)을 적용하여야 한다. 특히, Multiwavelets 은 스칼라가 아닌 벡터를 처리해야 한다. 여기서는 신호처리분야에서 잡음 제거에 사용되고 있는 T. Downie 와 B. Silverman⁽¹³⁾이 제안한 임계처리법을 적용한다. 다중웨이브렛의 공분산 구조를 이용하는 것으로 그 과정은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{R}^T \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (37)$$

여기에서, \mathbf{V} 는 공분산 행렬을 나타내며, 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{V} = \sigma^2 \mathbf{T}^T \mathbf{T} \quad (38)$$

이 때, \mathbf{T} 행렬은 앞에서 언급한 post-transformation 행렬이다. σ 는 잡음의 표준편차이며, CFD 분야에

서는 중요하지 않으므로 1로 놓는다. 이 과정을 통하여 양의 값 θ 를 얻은 후 임계값 λ 를 구하여 다음과 같은 임계처리법을 적용한다.

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} (\theta \geq \lambda) \quad (39)$$

즉, 식 (37)에 의해 계산된 θ 가 사용자가 정한 값 λ 보다 크게 되면 \mathbf{R} 행렬 전체를 보존하고 작으면 \mathbf{R} 행렬 전체를 0으로 치환하여 메모리에 저장 시 생략하는 방법을 사용하게 된다.

4. CFD 데이터에의 적용

2 가지 CFD 시뮬레이션 데이터에 Full-3D 법과 Quasi-1D 법을 적용하였다. 두 방법을 적용하여 압축한 후, 복원했을 때의 정확도는 L^2 ratio 오차로 나타내고 다음과 같다.

$$L^2 \text{ ratio error} = \frac{\sqrt{\sum_{ij} |\mathbf{P}_{ij} - \mathbf{O}_{ij}| / |\mathbf{P}|_{\max}^2}}{N_{grid}} \quad (40)$$

\mathbf{P} = Reconstructed dataset value,

\mathbf{O} = Original dataset value,

$|\mathbf{P}|_{\max}$ = Maximum value in reconstructed dataset,

N_{grid} = Number of points in the dataset.

한편, 연산 시간은 Pentium4 - 2GHz CPU에서 측정되었으며 압축효율(compression efficiency)은 계수들의 총 개수와 임계처리법 적용 후 남게 되는 계수들의 비로 나타내며 크기가 작을수록 효율적임을 뜻한다.

4.1 Rott's Vortex Propagation Solution

첫 번째 적용 사례는 Rott⁽¹⁴⁾의 와류(vortex) 전파에 관한 데이터이다. Rott의 해(solution)는 Navier-Stokes 방정식의 해로써 정상상태에서의 3D 축 대칭 와류(vortex)를 나타낸다. 이 와류는 자유류 속도의 증가와 함께 유선 방향으로 전파된다. Full-3D 법은 적용범위가 2의 급수와 정수의 곱인 경우로 제한된다. 그렇지 않을 경우에는 인위적으로 격자를 줄이거나 늘려야만 한다.⁽⁸⁾ 하지만 본 연구에서는 Quasi-1D 법과의 비교를 위하여 $9 \times 49 \times 49$ 의 격자, 즉 Full-3D에 적합한 크기로 축소하여 사용한다.

Fig. 3은 Full-3D 법과 Quasi-1D 법으로 압축했을 때의 임계처리 값에 따른 L^2 ratio 오차와 연산시간, 압축 효율을 차례대로 나타낸다. x 축에서 임계처리 값의 눈금은 Log 단위이다. Fig. 3(a)에서 보는 것처럼 Full-3D 법에서는 임계처리 값을 10^{-6} 에서

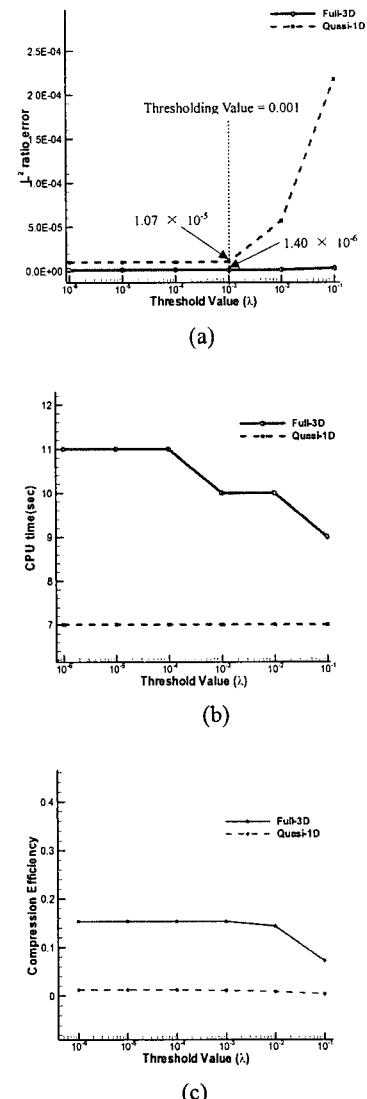
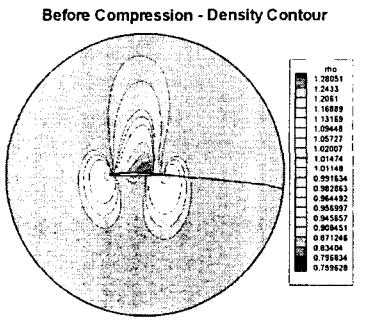


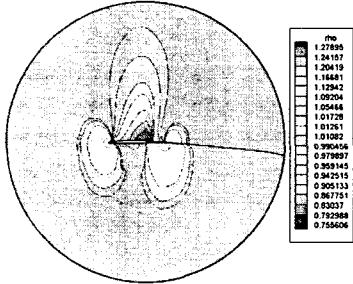
Fig. 3 Comparison of the Full-3D with Quasi-1D for the Rott's Vortex Propagation Solution - (a) L^2 ratio error, (b) CPU time, (c) Compression efficiency

10^{-1} 까지 변화시키면 오차가 1.40×10^{-6} 에서 3.48×10^{-6} 으로 거의 변화가 없다. Quasi-1D 법에서는 10^{-3} 의 critical point를 기점으로 오차가 급격히 증가한다. 예를 들면 10^{-2} 에서는 5.67×10^{-5} 로 아주 커진다. 특히, Full-3D 법일 때의 이러한 오차 변화는 교차 방향으로의 구배 정보값들이 분해과정에서 정확히 반영되기 때문이다. Fig. 3(b)에서는 임계처리 값에 관계없이 Quasi-1D 법이 Full-3D 법보다 적은 연산 시간을 요구하는데, 이는 분해와 복원과정의 복잡한 행렬 대신 식 (24)~(31)과 같은 간



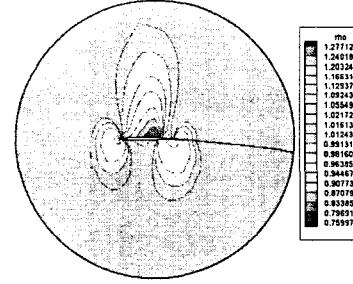
(a)

After Compression - Density Contour



(b)

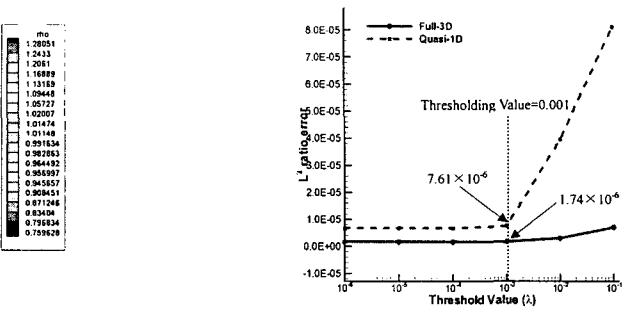
After Compression - Density Contour



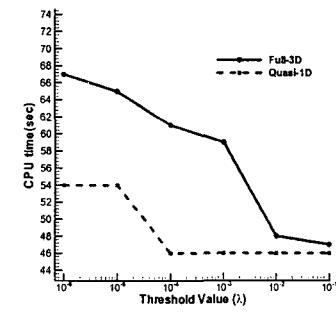
(c)

Fig. 4 Density contours of transonic flow at 3D wing - (a) Before compression, (b) After compression using Full-3D, (c) After compression using Quasi-1D

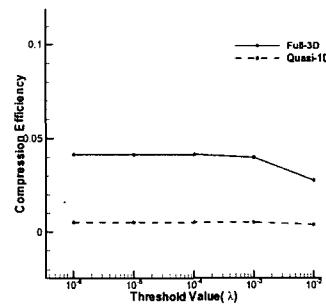
단한 식으로 계산되기 때문이다. 또한, Full-3D 법에서 연산시간이 점차 감소하는데, 이것은 임계처리 값의 증가로 교차 방향 구배 정보값에 대한 연산이 줄어들기 때문이다. Fig. 3(c)에서 압축 효율은 임계처리법 적용을 받지 않는 값들(λ 보다 큰 값들)과 3 차 정확도에서 총 62208 개의 계수 값들과의 비를 나타낸다. 특히, 10^3 일 때 Full-3D 법과 Quasi-1D 법은 9521 개와 685 개의 계수들이 남게 되는데, 오차와 더불어 비교할 때 매우 효율적이다. 하지만, 임계처리 값을 critical point 보다 크게 할 경우 효율의 변화는 거의 없지만 정확도는 크게 낮아서 오히려 좋지 못한 결과를 낳게 된다.



(a)



(b)



(c)

Fig. 5 Comparison of the Full-3D with Quasi-1D for the 3D Wing - (a) L^2 ratio error, (b) CPU time, (c) Compression efficiency

4.2 천음속(Transonic Flow) 영역에서의 3D wing 압력분포

두 번째 적용사례는 천음속(transonic) 영역에서 3D wing의 압력분포에 관한 CFD 해석 데이터이다. 이 데이터는 Navier-Stokes 방정식의 해이고 Mach 수는 0.8이다. 격자 크기는 $33 \times 33 \times 129$ 로 Full-3D 을 사용할 경우 대상 범위에서 제외되는 부분이 없어 위의 경우와는 다르게 그대로 적용할 수 있다. Fig. 4 는 충격파 전·후의 밀도 변화를 나타낸 그림이다. Fig. 4(b), (c)의 날개 주위에서 발생

하는 충격파(shock)와 같은 불연속성의 특징들을 살펴보면 Quasi-1D 법을 사용할 경우 다소 데이터가 일그러지는 현상이 있는데, 이러한 현상은 Quasi-1D 법의 분해과정에서는 Full-3D 법과는 달리 교차 방향에 대한 항(term)이 없기 때문이다. 특히, 이것은 데이터 압축 시 발생하는 오차와 밀접하게 관련되는 부분으로, 적절한 임계값 설정을 통해 오차 제어를 수행하여 문제를 해결한다.

Fig. 5 는 Fig. 3 에서와 마찬가지로 임계처리 값에 따라서 두 방법을 비교한 그림이다. Fig. 5(a)에서 임계처리 값이 10^{-3} 일 때 Full-3D 법과 Quasi-1D 법에서의 오차는 각각 1.74×10^{-6} 과 7.61×10^{-6} 으로 해의 정확도에 큰 차이가 없음을 볼 수 있다. Fig. 5(b)에서 연산시간은 Quasi-1D 법이 약 25%정도 적었고 Fig. 5(c)에서 효율은 442368 개의 계수들 중 critical 임계처리 값일 때 17614 개와 2306 개로 Quasi-1D 법이 효율적이다.

5. 결 론

Full-3D 와 Quasi-1D Supercompact Multiwavelets 을 이용한 CFD 데이터 압축을 비교·분석하였다. Full-3D 법은 분해 과정에서 평균값과 고차 미분항의 정확한 표현으로 인해 교차 방향 구배 정보값들 정확도 면에서 우수했다. 하지만 큰 연산 행렬을 풀기 때문에 연산시간이 커지는 단점이 있다. 이런 문제점을 극복하기 위해 Quasi-1D 법을 제안하였다. Quasi-1D 법은 Full-3D 법에서의 분해와 복원 과정에서, 복잡한 행렬 연산을 1 차원 Supercompact Multiwavelets 으로 대체하여 방향에 따라 변갈아 계산을 수행하게 된다.

실제 CFD Simulation 데이터에 적용하여, 적절한 임계처리값을 적용할 경우 Quasi-1D 법이 비교적 높은 정확도를 유지하면서도 높은 압축율과 빠른 연산속도를 가짐을 확인하였다. 또한, 복원 후 데이터의 불연속성의 특징들도 성공적으로 표현하였다. 물론, 웨이블렛을 이용한 데이터 처리 도구의 효용성은 여러가지 요소들(웨이블렛 기본함수의 데이터 적용성, 메모리 사용량, 최대 다중해상도 단계, 복원 후 정확도 등)에 의해서 판단될 수 있다. 복원 데이터의 정확도에서는 Full-3D Supercompact Multiwavelets 이 우수한 도구이고, 데이터 압축 연산 시간이라는 실질적인 측면에서 볼 때, Quasi-1D Supercompact Multiwavelets 은 CFD 데이터 압축에 적절한 도구라 할 수 있다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 지역대학 우수 과학자 지원 연구(R05-2004-000-12166-0)로 수행되었음.

참고문헌

- (1) Brani Vidakovic and Peter Mueller, 1991, "Wavelets for Kids : A Tutorial Introduction," Duke University.
- (2) Michel Misiti, Yves Misiti, Georges Oppenheim and Jean-Michel Poggi, 1996, "Wavelet TOOLBOX," *The Math Works, Inc.*
- (3) Richard M. Beam and Robert F. Warming, 2000, "Multiresolution Analysis and Supercompact Multiwavelets," *SIAM journal on scientific computing*, Vol. 22, No. 4, pp. 1238~1268.
- (4) Alpert, B., 1993, "A Class of Bases in for the Sparse Representation of Integral Operators," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 24, pp. 246~262.
- (5) Dohyung Lee, 2000, "Supercompact Multiwavelets for Three Dimensional Flow Field Simulation," *38th AIAA Aerospace Meeting & Exhibit*.
- (6) Dohyung Lee, Richard M. Beam and Robert F. Warming, 2001, "Supercompact Multiwavelets for Flow Field Simulation," *Computers & Fluids*, Vol. 30, pp. 783~805.
- (7) Dohyung Lee, 2003, "MultiDimensional Supercompact Wavelets For Fluid Dynamics," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 43, pp. 307~329.
- (8) Hyungmin Kang, Dongho Lee and Dohyung Lee, 2003, "A Study on CFD Data Compression Using Hybrid Supercompact Wavelets," *KSME International Journal*, Vol. 17, No. 11, pp. 1784~1792.
- (9) Sweldens, W., 1995, "The Lifting Scheme: A New Philosophy in Biorthogonal Wavelet Constructions," *Proc. SPIE*, Vol. 2569, pp. 68~79.
- (10) Sweldens, W. and Schroder, P., 1996, "Building Your Own Wavelets at Home," *ACM SIGGRAPH Course Note #13*.
- (11) David L. Donoho and Iain M. Johnstone, 1993, "Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage," Stanford University.
- (12) David L. Donoho, 1995, "Denoising by Soft Thresholding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 41, pp 613~627.
- (13) Downie, T. R. and Silverman, B. W., 1998, "The Discrete Multiple Wavelet Transform and Thresholding Methods," *IEEE Transactions on signal processing*, Vol. 46, pp. 2558~2561.
- (14) Rott, N., 1958, "On the Viscous Core of a Line Vortex," *J Appl Math Phys*, Vol. 9b(5/6), pp. 543~553.