

$L_{18}(2 \times 3^7)$ 직교배열표 실험자료에 대한 파레토 그림 분석*

임용빈¹⁾

요약

2수준 직교배열표를 이용한 실험자료에 대한 파레토 그림에 의한 분석 방법은 실무에서 많이 활용되고 있는데, 그 이유는 유의한 요인을 선별하기 위해서 분산분석법을 사용하지 않고 시각적이고 간결한 방법에 의하여 실험자료를 분석하기 때문이다. $L_{18}(2 \times 3^7)$ 직교배열표를 이용한 실험자료에 대한 분석방법으로 Park(1996)은 효과의 크기를 각 효과의 평균제곱으로 정의하고 파레토 원칙을 사용한 Pareto ANOVA를 제안하였다. 이 논문에서는 $L_{18}(2 \times 3^7)$ 실험자료에 대한 새로운 파레토 그림에 의한 분석 방법이 제시된다. 주요 요점은 3수준 효과의 크기를 일차와 이차 직교대비의 크기에 의해 분할하는 것이다.

주요용어: 파레토 그림 분석, $L_{18}(2 \times 3^7)$ 직교배열표, 일차 직교 대비, 이차 직교 대비

1. 서론

신제품 개발을 목표로 한 연구소에서의 초기 단계의 실험, 개발된 신제품을 대량 생산하기 전에 생산라인에서의 공정조건의 조율을 위한 파일럿(pilot) 공장에서의 실험, 제품의 품질을 개선시키기 위한 생산 공정에서의 실험 등에서 제품의 품질 특성치에 영향을 주리라 기대되는 요인의 수는 일반적으로 많지만, 경험적으로 공업실험에서 잘 알려진 원칙이 'factor sparsity'의 원칙으로 고려된 많은 고정 요인들 중에서 실질적으로 특성치에 영향을 주는 요인의 수는 많아야 3, 4 개라는 사실이다. 특히 제품의 품질을 개선시키기 위한 생산 공정에서의 실험에서 현재의 공정조건을 기준으로 품질을 향상시키리라 기대되는 요인 수준의 방향성이 불확실한 경우에는 현재 조건을 포함해서 3수준 요인을 고려해야 한다. 따라서 2수준 요인과 3수준 요인이 섞여 있는 경우에 적은 실험횟수로 중요한 요인만을 선별해 내는 실험계획으로 2수준 일부 실시법인 2^{p-q} 와 3수준 일부 실시법인 3^{r-s} 의 교적 실험(product designs)이 고전적으로 많이 이용되어 왔다. 그런데 주효과와 고차의 상호작용 효과를 교락시키는 해상도(resolution)가 높은 일부 실시법의 실험조건을 구하는 과정은 통계적인 전문 지식이 많지 않은 현장의 기술자들에게는 이해하기가 쉽지 않다. 따라서 2수준 요인과 3수준 요인들의 주효과에만 관심이 있는 경우에 18회의 실험으로 주효과들의 검출이 가능한 일부 실시법의 실험조건을 용이하게 결정하여 주는 $L_{18}(2 \times 3^7)$ 직교배열표를 활용한 실험계획이 실용적으로 많이 사용되고 있다. 직교배열표가 실험배치에 유용하다고

* 이 논문은 2002년도 한국과학재단 목적기초연구사업(과제번호 R06-2002-012-01002-0)지원에 의한 연구 결과임.

1) (120-750) 서울시 서대문구 대현동 21 이화여자대학교 통계학과 교수

E-mail: yblim@ewha.ac.kr.

인정되어 실무에 많이 쓰이기 시작한 것은 비교적 최근의 일로서 대표적인 응용의 예가 다구찌 방법이다. 직교배열표를 사용한 실험은 최근에 한국에서도 보급되기 시작하여 연구소나 공장실험 등에서 사용되고 있고, 특히 6 시그마 과제들에서 많이 활용되고 있다.

직교배열표를 이용하여 얻은 실험 자료의 분석 방법으로 엔지니어들이 분석결과를 시각적으로 쉽게 이해할 수 있도록 도와주는 간이 분석 방법이 주효과의 크기에 대한 파레토 그림에 의한 분석이다. 2수준 직교배열표를 이용한 실험자료에 대한 파레토그림에 의한 분석 방법은 직교배열표의 각 열의 수준별 반응치의 평균의 차이인 범위를 구하고, 범위들을 크기 순으로 나열한 후에, 각각의 범위를 범위의 총합으로 나누어서 기여율을 계산하고, 누적 기여율이 80-90%에 해당되는 요인 효과들을 영향력이 존재할 가능성이 있는 요인으로 분류하는 간이 분석법으로 실무에서 많이 활용된다. (박(1993a)) 또한, 2수준 요인의 자유도가 1이고, 각 효과의 변동은 범위의 제곱에 비례함을 주목할 때에 각 효과들을 크기 순으로 나열하는데 있어서 간이 분석 방법이 분산분석 결과와 일치한다는 관점에서 파레토 그림에 의한 간이 분석 방법이 유용한 방법으로 알려져 있다. (박(1993b)) 3수준 직교배열표를 이용한 실험자료의 간이 분석법으로 2수준 경우와 같은 방법으로 범위를 이용한 주효과들에 대한 파레토 그림에 의한 간이 분석법이 이용된다. (박(1993b)). 따라서 2수준 요인과 3수준 요인이 섞여 있는 경우인 $L_{18}(2 \times 3^7)$ 직교배열표를 활용한 실험자료의 간이 분석법으로도 범위에 의한 주효과의 파레토 그림을 생각할 수 있다. 이 방법의 문제점은 2수준 요인의 자유도는 1인 반면에 3수준 요인의 자유도는 2인 점을 반영하지 못하고, 또한 3수준 요인의 주효과에 의한 변동이 범위의 함수로 주어지지 않는다는 점이다. Park(1996)은 Pareto ANOVA를 제시하였는데, 이 방법은 각 효과의 평균변동을 계산한 후에 주효과의 크기를 평균변동으로 간주하여 주효과에 대한 파레토 그림을 작성하였다. 이 논문에서는 각 효과의 자유도가 1이고, 범위와 같이 계산이 간단하면서 각 요인에 대해서 설명력이 있는 대비함수를 정의하여, 자유도가 1인 대비함수의 크기에 따른 파레토 그림의 작성 방법을 제안한다. 이 방법은 Pareto ANOVA와 비교할 때에 계산이 약간 간편하고, 계량요인이 유의할 경우에 곡선효과의 존재 여부에 관한 정보를 추가로 제공한다는 점에서 실용적인 활용성이 기대된다.

2절에서는 $L_{18}(2 \times 3^7)$ 직교배열표를 이용한 실험자료에 대한 파레토 그림의 작성 방법을 설명하고, 3절에서는 예제를 통해서 파레토 그림을 작성한다.

2. $L_{18}(2 \times 3^7)$ 직교배열표 실험자료에 대한 파레토 그림

2수준 요인 A의 수준별 실험자료의 평균을 \bar{A}_1, \bar{A}_2 라 하고, 3수준 요인 B의 수준별 실험자료의 평균을 $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3$ 라 하자. 2수준 요인 A의 주효과를 설명하는 대비는 각 수준별 평균의 차이인 $\bar{A}_2 - \bar{A}_1$ 이다. 3수준 요인이 계량 요인인 경우에 주효과 B를 설명하는 직교 대비(orthogonal contrasts)는 일차 효과의 대비인 B_L 과 이차 효과의 대비인 B_Q 로 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} B_L &= -\bar{B}_1 + \bar{B}_3, \\ B_Q &= \bar{B}_1 - 2\bar{B}_2 + \bar{B}_3. \end{aligned}$$

각 대비에 의한 변동은

$$\begin{aligned} SS_A &= \frac{9^2}{18}(\bar{A}_2 - \bar{A}_1)^2, \\ SS_{B_L} &= \frac{6^2}{12}(\bar{B}_3 - \bar{B}_1)^2, \\ SS_{B_Q} &= (\bar{B}_1 - 2\bar{B}_2 + \bar{B}_3)^2 \end{aligned}$$

으로 3수준 요인 B에 의한 변동은 자유도가 1인 일차효과 대비에 의한 변동 SS_{B_L} 과 이차효과 대비에 의한 변동 SS_{B_Q} 로 분해되어

$$SS_B = SS_{B_L} + SS_{B_Q}$$

이다. 2수준 직교배열표를 이용한 실험자료에 대한 파레토그림에 의한 분석 방법에서 2수준 효과의 크기는 수준별 반응치들의 평균의 차이인 점을 주목하여, 이 크기가 $L_{18}(2 \times 3^7)$ 직교배열표 실험자료에 대한 파레토 그림에서도 동일하게 유지되도록 하기 위해서 각 효과의 크기를 자유도가 1인 대비에 의한 변동의 제곱근에 비례하는 $\sqrt{(2/9)SS}$ 로 취하자. 이때, 2수준 요인 A의 주효과의 크기, 3수준 요인 B의 일차효과 B_L 의 크기와 이차효과 B_Q 의 크기는

$$|A| = |\bar{A}_2 - \bar{A}_1|, \quad (2.1)$$

$$|B_L| = \sqrt{2/3}|\bar{B}_3 - \bar{B}_1|, \quad (2.2)$$

$$|B_Q| = \sqrt{2/9}|\bar{B}_1 - 2\bar{B}_2 + \bar{B}_3| \quad (2.3)$$

이다.

$L_{18}(2 \times 3^7)$ 직교배열표의 파레토 그림을 작성하는 방법은 실험자료로부터 2수준 열과 3수준 열 각각에 대해서 자유도가 1인 각 효과의 크기를 식 (2.1), (2.2), (2.3)에 따라서 계산하고, 효과의 크기 순으로 나열한 후에, 각각의 크기를 크기의 총합으로 나누어서 기여율을 계산하고, 파레토 그림을 그린다.

이 방법은 2수준 직교배열표를 이용한 실험자료에 대한 파레토 그림에 의한 간이 분석법과 마찬가지로 2수준 효과와 3수준 1차 효과, 3수준 이차 효과들을 크기 순으로 나열하는 데에 있어서는 분산분석에 의한 결과와 일치한다는 점에서 2수준 직교배열표 실험자료에 대한 파레토 간이 분석법의 확장으로 간주할 수 있다.

3. 예제

자동차의 점화 케이블(cable)의 코어 인장력을 규격(40 ± 15 파운드)에 맞도록 하는 제품을 개발하기 위한 실험으로 2수준 요인 1개, 3수준 요인 7개에 대해서 $L_{18}(2 \times 3^7)$ 직교배열표를 이용하여 실험을 실시하였다. 각 요인들의 설명과 실험자료는 박(1993)과 Park(1996)에 있다. 표3.1에는 각 실험조건에서 반응치들의 자료로부터 구한 요인 수준별 반응치들의 평균과 수준별 반응치 평균들의 범위가 계산되어 있다. 표3.2에는 식 (2.1), (2.2), (2.3)을 이용

표 3.1: 수준별 반응치들의 평균과 수준별 반응치 평균들의 범위

수준	A	B	C	D	E	F	G	H
1	46.58	52.96	45.54	61.46	52.83	42.13	59.46	55.92
2	58.39	49.50	47.83	47.86	43.50	69.13	49.25	39.25
3		55.00	64.08	48.13	61.13	46.21	48.75	62.29
범위	11.81	5.50	18.54	13.58	17.63	27.00	10.71	23.04

표 3.2: 2 수준 효과, 3수준 일차 효과와 이차효과들의 크기

효과	A	B_l	B_q	C_l	C_q	D_l	D_q
크기	11.81	1.67	4.23	15.14	6.58	10.89	6.53
E_l	E_q	F_l	F_q	G_l	G_q	H_l	H_q
6.77	12.71	3.33	23.53	3.75	4.58	5.20	18.72

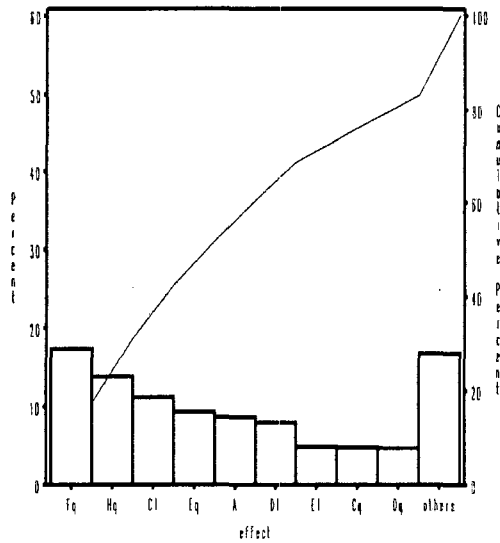


그림 3.1: 직교대비의 크기에 의한 파레토 그림

해서 2수준 요인 A의 주효과의 크기, 3수준 요인들의 일차효과들의 크기와 2차효과의 크기가 구해졌다. 표3.2의 각 효과를 크기 순으로 나열하여 각 효과의 크기에 대한 기여율과 누적 기여율을 계산하여 작성된 각 효과의 크기에 대한 파레토 그림이 그림3.1이다. 누적 기여율

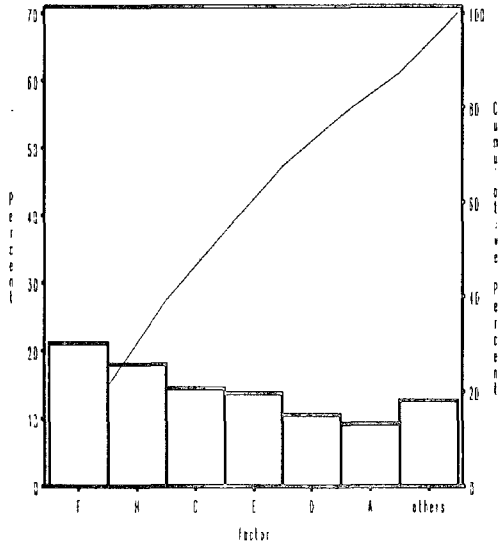


그림 3.2: 범위에 의한 주효과의 파레토 그림

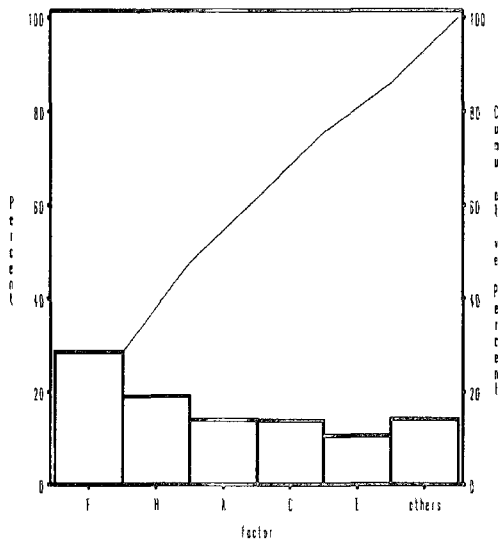


그림 3.3: Pareto ANOVA

83.2 %로 선별된 9 개의 효과는 $F_q, H_q, C_l, E_q, A, D_l, E_l, C_q, D_q$ 이다. 반면에, 표3.1에서와 같이 2수준 요인과 3수준 요인의 주효과의 크기를 범위로 정의하여 작성된 파레토 그림이 그림 3.2이다. 그림3.2에 따르면, 누적 기여율 87.3 %까지로 선별된 5개의 요인은 F, H, C, E, D, A 이다. 그림3.3은 각 효과의 평균제곱의 크기에 근거하여 작성된 Pareto ANOVA로 누적 기여율 85.9 %로 선별된 5개의 요인은 F, H, A, C, E 이다. 그림3.1은 각 주효과의 점정통계량의 크기에 근거한 Pareto ANOVA에서 선별한 5 개의 효과를 선별하였을 뿐만 아니라 3수준 요인 효과의 곡선효과의 존재성의 여부에 관한 추가 정보를 제공한다. 즉, 그림3.1은 요인 F, H, E의 곡선효과가 존재하고, 요인 C는 일차효과가 존재한다는 정보를 제공한다. 점에서 그림3.3보다 구체적이다.

참고문헌

- 박성현(1993). <응용실험계획법>, 영지문화사, 서울.
 박성현(1993). <품질공학>, 민영사, 서울.
 Park, Sung H. (1996) *Robust Design and Analysis for Quality Engineering*, Chapman & Hall, London.

[2003년 12월 접수, 2004년 4월 채택]

Pareto Analysis of Experimental Data by $L_{18}(2 \times 3^7)$ Orthogonal Array*

Yong Bin Lim ¹⁾

ABSTRACT

The Pareto diagram analysis of the experimental data by the two level orthogonal arrays has been used widely in practice since it is a graphical, quick and easy method to analyze experimental results, which does not use the analysis of variance to screen significant effects. For the analysis of the experimental data by $L_{18}(2 \times 3^7)$ orthogonal array, Park(1996) proposed Pareto ANOVA in which the size of effects is defined by the mean squares of effects and the Pareto principle is used. In this paper, a new approach of the Pareto diagram analysis of the experimental data by $L_{18}(2 \times 3^7)$ orthogonal array is proposed. The main idea is to partition the size of three level effects by that of linear and quadratic orthogonal contrasts of those effects.

Keywords: Pareto diagram analysis, $L_{18}(2 \times 3^7)$ orthogonal array, Linear orthogonal contrast, Quadratic orthogonal contrast

* This work was supported by Grant #R06-2002-012-01002-0 for the Women's University from Korea Ministry of Science and Technology.

1) Professor, Dept. of Statistics, Ewha Women's University, 21 Daehyun-dong, Sodaemooon Gu, Seoul 120-750, KOREA

E-mail: yblim@ewha.ac.kr