大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 14 卷 第 4 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIV, No.4, 435-447 Nov 2004

'삼각형의 결정조건'에 대한 논의의 분석

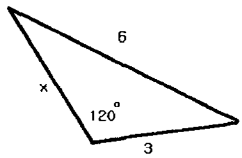
박 선 용* · 권 석 일**

삼각형의 결정조건은 평면 논증기하와 삼각법의 학습에서 중요한 역할을 하고 있다. 그런데, 삼각형의 결정조건에 대하여, 삼각형이 결정되기 위한 필요충분조건이 아니라는 등의 논란이 있어왔다. 본고에서는 '삼각형의 결정조건'의 해석에 있어서의 견해 차이를 가져오는 원인을 삼각형의 결정조건에 대한 명제를 하나로 볼 것인가, 세 개의 명제가 합쳐진 것으로 볼 것인가의 문제, '임의성'을 어디까지 미치는 것으로 볼 것인가의 문제, 삼각형의 결정조건의 역할을 무엇으로 볼 것인가의 문제로 나누어 분석하고, '삼각형의 결정조건'이 최소필수성과 일반화 가능성이라는 측면에서 합리적인 방식으로 진술되어있음을 밝혔다. 마지막으로, 삼각형의 결정조건을 탐색적으로 가르칠 수 있는 교육방안을 제시하였다.

Ⅰ. 서 론

삼각형의 결정조건은 중학교 기하 단원에서 삼각형의 합동조건을 도입하고 이해하는데 쓰이고 있으며, 고등학교 삼각법 단원에서, 삼각형의 6요소 중 일부를 알고 있으면 결정되는 삼각형이 있을 때 그 삼각형의 나머지 요소를 알아보는 활동에서 재등장한다. 삼각형의 결정조건은 이처럼 평면 논증기하와 삼각법의 학습에서 중요한 역할을 하고 있다[1]. 그런데, 삼각형의 결정조건에 대하여, 삼각형이 결정되기위한 필요충분조건이 아니라는 등의 논란이 있어왔다.

다음의 경우를 분석하여 보자([그림 Ⅰ-1]).



[그림 Ⅰ-1]

위의 삼각형에서 변의 길이가 주어지지 않은 변의 길이를 x 라고 놓으면 제이코사인법칙에 의해서 다음과 같은 방정식이 얻어진다.

$$6^2 = x^2 + 3^2 - 2x3\left(-\frac{1}{2}\right)$$

* 서울대학교 대학원, polya@snu.ac.kr
** 서울대학교 대학원, steinein@dreamwiz.com

1) 삼각형의 6요소인 3변의 길이 및 3각의 크기 가운데서 '3변의 길이', '1변의 길이와 2각의 크기', '2변의 길이와 그 끼인각의 크기' 중 어느 것이 정해지면 그 삼각형이 결정된다. 이것을 이용하여 위의 3요소로부터 삼각형을 실제로 결정하는 실리적 목적에서 삼각법이 탄생되었다. 삼각형의 닮음의 성질을 이용하여 피라미드의 높이를 측정했다고 한다. 역사적으로는 측량에의 응용을 목적으로 하는 것으로서 발달하였고, 일상생활에도 널리 이용되었다. 평면삼각법 외에 구면삼각법이 있는데 이는 천문학·지구물리학·측지학·항해술 등에 널리 활용되고 있다(Cajori, 1917: 43-47).

이때 길이 x는 양수이므로 삼각형의 나머지 한 변의 길이는 $\frac{-3+\sqrt{117}}{2}$가 되어 주어진 삼각형은 하나로 결정된다.

그런데, 위의 경우는 두 변의 길이와 끼어있지 않은 각이 주어진 경우, 좀 더 정확하게는 두 변과 그 끼인각이 아닌 각 중에서 짧은 변 쪽의 각이 주어진 경우로서, 아래와 같은 삼각형의 세 가지 결정조건 중 어디에도 해당되지 않는 것으로 보이지만, 삼각형이 유일하게 결정되는 경우이다.

> 다음 세 가지 경우에 삼각형은 모양과 크기가 하나로 결정된다. 이것을 삼각형의 결정조건이라고 한다.
> 1. 세 변의 길이가 주어질 때,
> 2. 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때
> 3. 한 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 주어질 때
>
> (고성은 외, 2001: 66)

바로 여기에서 문제의식이 발생한다. 두 변과 한 각이 주어진 상태에서 약간의 조건을 덧붙이면, 삼각형의 결정조건에 '직접적으로' 해당되지 않음에도 불구하고 삼각형이 하나로 결정되는 경우가 발생하며, 이에 따라 현 교과서의 삼각형의 결정조건은 삼각형이 결정되기 위한 모든 조건을 아우르는 '필요충분조건'이 될 수 없다는 주장에 이르게 되는 것이다. 이에 대하여 최노성(2002: 143)은 다음과 같이 말하고 있다.

> 삼각형의 결정조건이란 삼각형을 하나로 결정하기 위해 필요한 최소의 조건을 말한다. 즉, 삼각형의 결정조건은 삼각형을 하나로 결정하기 위한 충분조건인 것이다. 문제는 이것을 필요충분조건으로 받아들이고 있기 때문에 발생한 오류이다. 다시 말하면 삼각형의 결정조건을 만족하면 반드시 삼각형은 하나로 결정되지만 필요충분조건이 아닌 충분조건이므로 삼각형의 결정조건을 만족하지 않는다고 하여 삼각형이 하나로 결정되지 않는 것은 아니다. 위의 문제[2)]가 그 예라 할 수 있다.

연구자가 현직 교사를 대상으로 실시한 설문조사에서도 이러한 견해를 재확인할 수 있었다. 서울대학교에서 이루어진 수학과 교과교육 전문과정 연수(2003. 12. 29 - 2004. 1. 9)에 참가한 교사 100명 중 지원자 53명을 대상으로 2003년 12월 29일과 2004년 1월 9일 두 번에 걸쳐 실시한 설문조사[3)](부록)에서 전체 교사 중 60.4%(32명)의 교사가 위의 인용문과 거의 정확하게 일치하는 견해를 드러냈으며, 도합 69.8%(37명)의 교사가 [그림 Ⅰ-1]이 나타내고 있는 경우가 '삼각형의 결정조건이 삼각형이 하나로 결정되기 위한 충분조건이지만 필요조건이라고 할 수 없다는 것'을 보여준다고 응답하였다.

그러나, 위의 제시된 예에 대하여 상반된 해석도 가능하다. 앞에서 살펴본 바와 같이 미지의 변 x의 길이를 구할 수 있기 때문에, 사실상 세 변의 길이가 주어진 경우로 볼 수 있으므로 반례가 될 수 없다는 견해와, 주어진 예는 '두 변과 (그 끼인각이 아닌) 한 각'이 주어진 모든 경우를 대표할 수 없기 때문에 일반적인 경우에 대한 명제인 삼각형의 결정조건에 대한 반례로는 부적합하다는 견해가 그것이다.

실제로 설문조사에 응답한 교사 중 11.3%(6

2) [그림 Ⅰ-1]과 같은 경우
3) 첫째 날과 마지막 날 모두 동일한 설문지를 사용하여, 충분한 시간 동안 이 문제에 대하여 고민한 후 2차 검사에 응하도록 하였다. 본 고에서 사용한 결과는 2차 검사의 결과이다.

명)는 전자에, 7.5%(4명)는 후자의 견해에 각각 해당하는 주장을 폈다. 결과적으로, 열흘 정도의 충분한 기간 동안 고민한 현직 교사들 간에, 공식적인 교육과정에 포함되어 있는 내용에 대하여 의견이 일치되지 못한 것이다. 이는 수학이라는 교과의 특성에 비추어볼 때 심각한 문제를 야기할 가능성을 가지고 있다고 볼 수 있다.

본 고의 목적은 바로 이러한 견해의 차이를 해결할 방안을 모색하고 이러한 논의가 수학교육에 가지는 시사점을 찾고자 하는 데 있다.

이를 위하여 먼저, Ⅱ장의 1절에서는 견해 차이의 원인을 찾고 삼각형의 결정조건에 대한 명제를 분석하여 그 해결 방안을 모색하였으며, 2절에서는 그 명제의 조건을 최소필수성과 일반화라는 관점에서 분석하여, 삼각형의 결정조건이 삼각형이 하나로 결정되기 위한 필요충분조건임을 밝혔다. 마지막으로 Ⅲ장에서는 이상의 논의를 요약하고 삼각형의 대안적 교육방안을 모색하여 보고자 한다.

Ⅱ. 본 론

1. 견해 불일치의 원인 분석과 그 해결 방안 모색

앞에서 우리는 '삼각형의 결정조건'의 해석에 있어서 서로 다른 견해가 있음을 확인하였다. 연구자는 이러한 견해 차이를 가져오는 원인을 좀 더 정확하게 파악하고자 설문조사에 응하였던 교사 중 20명을 선정하여, 자신의 답변의 근거를 제시하도록 하는 면담조사를 실시하였다. 이 조사를 통하여 연구자는 (1) 삼각형의 결정조건에 대한 명제의 수 (2) '임의성'이 미치는 범위 (3) 삼각형의 결정조건의 역할에 대하여 인식의 차이가 존재함을 알 수 있었고, 이로 인하여 삼각형의 결정조건을 삼각형이 결정되기 위한 필요충분조건으로 보는 견해와 그렇지 않은 견해로 나뉘게 됨을 알 수 있었다.

첫째로, 삼각형의 결정조건에 대한 명제의 수를 파악하는 방식에 따라 어떠한 견해 차이가 나타나는지를 살펴보자. 만약 삼각형의 결정조건을 ① '삼각형의 세 변이 주어진 것', ② '삼각형의 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어진 것', ③ '삼각형의 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 주어진 것' 세 가지 모두를 합쳐 놓은 것으로 생각하게 되면 ①, ②, ③의 경우를 제외하고도 두 변과 그 끼인각이 아닌 각을 알 때 그 각이 짧은 변에 이웃한 경우와 같이 그 삼각형이 하나로 결정되는 경우가 존재하므로, 삼각형의 결정조건이 삼각형이 하나로 결정되는 모든 경우를 포괄하지 않는 것처럼 보인다.

그러나, '삼각형의 결정조건에 대한 명제'는 실제적으로는 3개의 명제이다.[4] 이를 정리하면 다음과 같다.

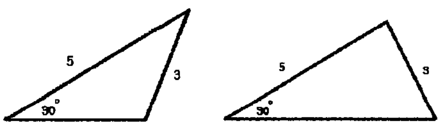
1. 세 변의 길이가 주어지면, 삼각형은 모양과 크기가 하나로 결정된다.
2. 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어지면, 삼각형은 모양과 크기가 하나로 결정된다.
3. 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 주어지면, 삼각형은 모양과 크기가 하나로 결정된다.

분리된 3개의 명제를 참조한다면, '삼각형의 결정조건'은 ① '삼각형의 세 변이 주어진 것', ② '삼각형의 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기

4) 각각의 조건이 최소필수성(minimality)의 성질을 갖고 있다. 즉, 각 조건의 진부분 집합에 의해서는 그러한 성질이 나오지 않는다.

가 주어진 것', ③ '삼각형의 한 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 주어진 것'을 합한 것 전체가 아니고 ①,②,③ 그 각각이다. 다시 말해서, 각각의 조건이 개별적으로 '삼각형이 하나로 결정된다'는 것에 대해 '충분하면서도 필요한 조건'을 이룬다.

그러나 이렇게 삼각형의 결정조건을 분리하여 파악하더라도, 어떤 조건이 삼각형의 결정조건 각각 모두에 해당되지 않는 것처럼 보이면서도 삼각형을 하나로 결정하는 경우가 존재하므로 '삼각형의 결정조건'을 '삼각형이 하나로 결정'되기 위한 필요 충분한 조건으로 받아들일 수 없다는 주장은 여전히 설득력이 있어 보인다.

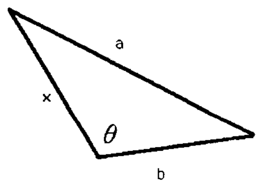


[그림 Ⅱ-1]

두 번째로, '임의의 삼각형'을 대상으로 하는 삼각형의 결정조건에 대한 명제에서 그 '임의성'의 범위를 어떻게 다르게 파악하는가에 따라 서로 다른 입장이 가능하다.

'어떤 조건'이 '어떤 특정한 삼각형'에 대해서 그 삼각형을 하나로 결정되게 한다고 하여 '삼각형의 결정조건'이 된다고 판단할 수는 없으므로, 삼각형의 결정조건을 삼각형이 하나로 결정되기 위한 필요충분조건으로 받아들이는 입장에서는, '어떠한 삼각형에 대해서도 두 변과 그 끼인각이 아닌 각이 결정되면 나머지 한 변과 두 각이 (하나로) 결정된다'는 명제를 거짓인 것으로 판단한다. 즉, 위 [그림Ⅱ-1]의 예[5]에서 알 수 있듯이 그 명제는 항상 참(necessary truth)이 되는 명제가 아니며 단지 '두 변과 한 각이 결정되면 나머지 한 변과 두 각이 한 가지로 결정되는 삼각형이 있다'는 의미에서 우연적으로 참[6](contingent truth)인 명제라고 간주한다.

그러나, 이러한 '보편성' 또는 '임의성'에 대한 논의를 모두 받아들이고도 '필요충분한 조건으로 받아들이지 않는 입장'에서 반론이 가능하다. 앞에서 다루었던 예를 좀 더 자세하게 살펴보자. 이제 긴 변을 a, 짧은 변을 b라고 하여 보자([그림 Ⅱ-2]).



[그림 Ⅱ-2]

제이코사인법칙을 사용하여 x를 계산하면 가정 $a>b>0$에 의하여 $x=b\cos\theta+\sqrt{b^2\cos^2\theta-b^2+a^2}$으로 유일하게 결정된다. 요컨대, 두 변의 길이와 주어진 두 변 중 긴 변의 대각(두 변의 끼인각이 아니면서 짧은 변에 이웃한 각)이 주어지면, '언제나' 삼각형이 유일하게 결정되게 된다.

그런데, 위의 두 주장을 살펴보면, '임의성'이 미치는 범위에 있어서 차이가 있음을 알 수 있다. 즉, 「두 변과 그 끼인각이 아닌 각을 알아도 그 각이 짧은 변에 이웃한 경우의 모든

5) 두 변 5와 3이 주어지고 그 사이에 있지 않은 각 30°가 주어졌을 때
6) 우연적으로 참인 명제는 어떤 '가능세계'에서는 거짓이다. 이와 같은 명제는 수학에서는 '거짓'인 명제라고 취급한다.

삼각형은 하나로 결정된다」는 명제에 대해, 삼각형의 결정조건을 필요충분한 조건으로 보는 입장에서는 이 경우를 '두 변과 그 끼인각이 아닌 각'의 특수한 경우로 취급하고 있는 반면 삼각형의 결정조건을 필요충분한 조건으로 보지 않는 입장에서는 '두 변과 그 끼인각이 아닌 각을 알고 그 각이 짧은 변에 이웃한 경우' 자체를 '임의성'이 미치는 범위로 간주하고 있는 것이다. 그렇다면, 결국은 '삼각형의 결정조건에 해당되지 않아 보이면서도 삼각형이 하나로 결정되는 경우를 어떻게 취급하느냐'는 문제로 다시 돌아오게 된다.

삼각형의 결정조건과 관련된 해석 차이의 마지막 원인으로, 삼각형의 결정조건의 역할에 대한 논의를 하고자 한다. 이를 위해서는 먼저 '주어진다'의 의미를 해석하는 방식에 있어서의 차이를 살펴볼 필요가 있다.

> 어떠한 삼각형이든지, 삼각형의 결정조건에 해당되지 않으면[7] 삼각형이 하나로 결정되지 않는다.

이 명제를 어떻게 해석할 것인가? 그것이 문제를 해결하는 관건이다. 왜냐하면 '삼각형의 결정조건'이 '삼각형이 하나로 결정'되기 위한 필요충분조건인 것을 받아들인다면 위의 명제도 받아들일 수밖에 없는데 위 명제에 대해 많은 사람들이 '삼각형의 결정조건에 해당되지 않아 보이면서도 삼각형이 하나로 결정되는 반례[8]'를 들며 위 명제가 타당하지 않다고 주장하기 때문이다.

위 명제를 다룰 때 '주어지면'의 의미는 기본적으로 '결정되면'의 의미이다. 예를 들어, '삼각형의 세 변이 주어지면' 또는 '삼각형의 세 변이 주어질 때'의 의미는 '삼각형의 세 변의 길이가 정해지면' 또는 '삼각형의 세 변의 길이가 정해질 때'의 의미이다. 그런데, 삼각형의 결정조건이 '삼각형이 하나로 결정되는지 안 되는지'를 판단하는 장치로서 어떠한 역할을 하고 있을까? 자세히 말하자면, 「삼각형의 결정조건이 실제적으로 판단을 할 수 있는 장치냐? 아니면 논리적인 의미에서의 판단장치냐?」는 것이다. 삼각형의 결정조건을 삼각형이 하나로 결정되기 위한 필요충분한 조건으로 보지 않는 입장에서는, '삼각형의 결정조건'은 '실제적으로' 주어진 삼각형이 하나로 결정되는지를 판별할 수 있는 '장치'가 되어야 한다고 본다.

그런데, 삼각형의 결정조건은 '논리적인 의미에서의 판단장치'이다. 삼각형의 결정조건에 대한 명제는 어떤 조건을 만족하는 삼각형이 하나로 결정된다는 것을 말해주는 것이지 그 자체로는 그 조건을 만족하는지 안 하는지에 대한 어떠한 정보도 주고 있지 않다. 이것이 「삼각형의 결정조건은 '논리적인 의미에서의 판단장치」라는 말의 정확한 의미이다. 즉, '주어진 특정한 삼각형의 세 변, 두변과 그 끼인 각, 또는 한변과 그 양 끝각이 정해지는지의 여부'를 '보여진' 상태로 판단할 수 없을 경우에는 다른 정리의 도움을 받아 그 여부를 알아보는 것이 필요하다는 것이다.

문제가 되고 있는 '두 변과 그 사이에 있지 않은 어떤 각'을 아는 삼각형의 경우를 이러한 해석을 통해 설명하면 다음과 같다.

① 두 변의 길이가 같은 경우: 두 변의 길이가 같을 때에는 이등변삼각형의 성질과 삼각형 내각의 합이 180°라는 성질에 의해 그 삼각형의

7) '삼각형의 결정조건을 만족하지 않으면'으로 바꿔 진술할 수 있다.
8) 이 글의 목적 중 하나는, 엄밀한 의미에서 반례가 없음을 밝히는 것이다.

두 변과 그 끼인각이 결정된다. 따라서, 그 삼각형은 하나로 결정된다.

②-1 두 변의 길이가 다르고 예각이 짧은 변에 이웃한 경우: 삼각형 내각의 합이 180°라는 성질, 한 변과 양 끝각을 아는 삼각형은 하나로 결정된다는 정리, 그리고 피타고라스의 정리에 의해 나머지 한 변이 정해진다. 삼각형의 세 변이 정해지므로 그 삼각형은 하나로 결정된다.

②-2 두 변의 길이가 다르고 직각이 짧은 변에 이웃한 경우: 피타고라스의 정리에 의해 나머지 한 변이 정해진다. 삼각형의 세 변이 정해지므로 그 삼각형은 하나로 결정된다.

②-3 두 변의 길이가 다르고 둔각이 짧은 변에 이웃한 경우: 사인법칙과 삼각형 내각의 합이 180°라는 성질에 의해 두 변의 끼인각이 결정된다. 따라서, 그 삼각형은 하나로 결정된다.

③ 두 변의 길이가 다르고 예각이 긴 변에 이웃한 경우: 제이코사인법칙, 이차방정식의 판별식 등에 의해 이러한 조건을 만족하는 삼각형이 2개가 됨을 알 수 있다.

위의 해석방식에서 드러나듯이, 두 변과 짧은 변에 이웃한 각을 아는 삼각형의 경우는, 삼각형의 결정조건 중 한 경우로 환원시켜 그 삼각형이 하나로 결정되는 것을 보일 수 있다. 다시 말해서, 삼각형의 결정조건에 대한 명제를 이용해서 그러한 삼각형이 하나로 결정됨을 보일 수 있다. 하지만, 삼각형의 결정조건에 대한 명제는 「두 변과 짧은 변에 이웃한 각을 아는 삼각형은 하나로 결정된다」는 정리를 통해서 유도되지 않는다. 다시 말해서, 두 변과 짧은 변에 이웃한 각을 아는 삼각형은 삼각형의 결정조건의 특수한 경우에 해당한다. 따라서, 연구자는 이러한 점이 '두 변과 짧은 변에 이웃한 각을 아는 경우'를 삼각형의 결정조건으로 새롭게 추가시키지 않는 가장 큰 이유라고 생각한다.

삼각형의 결정조건에 대한 명제는, '모든 삼각형에 대해' 적용되는 전건과 후건이 '이면'이라는 연결사에 의해 결합된 전칭 조건명제라고 할 수 있다. 전건과 후건으로 구성된 전칭 조건명제와 그 조건명제의 전건으로만 이루어진 특칭 명제는 다르다. 따라서, '삼각형의 결정조건에 대한 명제'에 의해 유도되는 정리(삼각형의 합동, 사인법칙, 제이코사인법칙, 피타고라스 정리 등)에 의해, 주어진 특정한 삼각형의 조건이 '삼각형의 결정조건에 대한 명제의 전건'에 해당하는지의 여부를 판단하는 것이 순환논리[9]에 빠지는 것은 아니다. 그리고, 이처럼 보편한정사가 사용된 전칭 조건명제에 의해 증명된 정리의 도움을 받아, 주어진 조건이 그 조건명제의 전건에 해당하는지의 여부를 판단하는 방식은 수학에서 유용하게 이용되는 방식이다. 예를 들어, 빗변과 높이가 같은 두 직각삼각형이 합동인지를 알아보기 위해, 즉, 합동조건의 전건에 해당하는지를 판별해 가는 과정 속에서 합동조건에 의해 유도된 정리를 이용하는 과정을 보면 이를 쉽게 확인할 수 있다. (RHS 합동조건)

2. 결정조건의 최소필수성과 그 일반화

이상에서는 삼각형의 결정조건에 대한 명제 자체를 대상으로 하여 삼각형의 결정조건과 관련된 견해 차이를 분석하고 그 해결방안을 제시하였다. 이 절에서는 논의를 심화시켜, 삼각형의 결정조건을 최소필수성(minimality)과 일반화라는 관점에서 분석하여 삼각형의 결정조건에 대한 명제가 삼각형이 결정되기 위한 필요충분조건이라는 것을 밝힌다.

9) 'p이면 q'라는 명제를 통해 'p'라는 명제(또는 명제함수)를 연역하려고 하였다면 이는 분명히 타당하지 않다.

가. 삼각형의 성립조건

본격적인 논의에 앞서 한 가지 살펴보아야 할 것이 있다. 다음의 인용문을 보자.

삼각형의 결정조건은 다음과 같다.
- 세 변의 길이가 주어질 때
  (단, 두 변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이보다 크다)
- 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때
- 한 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 주어질 때
  (단, 양 끝각의 크기의 합이 180°보다 작다)
  (배종수 외, 2001: 75)

위의 인용문에서는 삼각형이 이루어지지 않는 경우를 제외시키기 위해서 《(단, 두 변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이보다 크다), (단, 양 끝각의 크기의 합이 180°보다 작다)》와 같은 제한사항[10]을 삼각형의 결정조건에 보충하였다. 이런 제한사항은 반드시 필요한가?

삼각형의 결정조건과 삼각형의 성립조건의 관계를 다루기 위해, 바로 전 절에서 다루어졌던 논의를 고려하여 '삼각형의 결정조건에 대한 명제'를 기술하면 다음과 같다.

『어떤 삼각형이든 삼각형의 세 변이 주어지면 삼각형의 나머지 요소들(나머지 세 각)은 결정된다.』
『어떤 삼각형이든 삼각형의 두 변의 길이와 끼인각의 크기가 주어지면 삼각형의 나머지 요소들(나머지 한 변과 나머지 두 각)은 결정된다.』
『어떤 삼각형이든 삼각형의 한 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 주어지면 삼각형의 나머지 요소들(나머지 두 변과 나머지 한 각)은 결정된다.』

그런데, 위 조건명제의 전건과 후건이 진리값을 갖기 위해서는 전제[11]되어야 할 것이 있다. 다시 말해서, 삼각형의 결정조건에 관한 명제의 전건과 후건이 적격성을 지니기 위해선 선행되어야 할 사항이 있다. 예를 들어, '삼각형의 세 변의 길이가 주어지면'이라는 문장을 다루기 위해서는 '삼각형은 있다' 또는 '삼각형은 성립되어 있다'는 것을 전제해야 한다. 마찬가지로, 다른 전건들과 후건도 의미를 가지기 위해선 논리적으로 '삼각형이 있음'을 전제해야 한다.

따라서, 『(단, 두 변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이보다 크다)』와 『(단, 양 끝각의 크기의 합이 180°보다 작다)』와 같은 제한사항은 이미 삼각형의 결정조건에 대한 각각의 명제 속에 전제되어 있다고 할 수 있다[12]. 목하 논의에 있어서 삼각형이 성립하기 위한 제한사항(삼각형의 성립조건)은 이미 전제되어 있는 것으로 한다.

나. 최소필수성과 일반화

삼각형의 결정조건보다 더 많은 정보를 포함하고 있는 조건들이 삼각형을 하나로 결정하지 않는 것은 아니지만 '최소로 필요한' 조건들이 아닌 조건들을 삼각형의 결정조건이라고 부르지는 않는다. 밑에 나온 교과서의 예는 삼각형

---

10) 이와 같은 제한 사항을 이하에서는 삼각형의 성립조건이라고 부른다.
11) 여기서의 전제(presupposition)는 논증에서의 전제(premise), 가정(assumption), 가설(hypothesis) 등과는 분명히 구분해야 한다. 하나의 문장이 성립하기 위한 조건 또는 제약인 의미론적 전제(semantic presupposition)는 문장의 적격성을 판단하는 장치라 할 수 있다.
12) 이론적인 면에서 불필요하다고 하여 교육적인 차원에서도 불필요하다고 할 수는 없다. 이러한 입장에서, 『(단, 두 변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이보다 크다)』와 『(단, 양 끝각의 크기의 합이 180°보다 작다)』와 같은 안내는 삼각형이 하나로 작도되는지를 판단하게 하기 위한 친절한 배려로 간주할 수 있다.

의 결정조건이 '최소 필수성'을 가지고 있음을 지적하고 있다.

> 삼각형이 다음의 경우 하나로 결정된다.
> 1. 세 변의 길이가 주어질 때,
> 2. 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때
> 3. 한 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 주어질 때
>
> (참고)
> 삼각형이 결정되는데는 위의 삼각형의 결정조건 이외에도 여러 가지 변과 각의 크기를 알아도 되지만, 이 세 조건이 최소 조건이므로 특별히 결정조건이라 부른다.
> (금종해 외, 2001: 68)

그런데, '삼각형의 6요소 중 아는 요소가 몇 개인가?'만이 주어진 삼각형의 조건을 다 드러내는 것은 아니다. 알고 있는 정보를 기준으로 볼 때, '삼각형의 결정조건' 각각과 '두 변과 끼인각이 아닌 각(단, 그 각은 짧은 변에 이웃함)이라는 조건'은 다음과 같이 구별된다.

> ① SSS 결정조건: 세 변 → 3가지 조건
> 각 꼭지점에 기호가 주어진 다각형의 경우로 확장하게 되면, 다른 요소는 결정되고 각을 '세 개'만 모를 경우[13] 그 다각형은 하나로 결정된다(단, 사각형 이상부터는 모르는 세 각이 서로 이웃한 경우 그 세 각으로 이루어진 부분이 오목 또는 볼록할 수 있으므로 모르는 세 각이 이웃하지 않는다는 조건이 추가된다).
> ② SAS 결정조건: 두 변+한 각+아는 한 각이 아는 두 변의 끼인각 → 4가지 조건
> 각 꼭지점에 기호가 주어진 다각형의 경우로 확장하게 되면, '한 변과 양 끝각'만을 모를 경우 그 다각형은 하나로 결정된다.
> ③ ASA 결정조건: 한 변+두 각+두 각이 아는 한 변의 양 끝각 → 4가지 조건[14]
> 각 꼭지점에 기호가 주어진 다각형의 경우로 확장하게 되면, '두 변과 그 끼인각'만(또는 '이웃한 두 변'만)을 모를 경우 그 다각형은 하나로 결정된다.
> ④ 두 변과 끼인각이 아닌 각(단, 그 각은 짧은 변에 이웃함)을 아는 삼각형:
> 두 변+한 각+두 변이 길이가 다름+아는 각이 짧은 변에 이웃함 → 5가지 조건
> ⑤ 두 변과 끼인각이 아닌 각(단, 두 변의 길이가 같음):
> 두 변+한 각+두 변 길이가 같음+아는 각이 양 밑각 중 하나임 → 5가지 조건

이러한 분류에서, ④, ⑤ 경우도 삼각형이 하나로 결정될 때 그러한 조건이 최소필수적인 성격을 가지고 있음은 분명하다. 즉, 아는 조건 중에서 한 개라도 빠지면 그러한 삼각형은 일반적으로 하나로 결정되지 않는다[15]. 그러나, ④와 ⑤의 경우는 다른 경우에 비해 적용되는 삼각형의 범위가 상대적으로 한정되어 있음을 알 수 있다. 즉, '두 변과 그 끼인각이 아닌 각'을 아는 삼각형의 경우 중에서도 특수한 삼각형의 경우만을 다루고 있다. 여기서, ④, ⑤ 경우를 삼각형의 결정조건으로 취급하지 않는 이유를 수학의 일반화라는 측면에서 규명할 수 있다. 그 이유는 두 가지 측면에서 설명이 가능하다. 첫째, ①, ②, ③의 경우와 일반성의 정도가 같은 경우는 '두 변과 끼인각이 아닌 각'을 아는 삼각형인데, 그것보다 더 한정된 경우

---

13) Permutation의 문제로 인한 경우의 수는 제외한다. 즉, 어떤 특정한 세 각의 크기를 모른다는 의미이다. SAS 결정조건, ASA 결정조건의 일반화에서도 이러한 점은 동일하다.

14) 이처럼 해석하게 되면 최소 필수성(Minimality)[4]에 맞지 않는 문제가 생길 수 있으므로 ASA 결정조건을 최소필수적인 성질을 갖게 하기 위해서는 '한 변과 두 각'(3 조건)을 아는 경우로 수정할 수도 있을 것이다. 하지만, 일반적인 다각형의 결정조건의 관점에서 보면, 연속한 두 변만을 모르고 있으며 그 두 변을 제외한 변에 이웃한 각은 모두 안다는 조건이 추가되므로, 이러한 ASA 결정조건 해석이 일관성이 있음을 알 수 있다.

15) 부분부정

인 ④, ⑤ 경우를 ①, ②, ③의 경우와 같이 삼각형의 결정조건으로 인정하는 것은 적절하지 않다. 둘째, ①, ②, ③의 경우는 다각형의 결정조건으로 일관성 있게 확장 가능하지만 ④, ⑤ 경우는 특정한 삼각형의 경우에만 적용되지 다각형의 경우로 확장되지 않는다. 따라서, 일반적인 법칙을 추구하는 수학의 경향성에 비추어 삼각형의 결정조건을 ①, ②, ③의 경우로 한정하는 것이 합리적이라 할 것이다.[16)]

III. 요약 및 제언

'삼각형의 결정조건에 대한 명제'에 대한 지금까지의 논의를 정리하면 삼각형의 결정조건이 삼각형이 하나로 결정되기 위한 필요충분이라는 것을 다음과 같은 방식으로 정당화할 수 있다.

첫째, 주어진 삼각형이 표면상 결정조건이 주어지지 않은 것처럼 보이더라도 기존의 정리와 법칙을 이용하여 주어진 결정조건에 해당하는 것들을 알아낼 수 있다면 주어진 조건은 삼각형의 결정조건에 해당된다.

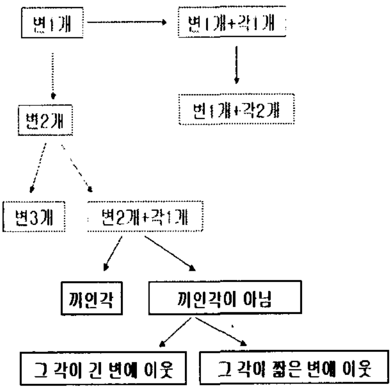
둘째, 삼각형의 결정조건에 대한 명제는 이미 삼각형이 성립되어있다는 전제 하에 의미를 가지며 삼각형의 결정조건 각각은 나머지 삼각형의 6요소가 결정되기 위해서 적어도 충족되어야 할 최소한의 필요조건이다. 그런데, 두 변을 알고 한 각이 짧은 변에 이웃한 경우는 삼각형이 하나로 결정되기 위한 최소필수성의 성격을 지니지만 특수한 삼각형만을 다루기 때문에 일반성의 수준이 떨어진다. 제한조건을 분석하고 다각형의 경우로 확장되게 되면 이러한 점은 분명히 드러난다.

그러나, 이러한 해결방식은 수학교육의 현장에 바로 적용하기에는 무리가 있다. 예를 들어, 연구자가 제시한 문제해결방식 중 첫 번째는, 문제가 된 상황('두 변과 이웃하지 않은 각'을 가진 삼각형이 하나로 결정되는 경우)을 표현한 문장의 숨은 의미를 찾아 '눈'에 보이지 않는 아이디어(피타고라스 정리, 제이코사인법칙 등)를 활용하는 방식이었다. 하지만, 논증기하를 배우기 시작하는 학생들에게 명제(또는 문장)의 깊은 의미를 찾은 후 그 명제와 관련된 놀라운 아이디어를 활용하도록 요구하는 것은 현실적으로 불가능하다. 더군다나, '삼각형의 결정조건'을 만족하는지의 여부를 판단하는데 결정적인 도움을 주는 '피타고라스 정리'나 '제이코사인법칙'이 각각 9-나 단계와 10-나 단계에 나온다는 점을 생각하면, 제시한 해결책이 보통의 학생을 위한 교육적 해결책이 될 수 없음을 알 수 있다.

그러나, 학생들에게「삼각형의 결정조건은 이것뿐이다」,「이러한 반례가 있기 때문에 이러한 조건은 삼각형의 결정조건이 되지 않는다」와 같은 사실을 제시한다고 하더라도 '두 변과 끼인각이 아니면서 짧은 변 쪽에 이웃한 각이 주어진 삼각형'이 하나로 결정되는 현상을 제대로 해석하게 할 수는 없을 것이다. 연구자는 이러한 문제상황의 발견과 그 해결방법의 탐구를 작도 활동을 통하여 의미 있게 조직할 수 있다고 본다. 예를 들어, 삼각형의 6 요소 중 아는 정보를 늘리면서 작도를 하게 되면 학생들은 삼각형의 결정조건을 체계적인 방식으로 발견할 수 있을 것이다([그림 III-1]). 뿐만 아니라, '전체 긍정', '전체 부정', '부분 부정'의 의미를 이해하는 과정에서 삼각형이 하나로 결정되는/결정되지 않는 모든 경우를 고려할 수 있으며 그러한 과정 속에서 반례의 의미를 생

16) 다만, 합동조건의 경우 자주 이용되는 RHS 조건 등을 합동조건으로 명명하고 있다.

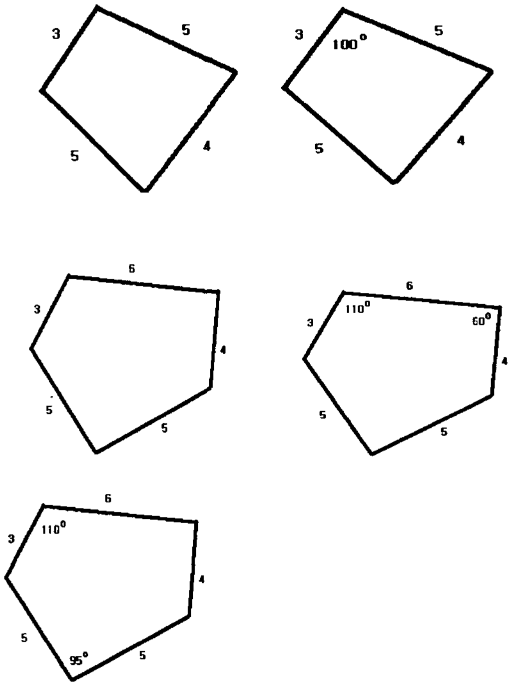
각할 기회를 가지며 삼각형의 결정조건 각각이 '최소필수적'인 성질을 갖고 있음도 알아가게 될 것이다.



[그림 Ⅲ-1]

이러한 작도과정을 통한 학습을 거친 후에는, '삼각형의 결정조건에 대한 명제'가 상식이 되어 문제해결의 도구로 사용될 수 있도록 지도하는 것이 바람직할 것이다. 즉 '상식'이 '수단'으로 발전해야 한다는 입장에서 볼 때, 작도를 통해 삼각형의 결정조건에 대한 명제를 충분히 학습한 후에는 주어진 삼각형 중에서 하나로 결정되는 것을 고르라는 종류의 문제상황을 제시하기보다는 도형의 특성을 정리하는 수단으로서 '삼각형의 결정조건에 대한 명제'가 이용되는 것을 발견하게 과정이 필요하다. 예를 들어, 아래와 같이 「여러 조건을 갖고 있는 사각형, 오각형 중에서 그 모양이 하나로 결정되는 것을 고르고 그 이유를 설명하라」는 문제처럼, 그 모양이 고정되는 이유를 고민하게 하면서 '삼각형의 결정조건'이 그 현상을 정리하는 수단으로서 작용할 수 있다는 것을 발견하게 하는 것이 필요하다고 본다([그림Ⅲ-2]).

다음 중에서 그 모양이 하나로 결정되는 것을 찾아보세요. 그리고 그 이유를 설명해보세요.



[그림 Ⅲ-2]

이상에서 우리는 삼각형의 결정조건에 대한 상반된 견해를 비교 분석하고 이러한 견해 차이의 원인을 찾고 그 해결방법을 제시하였으며, 삼각형의 결정조건을 체계적인 방식으로 발견하게 하는 작도활동과 그 조건을 기하현상의 정리수단으로 지도하는 방안을 제시하였다.

수학교과 내용의 애매성에 대한 활발한 논의는 교수-학습 과정의 개선을 위한 하나의 건전한 움직임이다. 본 연구에서 다루고 있는 문제가 수학교과에 산재된 여러 문제 중 하나에 불과하다는 점에서, 수학교과 내용에 대한 심도 있는 후속 연구를 기대하는 바이다.

참고문헌

고성은 외 5인(2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: (주) 블랙박스.

권경원(1987). **전제와 함의의 연구**. 연세대학교 박사학위논문.

박규홍 외 7인(2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: (주) 두레교육.

박윤범 외 3인(2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: (주) 대한교과서.

배종수 외 7인 (2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: 한성과학연구소.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교 출판부.

이영하 외 3인(2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: (주) 교문사.

최노성(2002). 삼각형의 결정조건. **수학사랑, 36,** 142-143.

황석근 · 이재돈(2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: (주) 한서출판사.

Beran, D. (1992). SSA and the Steiner-Lehmus theorem. *Mathematics Teacher, 85*(5).

Dearborn, R. G. (1985). Integral sides. *Mathematics Teacher, 78*(3), 238.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Glicksman, A. M. (1987). Interger-sided triangles and the SSA ambiguity. *Mathematics Teacher, 80*(7), 580-584.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements.* New York: Cambridge University Press.

Peek, A. L. (1987). Rethinking the ambiguous case. *Mathematics Teacher, 80*(5), 372.

Serra, M. (2003). *Discovering geometry.* Key Curriculum Press.

Wallace, E. C., & West, S. F. (1992). *Roads to geometry.* New Jersey: Prentice Hall.

Cajori, F. (1917). *A History of Elementary Mathmatics with Hints on Methods of Teaching*, The Macmillan Company.

Analysis on Discussion about 'Condition of Triangle-Determining'

Park, Sun Yong (Graduate School of Seoul National University)
Kwon, Seok il (Graduate School of Seoul National University)

There are divergent opinions about condition of triangle-determining. The purpose of this study was to compare those opinions and to identify cause of this phenomena. As a result of our study, we got to find out significant characteristics of proposition related to condition of triangle-determining. These aspects shows what cause of that phenomena is. First, that proposition is used as a theortical tool, not as a practical one. Second, that proposition presupposes that a triangle exists. Third, that proposition is connected with minimality and generality. However, our analysis is for teacher, not for student. Thus, we suggest a guiding principle as well as a guiding method in relation to teaching of that propostion.

* **Key word**: condition of triangle-determining(삼각형의 결정조건), presupposition(전제), minimality(최소필수성), generality(일반성)

논문접수 : 2004. 9. 15
심사완료 : 2004. 10. 12

<부록>

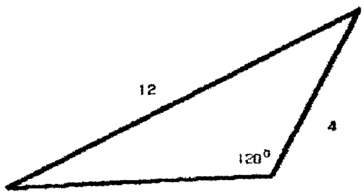
설문지

삼각형은 다음 각 경우에 그 모양과 크기가 하나로 결정된다.

이것을 삼각형의 결정조건이라고 한다.

1. 세 변의 길이가 주어질 때,
2. 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때
3. 한 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 주어질 때

중학교 7-나에서 다루어지는 「삼각형의 결정조건에 관한 위의 명제」와 관련하여, 다음의 경우에 대한 의견을 주시면 감사하겠습니다.



위의 삼각형은, 삼각형의 결정조건에 해당되지 않아 보이는 조건으로도, 하나로 결정됩니다. 그렇다면 이러한 예는,『삼각형의 결정조건은 삼각형이 하나로 결정되기 위한 충분조건이지만 필요조건이라고 할 수 없다』는 것을 준다고 생각하십니까? 답변하는 것에 대해 이유도 적어주십시오.