

남북한 초등학교 교과서의 분수 도입 방식 비교

박 교 식* · 이 경 화** · 임 재 훈***

이 연구에서는 남북한 초등학교 교과서에서 분수를 도입하는 과정을 분할분수와 동치분수로 나누어 비교하여 차이점을 파악하고 그에 관해 반성적으로 논의를 전개하였다. 논의 결과, 남한 교과서는 사과와 같은 구체물을 등분할하는 활동의 소재로 사용하고 있으나, 북한 교과서에는 그와 같은 구체물을 실제로 등분할하는 활동은 제시되어 있지 않았다. 남한의 교과서는 연속량의 등분할과 이산량의 등분할을 시간 간격을 두고 다루는데 비해, 북한 교과서는 분수 도입 시점에서 같이 다룬다는 것도 확인하였다. 측정 단위가 붙은 양분수의 사용 측면에서도 남북한 교과서는 차이를 드러냈다. 또한 외연적 방법에 따라 분수를 도입한다는 점에서는 공통적이지만, 남한과 북한은 활동과 의미에 어느 정도 초점을 두는가에 있어서 차이를 보였다. 동치분수를 도입하는 방식을 비교한 결과, 세 가지 차이점을 확인하였다. 가장 큰 차이는 동치분수를 구하는 직접적인 방법을 제공하는가, 동치분수의 특성과 동치 분수를 구하는 방법에 대한 탐구를 자극하는가 하는 측면에서 확인할 수 있었다.

1. 서 론

이 연구의 목적은 분수 도입에 초점을 맞추어 남북한 초등학교 수학 교과서를 비교하는 것이다. 즉, 북한의 초등학교 교과서에서 분수를 도입하는 과정이 현재의 우리나라 초등학교 교과서에서의 도입 방법과 같은지 다른지, 다르다면 구체적으로 어떻게 다른지를 비교·분석하는 것이다. 분수는 그 의미에 따라 분할분수, 양분수, 배분수, 조작분수, 몫분수, 비율분수로 구분될 수 있다(片桐重男, 1995; 이용률, 2001). 이러한 의미상의 구분 방식을 참고하여, 남북한 교과서에서 어떤 종류의 등분할 상황을

어떤 방식으로 다루고 있는지, 그리고 동치분수의 도입 방식에 어떤 차이가 있는지에 초점을 맞추어 남북한의 분수 도입과 관련된 세부적인 차이점에 관해 논의하게 된다. 또, 드러난 차이 이면에 놓인 의도나 가정의 차이에 관해서도 논의하게 된다. 분수 도입과 관련하여 남북한 교과서에서 찾을 수 있는 차이점은 현재 우리가 분수를 도입하는 방식과 그 방식 이면에 놓여 있는 가정 또는 의도에 대하여 반성하게 하는 기회를 제공할 수 있다. 교과서 비교 연구를 통해 얻을 수 있는 일차적인 이점, 곧 이 연구의 일차적인 목적은, 남북한 교과서에서의 분수 도입 방식 중 어느 쪽 더 좋은가를 판정하는 데 있는 것이 아니라, 남북한 비교를

* 경인교육대학교, pksark@ginuc.ac.kr
** 한국교육대학교, khmath@knu.ac.kr
*** 경인교육대학교, jhyim@ginuc.ac.kr

통해 그동안 의식적인 반성의 대상으로 삼지 못했던 문제를 새롭게 인식하고, 현재의 전개 방식 이면에 암묵적으로 놓여 있는 가정의 타당성에 대해 반성해 볼 수 있는 기회를 얻는 데에 있다. 이러한 반성은 기본적으로 타자를 거울로 삼아 자신을 되돌아보는 형식을 취한다. 이 연구의 경우, 북한의 교과서를 거울로 삼아 우리나라 교과서의 이면에 담긴 가정에 대해 반성하는 형식이 될 것이다. 그러나 이러한 반성적 논의가 우리나라의 방식보다 북한의 방식이 더 좋은 것으로 판단하는 것으로 오해되어서는 안 된다. 이 연구의 의도는 북한의 교과서를 거울로 하여 우리의 것을 반성하고, 남북한 수학과 교육과정과 수학 교과서의 통합과 관련하여 연구해야 할 구체적인 이슈가 무엇인지 확인하고 논의하는 데에 있다. 이는 궁극적으로 남북한의 통합 수학과 교육과정이나 수학 교과서를 개발하는 데에 도움이 될 수 있다.

현재 북한의 수학교육에 대한 충분한 연구가 이루어지고 있는 것은 아니다. 그 주된 이유는 아마도 자료를 구하기 어렵다는 사실일 것이다. 그럼에도 불구하고, 박문환(2002a, 2002b)은 피타고라스 정리와 수학적 귀납법과 관련해 남북한 교과서를 비교·분석한 바 있다. 또 임재훈·이경화·박경미(2003)는 분수의 나눗셈과 관련해 남북한 초등학교 교과서를 자세히 비교하고, 아울러 다른 주제에 대해서도 그와 같은 세밀한 연구가 필요하다고 주장하였다. 분수의 도입에 관한 이 연구는 이러한 선행 연구와 맥을 같이 한다. 우리나라의 초·중·고등학교 학제는 6-3-3제이고, 북한의 학제는 4-3-3제이다. 북한의 고등중학교 1, 2학년 교과서에서 분수의 곱셈과 나눗셈, 분수와 소수 사이의 상호관계가 다루어지므로, 이 연구에서는 우리나라의 초등학교 6년간과 북한의 인민학교 4년간

및 고등중학교 2년간의 내용을 비교할 것이다. 이 연구의 결과는 북한에서의 분수의 도입 과정을 구조적으로 파악하는 데, 그리고 장차 남북한 통합 교육과정 및 교과서를 개발하는 데 도움이 될 것이다.

II. 분할분수의 도입 방식 비교

양분수, 배분수, 조작분수, 몫분수는 분할분수의 상이한 측면을 나타내는 것으로 볼 수 있다. 분할분수는 ‘똑같이 나누는 것(등분할)’과 ‘그 나눈 것 중의 몇 개를 표현하는 것’에 의하여 만들어진다. 분할분수 중에서 $\frac{1}{3}m$ 와 같이 어떤 양의 측정값을 나타내는 분수를 ‘양분수(量分數)’, $\frac{1}{3}$ 둘을 $\frac{2}{3}$ 로 나타내는 것과 같이 $\frac{b}{a}$ 를 $\frac{1}{a}$ 의 b 배로 보는 경우를 ‘배분수(倍分數)’라고 한다. 역시 분할분수 중에서 ‘6의 $\frac{1}{3}$ ’과 같이 등분할 한 후 일부분을 취하는 조작을 나타내는 경우를 ‘조작분수(操作分數)’라고 한다. $3 \div 4$ 를 $\frac{3}{4}$ 으로 나타내듯이 나눗셈을 했을 때의 몫을 분수로 나타낸 것을 몫분수라 한다(片桐重男, 1995; 이용률, 2001).

연속량과 이산량에 대한 등분할과 비례적 추론은 분수 개념 이해에 핵심이 되는 두 요소이다(Baroody & Coslick, 1998). 특히, 등분할은 비형식적인 공평한 나누기 상황으로부터 부분-전체로서의 분수와 동치인 분수를 찾는 작업에서 기초적인 비례성의 스킴으로 작용한다(우정호·유현주, 1995: 134). 이 장에서는 남북한 교과서에서 분할분수를 어떻게 다루고 있는지, 분수를 도입하기 위하여 어떤 종류의 등분할 상황을 다루고 있는지 등에 대해 살펴본다. 남

북한 교과서에서는 공통적으로 등분할 상황 속에서 분수 개념을 도입하고 있으나, 다음과 같은 점에서 차이를 보인다.

첫째, 사과와 같이 엄밀한 의미에서 실제로 등분하기 어려운 구체물을 등분할 활동의 소재로 사용하고 있는지의 여부에서 차이가 있다. 남한에서 분수가 처음 도입되는 것은 3-가 단계 교과서에서이다. 3-가 단계 교과서의 분수 도입부에는, [그림 II-1]과 같이 ‘사과’라는 구체물을 등분할하는 활동이 나온다(교육인적자원부, 2001a: 86).

활동 1 사과 한 개를 반으로 똑같이 나누어 보시오.

- 나는 것들이 서로 같은지 비교하십시오.
- 똑같이 나누어졌습니까?



활동 2 사과 한 개를 반의 반으로 똑같이 나누어 보시오.

- 사과 한 개를 반으로 똑같이 나누고, 각각을 또 반으로 똑같이 나누어 보시오.
- 나는 것들이 서로 같은지 비교하십시오.
- 똑같이 나누어졌습니까?



[그림 II-1] 남한 교과서의 구체물 등분할

북한에서는 인민학교 2학년에서 분수 개념이 처음 도입된다. 이 때 사과와 같이 정확한 등분할이 거의 불가능한 구체물을 실제로 등분할하는 활동을 수행하게 하지는 않는다(김영건·고재의, 2001: 96-97). 인민학교 3학년 교과서에서 분수를 그 기호와 함께 다시 도입할 때도 이러한 활동을 하게 하지는 않는다(남호석·김희일, 2001).

이러한 남북한 교과서의 차이점은, 사과와 같이 본래 의미에 맞게 등분할하기 어려운 사물을 등분할하는 활동을 아동들에게 수행하게 하는 것 이면에 놓인 교육적 의도의 적절성에

대해 반성해 볼 기회를 제공한다. 사실상 3-가 단계 수학 교과서의 활동 1과 활동 2에서 사과 한 개를 반으로 똑같이 나누는 것이나 사과 한 개를 반으로 똑같이 나누고, 각각을 또 반으로 똑같이 나누는 것은 거의 불가능하다. 설사 운 좋게 정확히 등분할 되었다고 하더라도 ‘나눈 것들이 서로 같은지 비교하는 것’ 역시 불가능하다. 모양으로 판단하기도 어려우며, 그렇다고 저울로 각 조각의 무게를 재어 그것을 토대로 판단하기도 어렵다. 이러한 점을 감안하여, 교사용 지도서에서도 두 부분으로 나눈 것들이 어느 정도 같으면 똑같이 나눈 것으로 인정해 주어야 한다고 하고 있다(교육인적자원부, 2001e: 204). 이러한 사과 등분할 활동에는 다음과 같은 문제점도 있다. “사과 한 개를 반으로 똑같이 나누어 보시오.”라는 처음 지시하는 어느 정도 제대로 수행했다면, 그 수행 과정에서 이미 나누어진 조각들이 똑같은지 아는 것이므로, 나눈 다음에 “나눈 것들이 서로 같은지 비교하십시오.”와 “똑같이 나누어졌습니까?”라고 묻는 것은 의미가 없다.

이러한 문제점이 있음에도 이 활동을 학생들에게 수행하게 하는 의도는 무엇인가? 사과와 칼을 준비하고 실제 잘라 보고 자른 조각들을 비교해 보는, 상당한 준비와 시간을 요하는 활동을 하는 과정에서 학생들이 경험하거나 학습하는 의미 있는 수학적 사고나 내용은 무엇인가? 그 내용을 학습하는데 위와 같은 활동을 수행하는 것이 경제적이고 효율적인 방법인가? 이러한 점에 대해 반성할 필요가 있다.

남한 교과서에 제시된 구체물 분할 활동의 이면에는, 아동들로 하여금 등분할이 필요한 실생활 상황을 경험하는 가운데 분할분수의 필요성을 인식하게 하려는 의도, 곧 수학과 실생활과의 연결 및 활동에 기초한 수학 학습을 도모하려는 의도가 있는 것으로 보인다. 그러나

이러한 의도를 달성하기 위해 위와 같이 실제로 달성하기 어려운 사물의 등분할 상황을 제시하고 직접 잘라 보는 활동을 하게 해야만 하는 것은 아니다. 예를 들어, 실제적 상황으로부터 등분할의 필요성을 인식하게 하는 것이라면, “사과 한 개를 친구와 사이좋게 나누어 먹으려면 어떻게 해야 할까?”라는 질문을 통해 “똑같이 나누어 먹는다.”는 답을 이끌어내는 것으로도 그 의도하는 바를 달성할 수 있다.

현재 우리나라 교과서에서는 위에 제시한 활동 1, 2 바로 앞의 ‘생활에서 알아보기’에서, 언뜻 보기에 “사과 한 개를 친구와 사이좋게 나누어 먹으려면 어떻게 해야 할까?”와 유사해 보이는 과제를 제시하고 있다.

생활에서 알아보기

사과가 한 개 있습니다. 친구와 똑같이 나누어 먹으려고 합니다. 어떻게 해야 하는지 알아보시오.



[그림 II-2] 남한 교과서 분수 도입시 ‘생활에서 알아보기’

그러나 이 생활에서 알아보기의 과제는 “똑같이 나누어 먹으려고 하는데, 어떻게 해야 하는가”를 묻는 것이다. 물론 이 과제가 “똑같이 나누어 먹어요.”라는 단어반복적인 대답을 기대하는 것이라고 볼 수는 없다. 이 과제는 ‘사과를 똑같이 나누는 방법’을 생각해 볼 것을

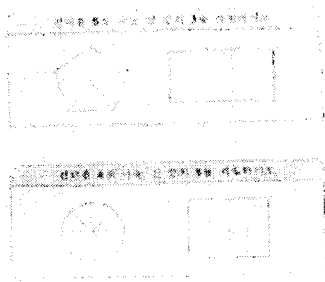
요구하는 것이다. 이것은 “사과 한 개를 친구와 사이좋게 나누어 먹으려면 어떻게 해야 할까?”라는 질문과는 다른 의도를 담고 있는 질문이다.

한편, 실생활의 소재를 사용하더라도 사과보다는 피자나 직육면체 모양의 케이크를 사용하는 것이 더 적절한 면이 있다. 교사용 지도서에서는 사과가 학생들이 실생활에서 분수를 맛볼 수 있는 좋은 소재라고 하고 있으나(교육인적자원부, 2001e: 204), 사과가 아동들에게 피자나 케이크보다 실생활에서 분수를 맛볼 수 있는 더 좋고 친근한 소재라고 단정할 수 없다. 피자나 케이크도 사과와 마찬가지로 완전히 정확한 등분할은 쉽지 않지만, 모양상 사과보다 대칭성이라는 측면에서 장점이 있으며, (내부를 포함한) 원이나 직육면체라는 수학적 대상을 구체화한 모델로 간주될 수 있다.

둘째로, 분할분수 개념 도입시, 연속량의 등분할과 이산량의 등분할을 동시에 사용하는가에 있어 남북한 교과서가 차이를 보인다. 중이 한 장을 4등분하는 것은 연속량의 등분할에 해당하며, 연필 6개를 2묶음으로 나누는 것은 이산량의 등분할에 해당한다.¹⁾ 남한의 3-가 단계 교과서에서는, 위에 제시한 사과 한 개의 등분할 활동에 이어서, [그림 II-3]과 같이, 직사각형이나 원과 같은 하나의 연속량을 등분할하는 상황을 제시하고, ‘전체를 몇으로 나눈 것 중의 몇’을 색칠하게 함으로써 부분-전체의 관계를 확인하도록 한다(교육인적자원부, 2001a: 97).²⁾

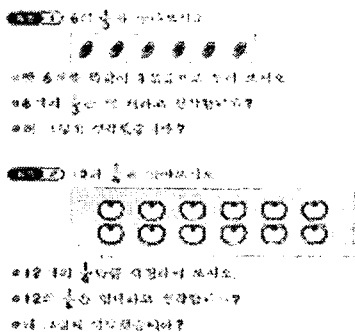
1) 중이 한 장이나 사과 한 개에서 ‘장’, ‘개’ 자체는 이산량이지만, 중이 한 장 전체의 넓이나 사과 한 개 전체의 부피에 주목해서 보면 연속량이다. 이 논문에서 ‘연속량의 등분할’이라는 표현은 넓이 또는 부피와 같은 연속량을 등분할한다는 의미로 사용하였다. ‘이산량의 등분할’은 사과 6개를 2묶음으로 나누는 것과 같이 이산량을 등분할한다는 의미로 사용하였다.

2) 정사각형이나 원 외에도 직사각형, 정삼각형 모양의 도형을 등분할하고 ‘전체를 몇으로 나눈 것 중의 몇’으로 표현하게 한다. 이는 Dienes(1964)의 수학적 다양성의 원리를 반영한 것으로 보인다. 이 상황에서 본질에 해당하는 것은 하나의 연속량의 등분할, 부분-전체의 관계이고 본질에 해당하지 않는 것은 전체를 나타내는 도형의 모양과 크기이다(강지형 외, 1999: 82에서 재인용).



[그림 II-3] 남한 교과서의 연속량 등분할

그러나 3-가 단계에서 분할분수 도입시 이산량의 분할 활동은 나오지 않는다. 남한에서 이산량의 등분할 상황을 분수와 관련하여 다루는 것은 한 학기 후인 3-나 단계이다. 3-나 단계에서는 이산량, 예를 들어, 빵 6개를 세 사람이 똑같이 나누어 먹는 상황을 소재로 빵 6개를 똑같이 3묶음으로 묶는 활동을 통해 6의 $\frac{1}{3}$ 을 학습하게 한다. 이어서 '12의 $\frac{1}{4}$ ', '20의 $\frac{1}{5}$ ', '18의 $\frac{1}{3}$ ' 등을 색칠 활동에 의하여 다룬 후, 수로 표현하도록 한다(교육인적자원부, 2001b: 72-73).³⁾



[그림 II-4] 남한 교과서의 이산량 등분할

이와는 달리, 북한에서는 처음 분수 개념이 등장하는 시점에서 연속량과 이산량을 동시에 등분할의 소재로 사용한다. 인민학교 2학년 교과서의 '나누기(2)' 단원에 다음 [그림 II-5]와 같이 '종이올'을 2로 나누고 '이분의 일', 3으로 나누고 '삼분의 일'이라고 부른다는 설명을 통하여 등분할 상황을 제시한다.⁴⁾

이것은 연속량의 등분할 상황에 해당한다. 그리고 이어서 동그라미 12개를 2등분, 3등분, 4등분하도록 하는 예를 제시한다. 이것은 이산량의 등분할 상황에 해당한다. 분수를 정의하기 이전에 연속량과 이산량의 등분할을 동시에 제시하고 각각의 등분할 상황에 대하여 '2분의 1', '3분의 1' 등의 공통된 표현이 사용된다는 것을 확인하게 하고 있다(김영건·고재의, 2001: 96-97).

종이올을 둘로 같게 나누어 보시오. 2로 같게 나누는 하나는 이분의 일, 3으로 같게 나누는 하나를 삼분의 일이라고 합니다.

동그라미가 12개 있습니다. 2분의 1, 3분의 1, 4분의 1만큼 그려보시오.

2분의 1	
3분의 1	
4분의 1	

[그림 II-5] 북한 교과서의 등분할 상황

뒤이어 제시된 문제 중에도 “농장원 42명은 영양단지를 옮겨 심었습니다. 농장원의 7분의

3) 뒤이어 나오는 진분수의 크기 비교에서는 전체가 1인 연속량만 사용된다.

4) 남한의 교과서에서는 분할분수를 도입할 때 실제로 구체물을 등분할한 후 일부분을 취하는 조작 활동을 많이 하게 하나, 북한 교과서에서는 남한 교과서에 비해 실제로 구체물을 직접 손으로 분할해 보는 활동은 별로 없다.

1은 영양단지를 낳았습니다. 몇 명이 낳았습니까?”와 같이 이산량의 등분할과 관련된 문제가 제시되어 있다(김영건·고재의, 2001: 97).

한편, 우리나라뿐 아니라 일본과 중국도 분수를 처음 도입하는 단계에서 이산량의 등분할은 사용하지 않고 연속량의 등분할만 사용하고 있다(杉山吉茂 외, 2004: 63-65; 細川藤次 외, 2004: 58-61; 人民教育出版社小學數學室, 2003: 98-105). 이런 점에서 보면, 북한 인민학교 2학년 교과서의 분수 개념 도입 단계에서 이산량의 등분할과 연속량의 등분할을 동시에 사용한 것은 다소 특이한 것으로 보인다.

북한은 인민학교 2학년에서 등분할로 분수의 개념을 도입한 후, 3학년에서 독립된 분수 단원에서 분수의 의미를 다시 한 번 다루면서 분수 기호를 도입한다. 인민학교 3학년 교과서의 분수 단원에는 주로 연속량의 등분할 상황이 제시되어 있으나, 더불어, “연필 50자루를 세 학생에게 나누어 주었습니다 첫 학생에게는 $\frac{1}{5}$, 둘째 학생에게는 $\frac{2}{5}$, 셋째 학생에게는 나머지를 주었습니다. 몇 자루씩 주었습니까?”와 같이 이산량의 분할과 관련된 문제도 들어 있다(남호석·김희일, 2001: 168). 인민학교 4학년의 분수 단원에서도 분수의 분모와 분자가 의미하는 바를 설명하면서 $6m$ 의 $\frac{2}{3}$, 6알의 $\frac{2}{3}$ 를 같이 제시하고 있다(남호석·박희순, 2002: 159).

이러한 남북한 교과서의 차이점 이면에 놓여 있는 가정에 대해서 생각해 보자. 남한의 3-가 단계 교과서의 연속량의 등분할에서는 사과 1개, 떡 1덩이, 종이 1장, 직사각형 1개, 원 1개와 같은 것이 분할할 전체로 주어진다. 사과 1개나 종이 1장을 둘로 나누는 것과 같은 연속량의 등분할 상황에서, 분수 $\frac{1}{2}$ 은 부분-전체의

관계를 나타내는 추상적 개념으로 인식될 수도 있지만, 동시에 사과 반 개라는 절대적인 한 양, 구체적인 한 양을 나타내는 것으로 파악될 수 있다. 사과 3개라는 표현에서 자연수 3이 단위(부분)와 전체 사이의 추상적 관계보다는 주어져 있는 구체적인 대상의 크기를 나타내는 것으로 여겨지는 것과 마찬가지로, 사과 $\frac{1}{2}$ 개에서 분수 $\frac{1}{2}$ 도 특정한 양의 크기를 나타내는 것으로 여겨질 수 있다.

그러므로 부분-전체의 상대적 관계라는 추상적인 분수 개념을 강화한다는 면에서 본다면, 전체가 1인 하나의 연속량의 등분할 상황으로는 충분하지 않다. 이를 위해서는 이산량의 등분할 상황 또는 2m, 3l, 6kg과 같이 측정값이 2이상인 연속량의 등분할 상황이 필요하다. 이와 같은 양의 등분할 상황은 전체가 1인 연속량의 등분할 상황과 비교할 때, 어떤 특정한 양이 아니라 부분-전체의 상대적 관계라는 분수 개념의 본질적 의미를 더 잘 드러낸다. 빵 6개, 사과 12개, 별 18개와 같은 이산량의 등분할 상황에서는 똑같은 $\frac{1}{3}$ 이라도 전체가 6인가 18인가에 따라 절대적인 양은 달라지므로, 부분-전체의 상대적인 관계로서의 분수 개념이 강화될 수 있다.

남한 교과서에서는 전체를 등분할하고 부분과 전체와의 관계를 표현하는 분할분수 개념을 3-가 단계와 3-나 단계로 나누어 연속량에서 이산량으로 시간을 두고 옮겨 가며 강화시키려는 의도를 담고 있는 것으로 보인다. 이는 남한 교과서가 그만큼 ‘부분-전체’의 추상적 관계로서의 분수 개념을 중히 여긴다는 것을 뜻하기도 한다.

남한 교과서가 연속량과 이산량의 분할을 한 시점에 같이 제시하지 않은 것에는, 연속량의

등분할에 비해 이산량의 등분할이 아동들에게 어려울 것이라는 가정 또한 놓여 있다고 보아야 한다. 반면, 처음 분수를 도입하는 시점부터 연속량과 이산량의 등분할을 동시에 사용하는 북한 교과서의 이면에는 연속량의 등분할과 이산량의 등분할이 아동에게 어려움의 면에서 별 차이가 없다고 보는 가정이 있는 것으로 보인다.

여기서 북한 교과서가 ‘자연수의 나눗셈 단원’에서 분수 개념의 도입을 시도하고 있다는 점을 눈여겨 볼 필요가 있다. 우리나라도 분수 개념의 도입 이전에 자연수의 나눗셈을 학습하지만, 남한의 3-가 단계 교과서에서 분수 개념의 도입은 자연수의 나눗셈과 무관하게 전체가 1인 연속량을 등분할하는 상황 속에서 이루어진다. 나누어지는 수가 1이고 나누는 수가 2 이상인 자연수이므로 몫은 진분수가 된다. 따라서 이 맥락에서는 곱셈 구구의 역연산으로서의 자연수의 나눗셈과 분수 개념을 연결지을 수 없다.

그런데 $8 \div 2 = 4$ 와 같은 나눗셈은 사과 8개를 두 명이 나누어 먹는 이산량의 분할 상황과 바로 연결된다. 북한 교과서가 자연수의 나눗셈의 맥락에서 분수를 도입한 것은, 이산량의 분할을 나눗셈 도입 초기부터 사용하는 것을 가능하게 해주는 교수학적 장치로 보인다.

연속량의 등분할과 이산량의 등분할의 동시 사용과 관련된 남북한 교과서의 차이는 분수 개념을 처음 도입하는 단계부터 자연수의 나눗셈과 연계하는 방안의 타당성, 연속량의 분할 상황과 이산량의 분할 상황에 대해 아동들이 심리적으로 느끼는 어려움의 정도 차이에 대해 연구할 필요가 있음을 시사한다.

셋째, 분수 도입 단계에서 측정 단위가 붙은 양분수의 사용에 있어 남북한 교과서에 차이가 있다. 남한에서 분수 개념이 처음 도입되는 3-가 단계 교과서에는 m , kg , l 와 같은 측정 단

위가 붙은 양분수, 곧 연속량을 측정한 표현으로서의 양분수가 나타나지 않는다. 3-나 단계 교과서의 6의 $\frac{1}{3}$ 과 같은 분수 개념 도입에서도 그러한 양분수는 사용되지 않는다. 즉, 양의 측정 상황에서 분수를 도입하지 않는다. 다만, 소수를 도입하는 부분에서 “1mm는 분수로 몇 cm입니까?”와 같은 질문이 등장한다(교육인적자원부, 2001b: 81). 4-가 단계의 분수 단원에서는 분모가 같은 분수의 크기를 비교할 때, $\frac{7}{5}m$, $\frac{9}{5}m$ 와 같은 표현이 한 번 나온다(교육인적자원부, 2001c). 4-나 단계의 분수 단원에는 이러한 양분수는 나오지 않는다(교육인적자원부, 2001d).

이에 비해, 북한에서는 분수의 도입 단계에서 양분수가 남한에 비해 상대적으로 많이 사용된다. 인민학교 2학년에서 자연수 나눗셈 맥락에서 분수 개념을 ‘몇 분의 몇’이라는 표현과 더불어 간단히 도입한 후, 3학년에서는 분수 기호를 도입하면서 분수의 의미를 재차 다루는데, 이때 측정 단위가 붙은 양분수를 도입 소재로 사용하고 있다(남호석·김희일, 2001: 156-158).

다음은 인민학교 3학년 분수 단원 첫머리이다.

분 수

1. 영순아씨 씨들에게 드림 꽃다발을 만드는데 쓰려고 1m 종이용지를 곱합과 같이 나누었습니다.

네 종이의 길이분 몇개로 잘게 나누었습니까?



[그림 II-6] 북한 교과서의 양분수

양(量)을 염두에 두지 않고 도형 위에서 일 반화된 의미를 중심으로 분수를 정의하는 남한 과 달리, 북한은 단위량을 생각하고 그 양에 대하여 등분할을 생각하도록 하고 있다. 북한의 인민학교 교과서에는 양분수를 사용한 문제 도 다수 제시되어 있다. 예를 들어, 다음과 같 은 문제가 그것에 해당한다(남호석·박희순, 2002: 159).

■ 다음의 분수들은 무엇을 전체로 보고 등분 한 것을 나타냅니까? 그림을 그리고 설명하시오.

1) $\frac{2}{5}m$, $\frac{3}{4}kg$, $\frac{2}{3}l$

2) $5m$ 의 $\frac{1}{2}$, 20명의 $\frac{3}{5}$

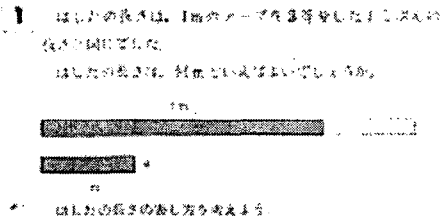
남한은 부분-전체의 상대적 관계를 나타내는 추상적인 분수 개념을 3, 4학년의 분수 도입기 에 강조하는 것으로 보이며, 이에 비해 북한은 상대적으로 측정량으로서의 분수를 남한보다 비중 있게 다루는 것으로 보인다. 분수 개념 도입시에 남북한 교과서가 그 각 측면에 주목 하는 정도에서 차이를 보이고 있다.

이러한 비교로부터, 우리나라가 부분-전체로 서의 추상적인 분수 개념을 현재보다 덜 다루 어야 한다거나 북한이 측정량으로서의 분수를 덜 다루어야 한다는 식의 시사점을 얻을 수는 없다. 다만, 부분-전체로서의 추상적인 개념이 나 측정량으로서의 구체적인 분수 개념을 모두 분수 개념의 한 측면으로 인정한다면, 우리나 라 입장에서는 측정량으로서의 분수 개념을 필 요한 만큼 충분히 다루고 있는지 반성해 볼 수 있다. 북한의 입장에서는, 우리의 것을 거울로

삼아, 부분-전체로서의 추상적인 분수 개념을 필요한 만큼 다루지 못하고 있는 것은 아닌지 반성해 볼 수 있을 것이다. 이러한 상호 간의 반성적 논의가 필요한 부분을 추출하고 반성하 는 것은 향후 통합 교육과정 개발에 도움이 된 다.

우리나라 또는 북한과는 달리, 측정 상황을 더 강조하면서 분수를 측정량의 표현으로 도입 하는 것도 생각할 수 있다. 예를 들어, 일본의 교과서에서는 측정할 때 우수리가 남는 상황⁵⁾ 을 도입 상황으로 설정하여, 측정량으로서의 분수 개념을 우리나라나 북한보다 강조하고 있 다(杉山吉茂 외, 2004: 63-65; 細川藤次 외, 2004: 58-61).⁶⁾

① 測定の長さの測り方



<그림 II-7> 일본 동경서적 교과서의 분수 도입⁷⁾

우정호와 유현주(1995: 137)는 우리나라의 6 차 수학과 교육과정과 수학 교과서를 분석하여 부분-전체 이외의 유리수 개념이 발생하는 맥 락에서 유리수 개념의 본질과 의미가 충분히 다루어지지 않고 있다는 결과를 도출한 바 있 다. 측정 상황에서 남는 우수리를 표현하는 수 단의 측면 역시 분수 개념의 한 의미 또는 맥

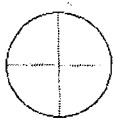
5) 우수리가 측정 단위의 $\frac{1}{3}$ 인 경우와 같이, 소수로 우수리를 표현하기 어려운 상황까지 포함한다.

6) 일본은 소수와 분수 모두 우수리가 남는 상황에서 우수리를 표현하는 수단으로 도입하고 있다.

7) 우수리의 길이는 1m의 테이프를 3등분한 하나의 길이와 같습니다. 우수리의 길이는, 몇 m라고 하면 좋을 까요? (그림) 우수리의 길이를 나타내는 방법을 생각해 봅시다.

라기라고 할 수 있을 것이다. 위에서 살펴본 바와 같이, 현재 우리나라 교과서에서는 측정수로서의 분수 개념을 북한 (또는 일본)보다 상대적으로 약하게 취급하고 있다. 이러한 차이점은, 우정호와 유현주가 수행한 것과 같은 방식의 수학과 교육과정 및 수학 교과서 분석 연구가, 측정수로서의 분수 개념을 우리나라가 적절한 정도로 취급하고 있는지와 관련하여 7차 수학과 교육과정 및 수학 교과서를 대상으로 수행될 필요가 있음을 시사한다.

넷째로, 분수의 정의 또는 뜻을 제시하는 방식에서 남북한이 차이가 있다. 우정호와 조영미(2001: 367)의 분류 방식에 따르면, 남한과 북한 교과서에서는 모두 외연적 정의 방법, 그 중에서도 지시하여 정의하는 방법에 따라 분수를 도입한다. 남한은 3-가 단계 교과서에서 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ 을 예로 하여 분할분수로서의 분수를 정의한다. 등분할 상황에서 일부분을 색칠하고 전체 몇에 대하여 몇에 해당하는지 반복하여 확인하였으므로, 정의에 사용된 분수들은 다른 진분수로 전환될 수 있다.



색칠한 부분은 전체를 똑같이 4로 나눈 것 중의 3입니다.

이것을 $\frac{3}{4}$ 이라 쓰고, 사분의 삼이라고 읽습니다.

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ 과 같은 수를 분수라고 합니다.

[그림 II-8] 남한 교과서의 분수의 정의

남한의 교과서에서는 양분수, 배분수, 조작분수 등 분할분수의 여러 의미를 폭넓게 반영하여 정의하기보다는 부분과 전체의 크기를 비교하는 전형적인 상황을 반복하여 제시하고, 그에 기초하여 분수를 정의하고 있다. 3-나 단계 교과서에서 배분수의 개념을 다루지만, 배분수

의 관점에서 분수의 뜻을 다시 설명하지는 않는다. 남한 교과서에서는 3-가 단계에서 분수를 정의한 이후 초등학교 6학년까지 교과서에서 분수의 뜻을 다시 설명하거나 정의하지 않는다. 이에 비하여, 북한 인민학교 교과서에서는 2학년에서 앞서 확인한 [그림 II-5]와 같이 나뉠셈의 한 활동으로 분수 개념을 도입하고, '2분의 1, 3분의 1, 등'의 표현을 반복적으로 사용한다. 이는 남한 교과서에서 사용하는 '똑같이 2로 나눈 것 중의 1'이라는 표현과 마찬가지로 정의 없이 반복 사용하면서 분수 정의의 토대로 활용하는 일종의 매개적 표현이라고 할 수 있다.

인민학교 3학년 교과서에서 "1m를 2등분한 한 몫의 길이를 2분의 1메터라고 부르고, $\frac{1}{2}m$ 와 같이 쓴다. 1m를 3등분한 한 몫의 길이는 $\frac{1}{3}m$ (3분의 1메터)이다. $\frac{1}{3}m$ 가 들인 길이를 3분의 2메터라고 부르고 $\frac{2}{3}m$ 와 같이 쓴다."고 하여 $\frac{1}{2}m$, $\frac{1}{3}m$, $\frac{2}{3}m$ 를 정의하고 있다. 여기서 사용된 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ 는 얼마든지 $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ 와 같은 분수로 전환될 수 있다. 이와 같이 양분수의 관점에서 분할분수의 의미를 다시 한번 다룬 후, [그림 II-9]과 같이 분수를 정의한다(남호석·김희일, 2001: 159).

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$, ...과 같은 수를 분수라고 부릅니다.
분수에서 가로줄위에 있는 수를 분자, 가로줄아래에 있는 수를 분모라고 부릅니다.

[그림 II-9] 북한 교과서의 분수 정의

인민학교 4학년 교과서의 분수 단원에서는 양분수의 관점에서 분할분수의 뜻을 재차 다음과 같이 설명한다(남호석·박희순, 2002: 158-159).

1m, 3kg 을 각각 전체로 보고 그것을 3등분한 1몫을 1m 의 $\frac{1}{3}$, 3kg 의 $\frac{1}{3}$ 이라고 부릅니다.

10l 의 $\frac{1}{3}$ 은 10l 를 3등분한 1몫입니다.

10의 $\frac{2}{3}$ 는 그것의 $\frac{1}{3}$ 이 2, 즉 10l 를 3등분한 2몫입니다.

분수 $\frac{2}{3}$...(2몫)
...(3등분)

분수의 분모는 전체를 몇등분하였는가를 나타내고 분자는 그러한 몫이 몇인가를 나타냅니다.

[그림 II-10] 북한 인민학교 4학년 교과서에서의 분수 뜻 설명

고등중학교 1학년 교과서에서는 문자를 사용하여 분수의 뜻을 재차 설명하고, 그 의미를 문자식으로 표현하고 있다(남호석·김봉래·김경훈, 2002: 41-42).

분수 $\frac{n}{m}$ 은 전체(1)를 m 등분한 한 몫이 n 개라는 것을 의미한다.

$\frac{n}{m} = (1 \div m) \times n$

a 의 $\frac{n}{m}$ 은 a 를 전체로 보고 m 등분한 n 몫을 말한다.

a 의 $\frac{n}{m} = (a \div m) \times n$

분수는 분자를 분모로 나눈 상과 같다.

$\frac{n}{m} = n \div m$

[그림 II-11] 북한 고등중학교 1학년 교과서에서의 분수 뜻 설명

다양한 도형을 다양한 방법으로 등분할하고, 다양한 크기의 부분을 택함으로써 단위분수를 포함한 진분수 개념을 동시에 다룰 수 있었던 남한의 교과서와 달리, 북한 교과서에서는 나뭇셈 활동의 일부로 등분할을 도입하고, 단위분수만으로 분수를 도입한 후(2학년), 양분수, 배분수 개념을 고려하면서 진분수 개념을 도입하고 있다(3학년). 다소간 제한된 분수의 의미를 다양한 활동에 의하여 익힌 후 분수를 정의하는 남한과 다르게, 북한은 분수가 가지고 있는 다양한 의미를 먼저 다루어본 후 정의를 도입하는 방법을 택하고 있다. 또한 남한과는 달리 여러 학년, 곧 인민학교 2, 3, 4학년, 고등중학교 1학년 교과서에서 분할분수의 뜻을 반복해서 설명하는 방식을 취하고 있다.

III. 동치분수의 도입 방식 비교

우정호와 유현주(1995: 134)는 다음 [그림 III-1]과 같이 유리수의 학습 수준을 제시하였다.

제 4수준 : 공리적 이해의 수준(유리수 체)

습

제 3수준 : 형식적인 유리수(비 동치 관계)

습

제 2수준 : 상대적인 비 관계와 비례성 탐구(몫, 비, 연산자)

습

제 1수준 : 시각적 외관에 의해 등분할, 덧셈적인 동치의 심상

[그림 III-1] 유리수 학습 수준

위의 [그림 III-1]은 동치 관계가 유리수 개념의 중요한 한 본질임을 시사한다. 동치분수는 같은 양을 서로 다르게 나타낸 것으로, 외적으로는 서로 다른 상황이지만 비로 표현되는 구조 또는 관계는 불변이라는 것을 표현하는 유리수의 본질에 해당하는 개념이다(우정호·유현주, 1995: 132). 이하에서는 남북한 교과서에서 동치분수를 어떤 방식으로 도입하는지 비교·분석하고자 한다.

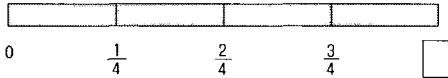
첫째, 남북한 교과서는 공통적으로 1과 크기가 같은 분수를 출발점으로 하여 동치 분수를 도입하지만, 1과 동치인 분수를 도입하는 세부적인 방식에서는 차이를 보인다. 1과 크기가 같은 분수를 다루기 이전에 남한의 4나 단계 교과서에서는 두 양의 크기를 비교하여 분수로 나타내어 보는 활동을 ‘파란 색연필 6자루와 빨간 색연필 2자루’를 소재로 하여 다룬다. 이때 6은 2의 3배, 2는 6의 $\frac{1}{3}$ 이라는 것을 확인하게 되고, 연속량의 경우에도 두 양을 이와 같은 방식으로 비교하여 자연수 또는 분수로 표현하는 방법을 익히게 된다.

이어서 “3m짜리 색 테이프를 네 사람이 똑같이 나누어 가지려고 한다. 한 사람이 가지는 색 테이프의 길이를 알아보아라.”라고 하는 문제 상황에서 $3 \div 4$ 와 같은 자연수 사이의 나눗셈을 분수로 표현하는 방법을 다룬다. 1과 동치인 분수는 이러한 내용과 연결되어 도입되지는 않는다.

이를테면, ‘파란 색연필 3자루와 빨간 색연필 3자루’, 곧 3은 3의 1배라는 것 또는 $3 \div 3$ 을 의미하는 문제 상황을 이용하여 1과 동치인 분수를 도입하지 않는다. 이러한 문제 상황이 앞에서 다룬 상황에 비하여 결코 어렵거나 복잡하지 않음에도 불구하고 도입하지 않는 이유는 무엇일까? 다음과 같이 수막대를 이용하여 1과

동치인 분수를 도입하는 방식을 살펴보면 그 이유를 추측할 수 있다(교육인적자원부, 2001d: 2-5).

[활동 1] 1을 분모가 4인 분수로 나타내어라.



- 수막대 한 개를 똑같이 4로 나눈 것 중의 하나는 얼마인가?
- 수막대 아래의 □ 안에 알맞은 분수는 무엇이라고 생각하는가?
- 분모가 4이고 1과 크기가 같은 분수는 무엇이라고 생각하는가?

[그림 III-2] 남한 교과서의 1과 동치인 분수 도입

위와 같은 그림이 제시되었을 때, 그림과 함께 제시된 정보인 $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ 을 토대로 수막대의 끝부분에 오는 분수는 $\frac{4}{4}$ 임을 쉽게 알 수 있다. [그림 III-2]에 이어 제시된 익히기 문제에서도 수막대의 끝부분에 $\frac{3}{3}$ 과 $\frac{5}{5}$ 가 와야 한다는 것을 같은 방법으로 알아낼 수 있다. 여기까지 해결하면 수막대의 끝부분에 오는 분수의 분모와 분자는 같음을 쉽게 발견할 수 있고, 그것을 1과 크기가 같은 분수의 핵심적인 특징으로 정돈하는 것이 가능하다. 최종적으로는 1과 동치인 분수를 찾는 매우 쉽고 편리한 방법, 곧 분모와 분자가 같은 분수를 찾는 것으로 학습이 마무리될 수 있다. 만약 ‘3은 3의 1배 또는 $3 \div 3$ ’을 내포하는 문제 상황을 도입하였다면 이와 같은 간결하고 명쾌한 흐름을 따르기 어려웠을 것이다. 또한 이보다 더 중요한 측면은 ‘1배 또는 1’이 분수 표현이 아니라는 점이다. 두 양을 비교하는 상황에서 ‘1배’는 비

교의 의미를 퇴색시키며, 몫을 구하는 상황에서의 1도 몫의 의미를 따질 필요를 없앤다. 결국 남한 교과서는 이러한 이유에서 다른 내용과 달리 상황 없이 1과 동치인 분수를 도입하는 것으로 보인다. 이러한 접근 방식은 ‘왜 1을 분모가 4인 분수 또는 분모가 다른 여러 분수로 나타내어야 하는가?’라는 근본적인 의문을 학습자에게 남길 수 있다.

북한 교과서에서는 [그림 III-3]과 같이 1과 동치인 분수를 도입한다(남호석·박희순, 2002: 160).

다음 분수들을 그림으로 나타내시오. 무엇을 알 수 있습니까?

$\frac{2}{2} m, \frac{3}{3} l, \frac{4}{4} kg, \frac{5}{5} m^2$

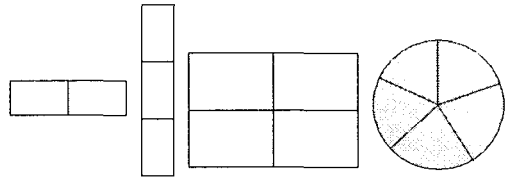
[그림 III-3] 북한 교과서에서 1과 동치인 분수 도입

남한 교과서와의 차이점을 다음과 같이 확인할 수 있다.

첫째, 그림을 먼저 제시하고 적절한 분수를 찾도록 하는 남한 교과서와 달리, 북한 교과서는 ‘1과 크기가 같은’ 여러 분수를 먼저 제시한 후 그림으로 표현하게 한다. 그러므로 그림은 동치 관계임을 파악하게 하는 중요한 도구로 활용되고 있다. 둘째, 동일한 양의 전체를 등분할하는 여러 방법에 주목함으로써 양적인 동치 관계를 다루는 남한 교과서와 달리, 북한 교과서는 상황의 다양성, 곧 길이를 재는 상황, 부피를 구하는 상황 등을 고려함으로써 구조적 동치 관계의 의미를 다룬다. 셋째, ‘1과 크기가 같으면서 분모가 다른 분수’를 왜 구하는지 다루기 어려운 남한 교과서와 달리, 북한 교과서는 이미 다양한 측정 상황이 존재하고 그것을 표현하는 여러 분수가 존재하며, 동치 관계라

는 새로운 관점에서 그 여러 분수 사이의 관계를 조망하기 때문에 이러한 문제에 부딪히지 않는다.

그러나 다양한 분수를 그림으로 표현하는 과정에서 본질을 찾지 못하고 잘못된 방향으로 추론할 수도 있다.



$$\frac{2}{2} m \quad \frac{3}{3} l \quad \frac{4}{4} kg \quad \frac{5}{5} m^2$$

[그림 III-4] 북한 교과서 문제 해결 과정 일부

이러하면, 위의 문제를 해결하면서 다음 [그림 III-4]와 같이 표현한 후 의미하는 바를 찾지 못하는 학생이 얼마든지 생길 수 있다. 곧, ‘전체(모두)를 나타낸다’라는 표현과 ‘1’을 관련짓지 못하는 학생이 있을 수 있다. 남북한 교과서의 접근 방식 중 어느 것이 ‘1과 크기가 같은 분수’를 이해하는 데 도움이 될 것인지는 실증적인 자료를 토대로 확인할 필요가 있을 것이다.

한편, 남한 교과서에서는 덧셈적인 동치 관계를 다루지 않고 있으나 인민학교 4학년 교과서에서는 다음 문제를 통하여 간접적으로 덧셈적인 동치 관계를 확인하게 하고 있다(남호석·박희순, 2002: 161-162). 아직 덧셈 연산을 도입하기 전이기 때문에, 여러 분수를 통분하여 동치분수로 나타낸 후 합하는 것이 아니라 주어진 여러 종류의 양을 합하여 일정한 크기를 표현하게 될 것이다. 이 과정에서 덧셈적인 동치 관계가 간접적으로 경험될 수 있을 것으로 생각된다.

다음 그림에서 아래의 분수들을 나타내는 토막들을 찾으시오. 그 토막들을 차례로 이르면 학교까지 갈 수 있겠는가 알아보시오.

1) $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$

2) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{4}$

[그림 III-5] 북한 교과서에서 덧셈적인 동치 관계를 도입하는 문제 상황

둘째, 양적인 동치 관계를 도입하고 다루는 방식에 있어서 남북한 교과서가 차이를 보인다. 남한의 5-나 단계 교과서에서는 “예지는 피자 한 판의 $\frac{2}{8}$ 를 먹고, 정섭이는 $\frac{1}{4}$ 을 먹었다. 누가 더 많이 먹었는지 알아보아라.”와 같이 실생활 상황을 이용하여 양적인 동치 관계를 도입한다. 이어서 [그림 III-6]과 같이 그림으로 동치 관계를 확인하도록 한다(교육인적자원부, 2002a: 34-36).

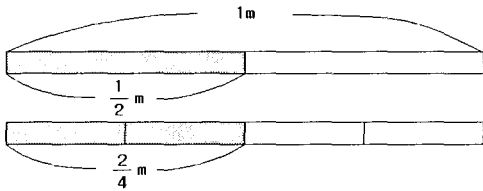
[활동 1] $\frac{2}{8}$ 와 $\frac{1}{4}$ 의 크기를 비교하여 보아라.

- 그림에 각각 분수만큼 색칠하여라.

[그림 III-6] 남한 교과서의 양적인 동치관계 도입

여기서 양적인 동치 관계를 도입하기 위하여 설정한 생활 상황이 동치분수의 필요성을 부각시킬 수 있는지, 적절한지에 대하여 생각해 볼 필요가 있다. 이 문제 상황에서는 ‘왜 두 아이가 각각 먹은 피자를 $\frac{2}{8}$ 와 $\frac{1}{4}$ 이라는 서로 다른 표현으로 나타냈는지, 곧 왜 서로 다른 방식으로 피자를 분할하였는지’에 대한 설명을 찾을 수 없다. 동치분수가 왜 그리고 어떤 맥락에서 사용되는가에 관하여 학생들이 느끼기에는 상황의 인위성이 너무 큰 것으로 보인다. 또한 기계적으로 생산하는 과자가 아니라 손으로 만드는 피자 두 개가 서로 같은 크기라고 생각하는 것도 인위적인 가정이다. 만약 ‘서로 다른 양(동일하지 않은 전체)’의 피자를 각각 다른 방식으로 분할하여 먹은 것이라면 예지와 정섭이 중 큰 피자를 먹은 사람이 더 많이 먹었다고 보아야 할 것이다. [생활에서 알아보기]가 현행 교과서에서 택하고 있는 기본적인 내용 구성 방식이지만 현재와 같이 필요성을 부각시키지도 못하고 혼동을 일으키는 원인이 된다면 반드시 유지할 필요는 없을 것이다.

북한 교과서에서는 다음 그림과 함께 ‘ $\frac{1}{2}m$ 와 $\frac{2}{4}m$ 의 길이를 비교하시오.’라는 문제를 통하여 양적인 동치 관계를 다룬다(남호석·박희순, 2002: 169).



[그림 III-7] 북한 교과서의 양적인 동치 관계

실생활 상황에서 양적인 동치 관계를 도입하는 남한의 교과서와 달리 북한 교과서는 측정이라는 보다 수학적인 상황에서 양적인 동치 관계를 도입한다. 이 문제 상황은 동치 분수의 필요성을 부각시키지는 못하지만 측정 단위를 다르게 하면 같은 양이 서로 다른 분수로 표현되는 현상, 곧 동치분수가 존재하게 되는 맥락은 분명하게 다룰 수 있다. 여기서도 동일한 양을 왜 다른 단위로 측정하게 되었는가를 물을 수는 있지만, 남한 교과서의 문제 상황보다는 측정이라는 보다 수학적인 접근을 소재로 하고 있기 때문에 단위의 다양성이 좀더 자연스럽게 연결될 수 있다.

또한 동일한 양을 전체로 하여 분할하였다는 것이 의문의 여지없이 제시되어 혼동을 일으킬 염려도 없는 것으로 보인다. 물론 북한 교과서는 학생들이 생활 속에서 자연스럽게 접근하는 상황을 소재로 하지 않기 때문에 동치분수의 배경을 풍부하게 제공하는 것으로는 보기 어렵다. 남북한 교과서에서 택하고 있는 서로 다른 접근 방식이 학습에 어떤 영향을 미치는가에 관한 실증적인 연구의 필요성이 여기서도 제기된다.

셋째, 남북한 교과서는 동치분수를 만드는 방법의 설명에 있어 차이를 보인다. 남북한 교과서 모두 동치분수가 존재한다는 것을 1과 동치인 분수를 예로 도입하였음을 확인한 바 있다. 또한 양적인 동치 관계에 주목함으로써 ‘동치’의 보다 세부적인 의미를 탐구하도록 하고 있는 것도 확인하였다. 이제 동치분수를 만드는 방법에 관하여 남북한 교과서에서 어떻게 설명하고 있는가를 비교하고자 한다. 남한 교과서에서는 “ $\frac{2}{8}$ 와 $\frac{1}{4}$ 은 크기가 같은가?, $\frac{1}{4}$ 의 분모와 분자에 2를 곱하여 보아라. $\frac{2}{8}$ 의 분모와 분자를 2로 나누어 보아라. 크기가 같은 분수를 만들려면 어떻게 하여야 한다고 생각하는가?”라는 질문을 통하여 다소간 직접적으로 동치분수의 주요 특징을 확인하고 있다(교육인적자원부, 2002a: 36).

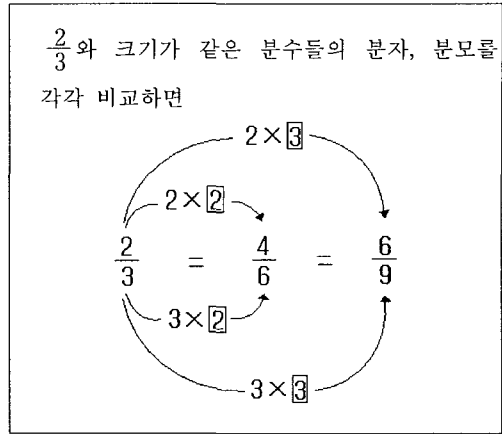
동치분수 개념이 초점이라면 두 분수의 크기가 같다는 것 자체가 매우 주목할 만한 특성이고 이를 학생들이 찾아내도록 해야 할 것이다. 그러나 남한 교과서는 ‘ $\frac{2}{8}$ 와 $\frac{1}{4}$ 은 크기가 같은가?’라고 하는 질문을 통하여 이미 크기가 같은 두 분수를 탐구하는 것이 주요 학습 내용이라는 것을 분명하게 밝히고 있다. 또한 그림에서 확인한 동치 관계를 대수적인 조작과 관련짓는 과정 역시 ‘ $\frac{1}{4}$ 의 분모와 분자에 2를 곱하여 보아라. $\frac{2}{8}$ 의 분모와 분자를 2로 나누어 보아라.’와 같은 매우 직접적인 단서를 통하여 이끌고 있다. 동치분수의 본질은 분모와 분자가 공변한다는 것이고, 2를 곱하고 2로 나누는 것은 바로 이 공변을 가능하게 하는 매우 중요한 조작이다. 남한 교과서는 학생들이 이것을 찾기 어려울 것으로 가정하고 대부분의 아이디어를 제시하고 있으며, 다만 ‘분모와 분

셋째, 남북한 교과서는 동치분수를 만드는 방법의 설명에 있어 차이를 보인다. 남북한 교과서 모두 동치분수가 존재한다는 것을 1과 동치인 분수를 예로 도입하였음을 확인한 바 있다. 또한 양적인 동치 관계에 주목함으로써 ‘동치’의 보다 세부적인 의미를 탐구하도록 하고 있는 것도 확인하였다. 이제 동치분수를 만드는 방법에 관하여 남북한 교과서에서 어떻게 설명하고 있는가를 비교하고자 한다. 남한 교과서에서는 “ $\frac{2}{8}$ 와 $\frac{1}{4}$ 은 크기가 같은가?, $\frac{1}{4}$ 의 분모와 분자에 2를 곱하여 보아라. $\frac{2}{8}$ 의 분모와 분자를 2로 나누어 보아라.’와 같은 매우 직접적인 단서를 통하여 이끌고 있다. 동치분수의 본질은 분모와 분자가 공변한다는 것이고, 2를 곱하고 2로 나누는 것은 바로 이 공변을 가능하게 하는 매우 중요한 조작이다. 남한 교과서는 학생들이 이것을 찾기 어려울 것으로 가정하고 대부분의 아이디어를 제시하고 있으며, 다만 ‘분모와 분

자에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나누어 동치분수를 만드는 방법'으로 일반화하는 것만 학생들에게 말기는 방식을 따르고 있다. 결국 남한 교과서는 동치 관계 개념보다는 동치분수를 만드는 방법을 주요 학습 요소로 설정하고 있는 것으로 보인다.

북한 교과서에서는 “ $\frac{1}{2}m$ 와 $\frac{2}{4}m$ 의 길이를 비교하시오.”라는 문제를 통하여 동치 관계를 도입하며, 이 때 ‘크기가 같은 분수’는 ‘길이가 같다’는 현상을 토대로 다루어진다. 길이의 비교는 측정 상황을 연상시키므로 길이가 같을 수 있다는 사실은 매우 자연스럽게 연결될 수 있다. 이제 양 사이의 관계에서 한 발 나아가 서로 다른 표현 방식을 따르는 두 분수가 ‘크기가 같다’는 성질을 지닌다는 것으로 사고를 발전시킬 수 있다. 이어서 북한 교과서는 “ $\frac{1}{2}$ 과 $\frac{2}{4}$ 는 같은 크기를 나타냅니다. 이 때 $\frac{1}{2}$ 과 $\frac{2}{4}$ 를 크기가 같은 분수라고 말하고 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ 로 씁니다.”와 같은 설명을 제시한다. 이는 분수의 동치 관계가 어떤 의미이며, 어떤 방식으로 표현하는가를 다루는 내용으로 볼 수 있으며, 결국 북한 교과서는 남한 교과서와 다르게 동치 관계 개념 자체를 주요 학습 요소로 다루고 있음을 알 수 있다.

북한 교과서는 앞에서 확인한 바와 같은 방식으로 두 분수 사이의 동치 관계를 도입한 후 같은 방식으로 세 분수 사이의 동치 관계를 도입한다. 또한 $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ 과 같이 표현할 수 있음을 확인한다. 이제 동치 관계를 이루는 분수 사이의 관계를 대수적으로 파악하고 동치분수를 만드는 방법을 알아보기 위하여 다음 [그림 III-8]을 제시한다(남호석·박희순, 2002: 169-170).



[그림 III-8] 북한 교과서의 동치 분수 알고리즘 도입

[그림 III-8]은 “분모와 분자에 2를 곱하여 보아라.”라는 남한 교과서의 설명과 같은 역할을 하지만, 좀더 ‘분모와 분자의 공변성’을 확장적 이면서도 분명한 방식으로 조명하고 학습자에게 일반화하는 기회를 제공하는 것으로 보인다. 그러나 크기가 같은 분수를 만들려면 어떻게 해야 하는가를 묻는 남한 교과서와 달리 북한 교과서에서는 위의 그림 아래 “0이 아닌 같은 수를 분모와 분자에 곱하여도 크기는 변하지 않는다.”는 설명을 제시한다. 학생들의 적극적인 활동에 의하여 수학적 아이디어를 발견하게 하려는 남한 교과서의 의도와 잘 조직된 설명을 제시함으로써 수학적 아이디어를 이해하고 연습하게 하려는 북한 교과서의 의도가 이러한 접근 방식의 차이를 가져온 것으로 보인다. 이러한 차이점이 실제로 학습자가 동치분수를 이해하는 데 어떤 영향을 미치며, 어떤 문제점을 일으키는지, 특히 북한 교과서에 비하여 상대적으로 인위적인 생활 상황과 활동적 접근에 의존하는 남한 교과서의 접근 방식이 동치분수에 대한 학습에 미치는 영향은 어떤 것인지 연구할 필요가 있다. 이러한 연구는 통합 교육과정 개발이 아니더라도 남한 교과서의

동치분수 도입 부분을 부분적으로 수정하거나 보완함에 있어 유용한 참고자료가 될 수 있다.

IV. 결 어

이 연구는 남북한 초등학교 교과서에서 분수를 도입하는 과정을 분할분수와 동치분수로 나누어 비교하여 차이점을 파악하고 그에 관해 반성적으로 논의를 전개한 것이다. 그러한 논의의 결과를 요약하면 다음과 같다. 분할분수의 도입에 있어, 첫째, 남한 교과서는 사과와 같은 구체물을 등분할하는 활동의 소재로 사용하고 있으나, 북한 교과서에는 그와 같은 구체물을 실제로 등분할하는 활동은 제시되어 있지 않다. '사과'와 같은 구체물을 소재로 한 등분할 활동은 실생활과 수학의 연결을 도모하려는 의도를 지니고 있는 것으로 보이나, 정확한 등분할이 사실상 불가능하다는 점 등에서 부적절한 점이 있다. 둘째, 남한의 교과서는 연속량의 등분할과 이산량의 등분할을 시간 간격을 두고 다루는데 비해, 북한 교과서는 분수 도입 시점에서 같이 다룬다. 남한의 교과서에는 부분과 전체와의 관계라는 분수 개념을 연속량에서 이산량으로 시간을 두고 옮겨 가며 강화시키려는 의도와 연속량의 등분할에 비해 이산량의 등분할이 아동들에게 어려울 것이라는 가정이 들어 있는 것으로 보인다. 한편, 북한 교과서가 자연수의 나눗셈의 맥락에서 분수를 도입한 것은 이산량의 분할을 나눗셈 도입 초기부터 사용하는 것을 가능하게 해주는 교수학적 장치로 보인다. 연속량의 등분할과 이산량의 등분할의 사용과 관련된 남북한 교과서의 차이는 분수 개념 도입을 자연수의 나눗셈과 연계하는 방안의 타당성, 연속량의 분할 상황과 이산량의 분할 상황의 심리적 어려움에 대한 연구의 필요

성을 제기한다. 셋째, 남한에서 분수 개념이 처음 도입되는 시기에 측정 단위가 붙은 양분수가 거의 사용되지 않는데 비해, 북한에서는 상대적으로 많이 사용된다. 남한은 부분-전체의 상대적 관계를 나타내는 분수 개념을 강조하는 것으로 보이는 데 비해, 북한은 상대적으로 측정량으로서의 분수를 비중 있게 다루고 있다. 이러한 차이점은 남한의 7차 수학과 교육과정에 따른 수학 교과서에서 부분-전체로서의 분수 개념 이외의 분수 개념의 측면들을 적절하고 충분히 다루고 있는지에 대한 분석 연구가 필요함을 시사한다. 넷째, 남한과 북한 교과서는 모두 지시하여 정의하는 외연적 방법에 따라 분수를 도입하지만, 다소간 제한된 분수의 의미를 다양한 활동에 의하여 익힌 후 분수를 정의하는 남한과 달리, 북한은 분수가 가지고 있는 다양한 의미를 먼저 다루어본 후 정의를 도입하는 방법을 택하고 있다. 또 남한과 달리 북한은 여러 학년, 곧 인민학교 2, 3, 4학년, 고등중학교 1학년 교과서에서 분수의 뜻을 반복해서 설명하고 있다.

남북한 교과서에서 동치분수를 도입하는 방식을 비교한 결과 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있었다. 첫째, 남북한 교과서에서는 공통적으로 1과 크기가 같은 분수를 출발점으로 하여 동치분수를 도입한다. 이때 남한 교과서에서는 수막대의 끝부분에 주목하도록 하여 1과 크기가 같은 분수를 쉽고 간결하게 도입하지만 1과 크기가 같으면서 분모가 다른 분수를 왜 구하는가에 관해서는 설명하지 않는다. 이에 비하여 북한 교과서는 상황의 다양성, 곧 길이를 재는 상황, 부피를 구하는 상황 등으로 고려함으로써 구조적 동치 관계의 의미를 다룬다. 한편, 북한 교과서와 같은 방식으로 접근할 때에는 그림 표현이 제공하는 산만한 정보 때문에 1과 동치라는 특정한 관계에 주목하지 못하게

할 수도 있다는 문제점도 발견된다. 두 관점을 적절히 통합한다면 좋은 방향을 모색할 수 있을 것으로 보인다. 둘째, 남한 교과서에서는 생활 상황의 예를 이용하여 내용을 전개하는 반면, 북한 교과서에서는 양적으로 동치인 분수를 그림과 함께 제시하고 ‘크기가 같은 분수’라는 용어와 수학적 표현 방법을 형식적으로 도입한다. 남한 교과서에서 사용하고 있는 생활 상황의 예는 동치분수를 도입하기 위하여 반드시 필요하다고는 보기 어려우며, 수학적으로 불명확한 정보를 담고 있어서 학습자에게 혼동을 일으킬 수도 있다. 이것을 보완할 수 있는 한 방법을 북한 교과서에서의 동치분수 접근 방법에서 찾을 수 있을 것으로 보인다. 셋째, 남한 교과서에서는 동치분수를 구하는 직접적인 방법을 제공하는 반면, 북한 교과서에서는 분모와 분자의 변화를 비교하도록 하여 동치분수의 특성과 동치 분수를 구하는 방법에 대한 탐구를 자극한다. 동치인 분수에서 분모와 분자가 공변한다는 것은 매우 의미 있고 중요한 학습 요소이므로, 현재 우리나라 교과서와 같이 직접적인 단서를 제시하는 것보다는 북한 교과서의 접근 방식을 신중하게 참고할 필요가 있다. 이에 관해서는 후속 연구가 시급히 필요하다고 볼 수 있다. 동치분수는 이미 도입된 여러 분수에 대한 분석을 통하여 얻을 수 있는 이차적인 개념이며, 유리수의 본질에 한 발 더 가까이 가도록 이끄는 난해한 개념이다. 본 연구에서 분석한 바에 따르면, 동치분수 개념은 현재 우리나라의 초등학교 교과서 구성 방식인 생활 상황의 활용, 활동적 접근 등과 부합되지 않을 가능성이 높다. 이러한 점에서 남한과는 매우 다른 교과서 구성 방식을 따르는 북한 교과서는 위에서 제시한 매우 중요한 시사점을 주는 것으로 파악된다.

이 연구에서 분수의 도입에 주목하여 남북한

교과서를 비교한 결과, 외관상의 차이에 못지 않게 세부적인 측면에서 매우 큰 차이가 있음을 알 수 있었다. 통일이 이루어진다면 그러한 세부적인 차이를 의미 있게 드러내고 조정하여 통합적 관점을 모색해야 할 것이다. 분수의 연산, 분수와 소수의 관계 등에 대해서도 유사한 분석이 이루어지면 분수 관련 내용 요소의 추출과 전개 방식에 관한 통합적 관점 도출이 가능할 것이다.

참고문헌

- 강완, 백석윤(1998). **초등수학교육론**. 서울: 동명사.
- 강지형 외(1999). **초등수학교육**. 서울: 동명사.
- 교육인적자원부(2001a). **수학 3-가**. 서울: 대한교과서주식회사.
- 교육인적자원부(2001b). **수학 3-나**. 서울: 대한교과서주식회사.
- 교육인적자원부(2001c). **수학 4-가**. 서울: 대한교과서주식회사.
- 교육인적자원부(2001d). **수학 4-나**. 서울: 대한교과서주식회사.
- 교육인적자원부(2001e). **교사용지도서 수학 3-가**. 서울: 대한교과서주식회사.
- 교육인적자원부(2001f). **교사용지도서 수학 4-나**. 서울: 대한교과서주식회사.
- 교육인적자원부(2002a). **수학 5-가**. 서울: 대한교과서주식회사.
- 교육인적자원부(2002b). **수학 6-가**. 서울: 대한교과서주식회사.
- 교육인적자원부(2002c). **수학 6-나**. 서울: 대한교과서주식회사.
- 김영건(2001). **수학(인민학교 1)**. 교육도서출판사.
- 김영건, 고재의(2001). **수학(인민학교 2)**. 교육

- 도서출판사.
- 남호석, 박희순(2002). **수학(인민학교 4)**. 교육도서출판사.
- 남호석, 김봉래, 김경훈(2002). **수학(고등중학교 1)**. 교육도서출판사.
- 남호석, 김희일(2001). **수학(인민학교 3)**. 교육도서출판사.
- 류해동, 오준철, 김희일, 채일룡, 김경훈(2002). **수학(고등중학교 2)**. 교육도서출판사.
- 박문환(2002a). 피타고라스 정리의 지도에 대한 남북한 비교. **학교수학**, 4(2), 223-235.
- 박문환(2002b). 교과서에 나타난 '수학적 귀납법'에 대한 남북한 비교. **수학교육학연구**, 12(2), 181-191.
- 우정호, 유현주(1995). 유리수 개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구. **수학교육학연구**, 5(2), 129-141.
- 우정호, 조영미(2001). 학교수학 교과서에 사용하는 정의에 관한 연구. **수학교육학연구**, 11(2), 363-384.
- 이용률(2001). **지도내용의 핵심과제 99**. 서울: 경문사.
- 임재훈, 이경화, 박경미(2003). 남북한 수학 교과서 영역별 분석 및 표준 수학 교육과정안 개발 연구(II): 북한 초등학교 수학 교과서의 구성과 전개 방법 비교. **학교수학**, 5(1), 43-58.
- 人民教育出版社小學數學室(2003). **9년의무교육 6년제소학교교과서 수학 제7권**. (엄금식, 역). 연변교육출판사. (원작은 2001년 출판).
- 片桐重男(1995). **數學的な考え方を育てる数の指導**. 東京: 明治圖書.
- 杉山古茂 外(2004). **新しい算數4下**. 東京: 東京書籍.
- 細川藤次 外(2004). **算數4年下**. 大阪: 啓林館.
- Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Dienes, Z. P. (1964). *Building up mathematics* (Rev. ed.). London: Hutchinson Educational, Ltd.

A Comparative Study of the Way of Introducing Fractions in Mathematics Textbooks of South and North Korea

Park, Kyo Sik (Gyeong-In National University of Education)

Lee, Kyung Hwa (Korea National University of Education)

Yim, Jae Hoon (Gyeong-In National University of Education)

This study intends to compare the way of introducing fractions in elementary mathematics textbooks of south and those of north Korea. After thorough investigations of textbooks from south and north Korea focused on the ways of introducing partition approach and equivalence relation as operational schemes of fractions, the following

seven differences were identified.

First, the mathematics textbooks of south Korea use concrete materials like apples when they introduce equal partition context, while those of north Korea do not use that kind of concrete materials. Second, in the textbooks of south Korea, equal partition of discrete quantities are considered after continuous ones are introduced. This is different from the approach of the north Korean textbooks in which both quantities are regarded at the same time. Third, the quantitative fraction which refers to the rational number with unit of measure at the end of it, is hardly used in the textbooks of south.

However, the textbooks of north Korea use it as the main representations of fractions. Fourth, in the textbooks of south Korea, various activities related to fractions are more emphasized, while in the textbooks of north Korea, various meanings of fractions

play an important role before defining fraction. Fifth, the textbooks of south Korea introduce equivalent fractions with number one using number bar, and do not consider the reason why that sort of fractions are regarded. On the contrary, the textbooks of north Korea introduce structural equivalence relation by using various contexts including length measure and volume measure situations. Sixth, whereas real-life contexts are provided for introducing equivalent fractions in the textbooks of south Korea, visual explanations and mathematical representations play an important role in the textbooks of north Korea. Seventh, the means of finding equivalent fractions are provided directly in the textbooks of south Korea, whereas the nature of equivalent fractions and the methods of making equivalent fractions are considered in the textbooks of north Korea.

* **Keyword:** equal partition(등분할), equivalent fraction(동치 분수), the mathematics textbooks of south Korea(남한 수학 교과서), the mathematics textbooks of north Korea(북한 수학 교과서), introducing fractions(분수 도입).

논문접수 : 2004. 9. 25

심사완료 : 2004. 10. 12