

두 개의 이상원인이 존재하는 공정에 대한 VSSI \bar{X} 관리도의 통계적 효율성*

이호중, 임태진[†]

승실대학교 산업·정보시스템공학과

Statistical Efficiency of VSSI \bar{X} Control Charts for the Process with Two Assignable Causes

Ho-Jung Lee, Tae-Jin Lim

Dept. of Industrial & Information Systems Engineering, Soongsil University

Key Words : VSSI control chart, ARL, ATS, statistical design, Markov chain, steady state solution

Abstract

This research investigates the statistical efficiency of variable sampling size & sampling interval(VSSI) \bar{X} charts under two assignable causes. Algorithms for calculating the average run length(ARL) and average time to signal(ATS) of the VSSI \bar{X} chart are proposed by employing Markov chain method. States of the process are defined according to the process characteristics after the occurrence of an assignable cause. Transition probabilities are carefully derived from the state definition. Statistical properties of the proposed chart are also investigated. A simple procedure for designing the proposed chart is presented based on the properties. Extensive sensitivity analyses show that the VSSI \bar{X} chart is superior to the VSS or VSI \bar{X} chart as well as to the Shewhart \bar{X} chart in statistical sense, even under two assignable causes.

1. 서론

공정의 평균의 변화를 감시하기 위해 널리 사용되는 \bar{X} 관리도는 표본크기, 샘플링 간격, 관리한계선 등의 설계 모수를 갖는다.

관리도의 전통적인 샘플링 방법은 공정으로부터 일정한 크기의 표본을 일정한 간격

[†] 교신저자 tjlim@ssu.ac.kr

* 본 연구는 승실대학교 교내연구비 지원에 의하여 수행되었음.

으로(FSSI: Fixed Sample Size and Sampling Interval) 취하는 것이다. Shewhart \bar{X} 관리도는 FSSI 방법을 취하며 상대적으로 큰 공정의 이동을 감지하는데 우수한 성능을 제공한다. 그러나 관리통계량이 관리한계선 가까이 타점된다면 다음의 점들은 관리한계선 밖으로 나갈 가능성이 크기 때문에 통계량의 위치에 따라 가변적인 표본크기나 샘플링 간격(VSSI : Variable Sampling Size and Sampling Interval)을 사용하여 관리도의 성능을 향상시킬 수 있다.

단일 이상원인이 존재하는 경우에 VSSI \bar{X} -관리도를 적용하면 FSSI \bar{X} -관리도에 비해 운영비용과 오경보 발생률 측면에서 유리하다는 사실은 이미 밝혀진 바 있다 (Prabhu et al., 1997). 그러나 현실적으로 공정의 이상원인은 여러 가지가 존재하고 최근에는 공정의 완전 자동화에 의해 이상원인을 크게 기계에 의한 이상원인과 재료에 의한 이상원인과 같이 몇 가지로 나누어서 관리하기도 한다(심성보 등, 2000). 따라서 본 연구에서는 공정에 두 종류의 이상원인이 존재하는 경우에 대하여 VSSI 관리도를 적용한다. 두 개의 이상원인이 발생 가능한 경우 각 이상원인의 발생률과 공정평균 이동을 고려해야 하므로 관리도의 통계적 특성을 규명하기 어렵다. 본 연구의 목적은 이러한 통계적 특성을 분석하는 방법을 개발하고, 두 개의 이상원인이 존재하는 공정에도 VSSI 관리도가 효율적임을 입증하고자 하는 것이다. 먼저 마코프 체인(Markov Chain)을 이용하여 평균 런 길이(ARL: Average Run Length)와 평균 신호 발생 시간(ATS: Average Time to Signal)

등을 계산하는 방안을 제안한다. 다음으로 민감도 분석을 통하여 ATS 관점에서 표준 Shewhart \bar{X} 관리도, VSS 관리도, VSI 관리도 등과 비교하여 VSSI 관리도의 효율성을 보인다.

2절에서는 VSSI 관리도와 관련된 기존 연구 내용을 소개하고, 3절에서는 두 개의 이상원인 하에서 VSSI \bar{X} -관리도의 ARL과 ATS를 계산하는 절차를 제안한다. 4절에서는 민감도 분석을 통하여 VSSI \bar{X} -관리도의 효율성을 조사하고, 5절에서는 결론 및 추후연구 방향을 제시한다.

2. VSSI 관리도

관리 통계량의 위치에 따라 표본크기나 샘플링 간격을 조절하여 관리도의 성능을 향상시키고자 하는 연구가 다수 진행되어 왔다. Reynolds et al.(1988)과 Runger and Pignatiello(1991)는 현재 표본 통계량의 위치에 따라 다음의 샘플링 간격이 변하는 VSI(Variable Sampling Interval) \bar{X} 관리도를 제안하여 전형적인 Shewhart 관리도보다 우수하다는 것을 입증하였다. Prabhu et al.(1993)은 ASS(Adaptive Sample Size) 관리도를, Costa(1994)는 VSS (Variable Sample Size) 관리도를 각각 제안하였다. 이후 Prabhu et al.(1994)은 VSI \bar{X} 관리도와 VSS \bar{X} 관리도를 통합한 VSSI \bar{X} 관리도를 제안하였다. VSSI 관리도는 표본크기와 샘플링 간격을 동시에 변화시킴으로서 고정된 표본크기와 샘플링 간격을 사용하는 일반적인 관리도에 비해 더 우수한 성능을

갓도록 한 것이다.

표준 Shewhart \bar{X} -관리도는 고정된 h_0 시간마다 n_0 개의 표본을 추출하여 표본평균을 관리도에 타점하는 반면, VSSI 관리도는 (n_1, h_2) 와 (n_2, h_1) 을 각각 하나의 쌍으로 사용한다. 여기서 n_1 과 n_2 는 각각 VSSI 관리도의 최소 및 최대 표본크기를 나타내며, h_1 과 h_2 는 각각 VSSI 관리도의 최소 및 최대 샘플링 간격을 나타낸다.

표준화된 관리한계선의 폭을 k 라 하고 임계한계선의 폭을 w 라 하면, 관리도의 영역은 다음과 같이 구분할 수 있다.

$I_1 = [-w, w]$: VSSI 관리도의 임계한계 내 영역

$I_2 = [-k, -w) \cup (w, k]$: VSSI 관리도의 임계한계 외 영역

$I_3 = [-k, k]$: 관리한계 영역

VSSI 관리도의 i 번째 표본크기와 샘플링 간격을 각각 $n(i)$ 와 $h(i)$ 라 하면 이들은 다음과 같이 결정된다(Prabhu et al., 1994).

$$(n(i), h(i)) = \begin{cases} (n_2, h_1), & \text{if } Z_{i-1} \in I_2 \\ (n_1, h_2), & \text{if } Z_{i-1} \in I_1 \end{cases}$$

단, $Z_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n(i)}}$ 는 표준화된 표본평균,

μ_0 는 공정평균, σ 는 공정표준편차, \bar{X}_i 는 i 번째 표본평균을 나타낸다. 표준화된 통계량 Z_i 가 관리영역 I_3 를 벗어나면 관리도는 이상신호를 발생한다.

관리상태에서 평균 런 길이를 ARL_0 , 관

리상태에서 이상신호가 발생하는 평균시간을 ATS_0 라 하자. 단일 이상원인 하의 공정에서 VSSI 관리도는 ARL_0 와 ATS_0 가 동일한 다른 관리도(\bar{X} , VSS, VSI)에 비해 이상원인이 발생하였을 때의 평균 런 길이 ARL_δ 와 이상신호가 발생하기까지 평균 소요시간 ATS_δ 가 더 짧은 것으로 알려져 있다(Prabhu et al., 1994).

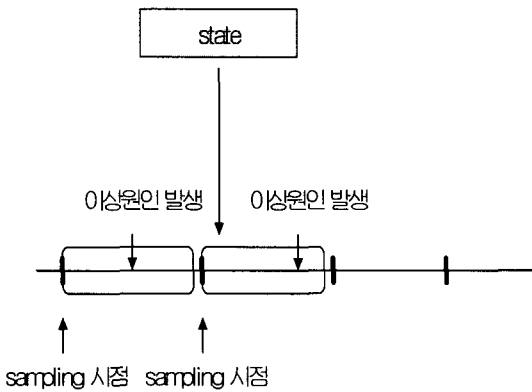
3. 두 개 이상원인 하에서 VSSI \bar{X} 관리도의 통계적 특성

두 개의 독립적인 이상원인 A1과 A2가 존재하는 공정에서 관리도 설계에 요구되는 정보는 각 이상원인의 발생률 λ_1, λ_2 와 공정평균의 표준화된 이동거리 δ_1, δ_2 등이다. 이러한 정보를 통하여 VSSI 관리도의 통계적 특성을 계산하는 방법을 다음과 같은 가정 하에서 제안한다.

- ① 품질특성치는 정규분포를 따른다.
- ② 공정 이상원인의 종류는 두 가지를 고려한다.
- ③ 공정은 관리상태에서 시작하고, 공정의 이상원인은 공정평균을 변화시킨다.
- ④ 두 이상원인의 발생 시간은 지수분포를 따른다.
- ⑤ 두 이상원인의 발생은 독립적이다.
- ⑥ 하나의 이상원인이 발생하면 동일한 이상원인이 반복해서 발생하지는 않는다.
- ⑦ 두 이상원인이 모두 발생하면 공정평균의 이동을 증폭시킨다. 즉, $\delta = \delta_1 + \delta_2$.

3.1 상태정의 및 초기상태 확률

마코프 체인을 이용하여 ARL_δ 와 ATS_δ 를 계산하기 위하여 공정 및 관리 통계량의 상태(state)를 <그림 1>과 같이 정의한다. 즉, 이전 샘플링 시점 이후로 다음 샘플링 시점 직전까지를 하나의 상태로 정의한다.



<그림 1> 공정 및 관리 통계량의 상태

이에 따라 이상원인이 발생한 이후의 상태를 다음과 같이 아홉 가지로 정의한다.

상태 1 : $Z_{i-1} \in I_1$ 이고 이상원인 A1 존재

상태 2 : $Z_{i-1} \in I_1$ 이고 이상원인 A2 존재

상태 3 : $Z_{i-1} \in I_1$ 이고 이상원인 A1, A2 존재

상태 4 : $Z_{i-1} \in I_2$ 이고 이상원인 A1 존재

상태 5 : $Z_{i-1} \in I_2$ 이고 이상원인 A2 존재

상태 6 : $Z_{i-1} \in I_2$ 이고 이상원인 A1, A2 존재

상태 7 : $Z_{i-1} \in I_3$ 이고 이상원인 A1 존재

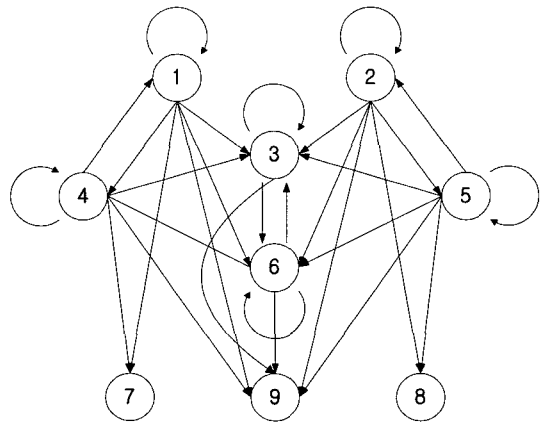
상태 8 : $Z_{i-1} \in I_3$ 이고 이상원인 A2 존재

상태 9 : $Z_{i-1} \notin I_3$ 이고 이상원인 A1, A2 존재

아홉 가지 상태에 따른 전이도(transition diagram)는 <그림 2>와 같다. 상태 7, 8, 9에서는 이상신호가 발생하여 런이 마감되므로 흡수상태가 되며, 런 프로세스는 다음과 같은 전이확률 행렬을 갖는 마코프 체인을 형성한다.

$$P = ((p_{ij}))_{1 \leq i, j \leq 9} \quad (1)$$

단, $p_{i,j}$ 는 공정평균이 이동되었을 때 이전 상태 i 로부터 현재 상태 j 로의 전이확률을 나타낸다.



<그림 2> VSSI 관리도의 상태 전이도

ARL_δ 및 ATS_δ 를 구하기 위해서는 다음과 같이 흡수상태와 관련된 원소가 사라진 전이확률 행렬 Q 와 초기 상태의 확률 벡터 b 를 계산한다.

$$Q = ((p_{ij}))_{1 \leq i, j \leq 6}, \quad (2)$$

$$b' = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6),$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 1 \quad (3)$$

전이확률 및 초기 상태의 확률을 계산하기 위하여 통계량 Z_{i-1} 이 영역 I_1, I_2, I_3 에 속할 확률을 각각 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned} P_1(n, \delta) &\equiv \Pr [Z_{i-1} \in I_1 | n, \delta] \\ &= \Phi(w - \delta \sqrt{n}) - \Phi(-w - \delta \sqrt{n}) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} P_2(n, \delta) &\equiv \Pr [Z_{i-1} \in I_2 | n, \delta] \\ &= \Phi(UCL - \delta \sqrt{n}) - \Phi(w - \delta \sqrt{n}) \\ &+ \Phi(-w - \delta \sqrt{n}) - \Phi(LCL - \delta \sqrt{n}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} P_3(n, \delta) &\equiv \Pr [Z_{i-1} \in I_3 | n, \delta] \\ &= \Phi(UCL - \delta \sqrt{n}) - \Phi(LCL - \delta \sqrt{n}) \end{aligned} \quad (6)$$

또한 이상원인 A_i 에 의해 h 시간 내에 이상신호가 발생할 확률은 다음과 같다.

$$F_i(h) \equiv 1 - \exp(-\lambda_i h), \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

$$F_{1,2}(h) \equiv 1 - \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)h] \quad (8)$$

이상 정의한 확률을 이용하여 초기 상태의 확률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$b_1 = \frac{P_1(n, 0)}{P_3(n, 0)} \frac{F_1(h_2)[1 - F_2(h_2)]}{F_{1,2}(h_2)} \quad (9)$$

$$b_2 = \frac{P_1(n, 0)}{P_3(n, 0)} \frac{F_2(h_2)[1 - F_1(h_2)]}{F_{1,2}(h_2)} \quad (10)$$

$$b_3 = \frac{P_1(n, 0)}{P_3(n, 0)} \frac{F_1(h_2)F_2(h_2)}{F_{1,2}(h_2)} \quad (11)$$

$$b_4 = \frac{P_2(n, 0)}{P_3(n, 0)} \frac{F_1(h_1)[1 - F_2(h_1)]}{F_{1,2}(h_1)} \quad (12)$$

$$b_5 = \frac{P_2(n, 0)}{P_3(n, 0)} \frac{F_2(h_1)[1 - F_1(h_1)]}{F_{1,2}(h_1)} \quad (13)$$

$$b_6 = \frac{P_2(n, 0)}{P_3(n, 0)} \frac{F_1(h_1)F_2(h_1)}{F_{1,2}(h_1)} \quad (14)$$

예를 들어 b_1 은 과도(transient)상태에 있다는 전제 하에서 $Z_{i-1} \in I_1$ 이고 이상원인 A_1 만이 발생할 확률을 나타낸다. 위 식에서 $F_1(h)[1 - F_2(h)] + F_2(h)[1 - F_1(h)] + F_1(h)F_2(h) = F_{1,2}(h)$

이므로

$$b_1 + b_2 + b_3 = P_1(n, 0)/P_3(n, 0),$$

$$b_4 + b_5 + b_6 = P_2(n, 0)/P_3(n, 0)$$

등을 얻고,

$$P_1(n, 0) + P_2(n, 0) = P_3(n, 0)$$

이므로 식 (3)이 성립함을 보일 수 있다.

3.2 ARL과 ATS의 계산

마코프 체인의 특성에 따라 $(I - Q)^{-1}$ 의 (i, j) 원소는 상태 i 에서 시작하여 상태 j 에서 보낸 회수의 기댓값이 된다(Ross, 1996). 따라서 정상(stationary) 상태에서 이상원인 발생 후 이상신호 발생까지의 기대회수는 다음과 같다(Prabhu et al., 1994).

$$ARL_\delta = b'(I - Q)^{-1}1 \quad (15)$$

단, I 는 6×6 단위행렬이며, 1 은 6×1 단위 열벡터를 나타낸다.

또한 각 상태에서 취하는 샘플링 간격이 $h' = (h_2, h_2, h_2, h_1, h_1, h_1)$ 이므로 이상신호를 발생하기까지의 평균시간은 다음과 같다(Prabhu et al., 1994).

$$ATS_\delta = b'(I - Q)^{-1}h \quad (16)$$

위 식은 마코프 체인의 특성에서 비롯된 것으로서 이상원인의 개수와는 무관하게 적용된다.

행렬 Q 를 구성하는 전이확률은 다음과 같이 계산된다. 발생한 이상원인은 저절로

제거되지는 않으므로 $p_{12}, p_{15}, p_{21}, p_{24}, p_{31}, p_{32}, p_{34}, p_{35}, p_{42}, p_{45}, p_{51}, p_{54}, p_{61}, p_{62}, p_{64}, p_{65}$ 등은 모두 0이 된다(그림 2).

상태 1로부터 전이되는 확률은 이전 샘플링에서 Z_{i-1} 이 임계한계 안에 위치하므로 표본크기 n_1 을 사용하고, 이상원인 A1이 존재하므로 공정평균이 $\delta_1\sigma$ 이동하였다는 전제 하에서 계산된다. 현재 상태의 샘플링 간격은 상태 1, 2, 3 등으로 전이될 때는 h_2 , 상태 4, 5, 6 등으로 전이될 때는 h_1 이므로 다음과 같이 계산된다.

$$p_{11} = P_1(n_1, \delta_1)[1 - F_2(h_2)] \quad (17)$$

$$p_{13} = P_1(n_1, \delta_1)F_2(h_2) \quad (18)$$

$$p_{14} = P_2(n_1, \delta_1)[1 - F_2(h_1)] \quad (19)$$

$$p_{16} = P_2(n_1, \delta_1)F_2(h_1) \quad (20)$$

예컨대 식 (20)은 현재 n_1 크기의 샘플링에서 Z_i 가 임계한계를 벗어나 다음 샘플링 구간 h_1 을 사용하고 그 동안 이상원인 A2가 발생할 확률을 의미한다.

상태 2로부터 전이되는 확률은 공정평균이 $\delta_2\sigma$ 이동하였고 표본크기는 n_1 이므로 다음과 같이 계산된다.

$$p_{22} = P_1(n_1, \delta_2)[1 - F_1(h_2)] \quad (21)$$

$$p_{23} = P_1(n_1, \delta_2)F_1(h_2) \quad (22)$$

$$p_{25} = P_2(n_1, \delta_2)[1 - F_1(h_1)] \quad (23)$$

$$p_{26} = P_2(n_1, \delta_2)F_1(h_1) \quad (24)$$

상태 3으로부터 전이되는 확률은 공정평균이 $(\delta_1 + \delta_2)\sigma$ 이동하였고 표본크기는 n_1 이므로 다음과 같이 계산된다.

$$p_{33} = P_1(n_1, \delta_1 + \delta_2) \quad (25)$$

$$p_{36} = P_2(n_1, \delta_1 + \delta_2) \quad (26)$$

상태 4로부터 전이되는 확률은 공정평균이 $\delta_1\sigma$ 이동하였고 표본크기는 n_2 이므로 다음과 같이 계산된다.

$$p_{41} = P_1(n_2, \delta_1)[1 - F_2(h_2)] \quad (27)$$

$$p_{43} = P_1(n_2, \delta_1)F_2(h_2) \quad (28)$$

$$p_{44} = P_2(n_2, \delta_1)[1 - F_2(h_1)] \quad (29)$$

$$p_{46} = P_2(n_2, \delta_1)F_2(h_1) \quad (30)$$

상태 5에서 전이되는 확률은 공정평균이 $\delta_2\sigma$ 이동하였고 표본크기는 n_2 이므로 다음과 같이 계산된다.

$$p_{52} = P_1(n_2, \delta_2)[1 - F_1(h_2)] \quad (31)$$

$$p_{53} = P_1(n_2, \delta_2)F_1(h_2) \quad (32)$$

$$p_{55} = P_2(n_2, \delta_2)[1 - F_1(h_1)] \quad (33)$$

$$p_{56} = P_2(n_2, \delta_2)F_1(h_1) \quad (34)$$

상태 6에서 전이되는 확률은 공정평균이 $(\delta_1 + \delta_2)\sigma$ 이동하였고 표본크기는 n_2 이므로 다음과 같이 계산된다.

$$p_{63} = P_1(n_2, \delta_1 + \delta_2) \quad (35)$$

$$p_{66} = P_2(n_2, \delta_1 + \delta_2) \quad (36)$$

이상의 전이확률은 다음과 같은 특성을 만족함을 알 수 있다.

$$\sum_{j=1}^6 p_{1,j} = P_3(n_1, \delta_1) \quad (37)$$

$$\sum_{j=1}^6 p_{2,j} = P_3(n_1, \delta_2) \quad (38)$$

$$\sum_{j=1}^6 p_{3,j} = P_3(n_1, \delta_1 + \delta_2) \quad (39)$$

$$\sum_{j=1}^6 p_{4,j} = P_3(n_2, \delta_1) \quad (40)$$

$$\sum_{j=1}^6 p_{5,j} = P_3(n_2, \delta_2) \quad (41)$$

$$\sum_{j=1}^6 p_{6,j} = P_3(n_2, \delta_1 + \delta_2) \quad (42)$$

이상의 합들은 각각의 상태에서부터 관리한 계선을 벗어나지 않을 확률, 즉 이상신호가 발생하지 않을 확률을 나타낸다.

3.3 ATS 계산상의 제약

관리상태의 공정에서 VSSI \bar{X} 관리도의 기대 표본크기와 샘플링 간격이 FSSI 관리도의 표본크기 n_0 및 샘플링 간격 h_0 와 같아지도록 다음과 같은 제약을 부과한다.

$$E[n(i) | Z_{i-1} \in I_3; \delta_1 = \delta_2 = 0] = n_0 \quad (43)$$

$$E[h(i) | Z_{i-1} \in I_3; \delta_1 = \delta_2 = 0] = h_0 \quad (44)$$

이러한 제약으로부터 임계한계 w 와 최대 샘플링 간격 h_2 는 아래의 식을 만족하게 된다(Prabhu et al., 1994).

$$w = \Phi^{-1}\left(\frac{2\Phi(UCL)[n_0 - n_2] + (n_1 - n_0)}{2(n_1 - n_2)}\right) \quad (45)$$

$$h_2 = \frac{h_0(n_1 - n_2) - d - h_1c}{n_1 - n_2 - c} \quad (46)$$

단, $d = 2(h_0 - h_1)(n_1 - n_2)\Phi(UCL)$,

$$c = 2(n_0 - n_2)\Phi(UCL) + (n_1 - n_0).$$

4. 민감도 분석

4.1 VSSI \bar{X} 관리도와 FSSI, VSS, VSI \bar{X} 관리도의 비교

VSSI \bar{X} 관리도의 통계적 효율성을 ATS_δ 관점에서 다른 관리도와 비교하였다. 모수의 값은 단일 이상원인에서의 VSSI \bar{X}

관리도를 연구한 Prabhu et al.(1994)의 모수와 동일하게 설정하였고, 두 이상원인의 발생률은 각각 0.02로 하였다.

VSS \bar{X} 관리도에서는 일정한 간격으로 표본을 추출하므로 다음과 같은 방법으로 ATS_δ 를 계산하였다.

$$ATS_\delta = b'(I - Q)^{-1} h_0 \quad (47)$$

VSI \bar{X} 관리도의 표본크기는 항상 고정되어 있으므로 $n_1 = n_2 = n_0$ 로 놓고 ATS_δ 를 계산하였다.

<표 1>~<표 4>는 두 개의 이상원인에 의한 표준 평균이동 (δ_1, δ_2) 에 따른 ATS_δ 를 계산한 결과이다. 제약식 (44)에 의하여 공정이 관리상태에 있을 때 모든 관리도의 ATS 값은 같아진다.

<표 1>과 <표 2>에서는 $n_0 = 3$ 일 때, <표 3>과 <표 4>에서는 $n_0 = 5$ 일 때의 ATS_δ 를 비교하였다($h_1 = 0.01, 0.1$). 대부분의 경우, 특히 고정평균의 이동폭이 크지 않은 경우에 있어서 VSSI \bar{X} 관리도의 ATS_δ 가 다른 관리도의 ATS_δ 에 비해 짧으므로, 통계적으로 효율적임을 알 수 있다.

4.2 n_2 의 변화에 따른 민감도 분석

<표 1>~<표 4>로부터 다음의 결론을 얻을 수 있다. 표본크기 n_1 과 짧은 샘플링 간격 h_1 을 고정하였을 때, n_2 가 증가함에 따라 h_2 는 감소하고 임계한계 w 는 증가한다. 이는 n_2 의 증가가 민감도를 향상시키므로 임계한계를 커지게 하고, 임계구간 I_1 에 타점

될 확률이 커지므로 h_2 가 짧아지는 것으로 해석된다. 또한 ATS_δ 관점에서 n_2 의 증가에 따라 VSI 관리도는 단조증가하며, VSS 및 VSSI 관리도는 단조감소, 단조증가, 혹은 단조감소 후 증가 등의 특성을 보인다. 이러한 특성은 VSSI 관리도의 통계적 설계 방안을 연구하는데 도움이 될 것으로 기대된다.

4.3 n_1 의 변화에 따른 민감도 분석

<표 3>~<표 4>로부터 n_1 의 증가 또한 h_2 의 감소와 w 의 증가를 가져옴을 알 수 있다. 또한 ATS_δ 관점에서도 n_2 의 증가에 따른 변화와 유사한 양상을 보인다.

4.4 민감도 분석에 따른 통계적 설계 방안

민감도 분석 결과에 따르면 n_2 의 증가에 따라 VSSI 관리도의 ATS_δ 가 단조성을 보이므로 다음과 같은 알고리즘을 생각할 수 있다. 그러나 단조성을 수리적으로 증명하는 것은 매우 어려운 문제이다.

[단계 1] $n_1 = 1$ 로 초기화

$$ATS_\delta^* = \infty \text{로 초기화}$$

[단계 2] $n_2 = n_0 + 1$ 로 초기화

[단계 3] w 계산 [식 (45)]

h_2 를 식 (46)으로 치환

ATS_δ 를 h_1 에 대하여 최소화

[단계 4] $ATS_\delta < ATS_\delta^*$ 이면 해 개선

이 때의 $n_1, n_2, h_1, ATS_\delta^*$ 저장

$n_2 = n_2 + 1$ 로 하고 [단계 3]으로,

$ATS_\delta > ATS_\delta^*$ 이면 [단계 5]로

[단계 5] $n_1 < n_0 - 1$ 이면

$n_1 = n_1 + 1$ 로 하고 [단계 2]로,

$n_1 = n_0 - 1$ 이면 저장된 해를 최적해로 선택

5. 결론

본 연구에서는 두 개의 이상원인이 독립적으로 발생하는 공정에 VSSI \bar{X} 관리도를 적용하였을 때 ARL과 ATS를 계산하는 방법을 제안하였다. 또한, ATS 관점에서 FSSI \bar{X} 관리도, VSS 관리도, VSI 관리도 등과 비교하여 두 개의 이상원인이 존재하는 공정에 VSSI 관리도를 사용하는 것이 효율적임을 보였다.

본 연구에서는 두 개의 이상원인이 있는 경우만을 고려하였으나 3개 이상의 이상원인이 발생하는 경우로도 확장하는 연구가 기대된다.

참고문헌

[1] 심성보, 강창욱(2000), "두 개의 이상원인을 고려한 VSS \bar{X} 관리도의 통계적 설계", 「한국품질경영학회지」, 28권, 3호, pp. 44-52.

[2] Costa, A. F. B.(1994), " \bar{X} Charts with Variable Sample Size", Journal of Quality Technology, Vol. 26, No. 3, pp. 155-163.

<표 1> 다양한 관리도의 ATS_s 비교 ($n_0 = 3, h_0 = 1.0, h_1 = 0.01$)

(δ_1, δ_2)			(0, 0)	(0.5, 0.0)			(0.5, 0.5)			(1.0, 0.0)			(1.0, 0.5)			(1.0, 1.0)		
FSSI $n_0 = 3, h_0 = 1.0$			370.40	60.69			32.87			9.77			18.91			8.47		
(n_1, n_2)	(h_1, h_2)	w	ALL	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI
(1, 4)	(0.01, 2.98)	0.43	370.40	52.78	43.71	37.31	29.35	25.23	22.76	7.00	3.44	2.49	16.72	13.74	12.27	6.37	3.31	2.43
				87%	72%	62%	89%	77%	69%	72%	35%	26%	88%	73%	65%	75%	39%	29%
(1, 5)	(0.01, 1.99)	0.67	370.40	46.46	45.01	33.40	26.80	25.66	21.14	5.49	3.73	2.25	15.19	14.02	11.44	5.14	3.56	2.20
				77%	74%	55%	82%	78%	64%	56%	38%	23%	80%	74%	61%	61%	42%	26%
(1, 8)	(0.01, 1.40)	1.06	370.40	33.85	47.97	25.56	21.81	26.82	17.80	3.85	4.46	2.28	12.45	14.75	9.86	3.73	4.21	2.24
				56%	79%	42%	66%	82%	54%	39%	46%	23%	66%	78%	52%	44%	50%	26%
(1, 10)	(0.01, 1.28)	1.22	370.40	28.60	49.32	22.17	19.59	27.37	16.20	3.61	4.83	2.48	11.34	15.10	9.17	3.53	4.53	2.42
				47%	81%	37%	60%	83%	49%	37%	50%	25%	60%	80%	49%	42%	54%	29%
(1, 12)	(0.01, 1.22)	1.33	370.40	24.82	50.36	19.68	17.88	27.80	14.95	3.61	5.13	2.71	10.53	15.37	8.65	3.53	4.78	2.64
				41%	83%	32%	54%	85%	46%	37%	53%	28%	56%	81%	46%	42%	57%	31%
(1, 15)	(0.01, 1.17)	1.46	370.40	20.92	51.54	17.10	15.97	28.30	13.56	3.78	5.50	3.06	9.69	15.69	8.12	3.69	5.09	2.97
				35%	85%	28%	49%	86%	41%	39%	56%	31%	51%	83%	43%	44%	60%	35%
(1, 20)	(0.01, 1.12)	1.61	370.40	17.24	52.93	14.70	14.03	28.90	12.21	4.25	5.96	3.64	8.94	16.08	7.70	4.12	5.47	3.50
				28%	87%	24%	43%	88%	37%	44%	61%	37%	47%	85%	41%	49%	65%	41%
(1, 25)	(0.01, 1.09)	1.72	370.40	15.50	53.90	13.67	13.08	29.33	11.65	4.76	6.30	4.18	8.69	16.36	7.65	4.59	5.76	3.99
				26%	89%	23%	40%	89%	35%	49%	65%	43%	46%	87%	41%	54%	68%	47%
(2, 4)	(0.01, 1.99)	0.67	370.40	53.97	45.01	39.20	29.73	25.66	23.34	7.13	3.73	2.62	16.92	14.02	12.59	6.47	3.56	2.55
				89%	74%	65%	91%	78%	71%	73%	38%	27%	90%	74%	67%	77%	42%	30%
(2, 5)	(0.01, 1.50)	0.96	370.40	48.85	47.14	36.81	27.59	26.49	22.38	5.68	4.24	2.41	15.60	14.54	12.08	5.30	4.02	2.35
				81%	78%	61%	84%	81%	68%	58%	44%	25%	83%	77%	64%	63%	48%	28%
(2, 8)	(0.01, 1.20)	1.38	370.40	38.41	50.79	30.93	23.54	27.98	20.09	3.97	5.26	2.30	13.28	15.49	10.97	3.83	4.90	2.25
				63%	84%	51%	72%	85%	61%	41%	54%	24%	70%	82%	58%	45%	58%	27%
(2, 10)	(0.01, 1.14)	1.53	370.40	33.72	52.17	27.87	21.71	28.57	18.84	3.65	5.70	2.40	12.34	15.86	10.40	3.55	5.26	2.34
				56%	86%	46%	66%	87%	57%	37%	58%	25%	65%	84%	55%	42%	62%	28%
(2, 12)	(0.01, 1.11)	1.63	370.40	30.12	53.15	25.40	20.26	28.99	17.77	3.56	6.03	2.54	11.62	16.14	9.94	3.47	5.54	2.48
				50%	88%	42%	62%	88%	54%	37%	62%	26%	62%	85%	53%	41%	65%	29%
(2, 15)	(0.01, 1.08)	1.75	370.40	26.17	54.21	22.58	18.56	29.47	16.48	3.62	6.41	2.78	10.83	16.45	9.40	3.53	5.85	2.71
				43%	89%	37%	57%	90%	50%	37%	66%	29%	57%	87%	50%	42%	69%	32%
(2, 20)	(0.01, 1.06)	1.90	370.40	22.06	55.37	19.59	16.65	30.00	15.02	3.90	6.87	3.19	10.02	16.81	8.85	3.78	6.21	3.08
				36%	91%	32%	51%	91%	46%	40%	70%	33%	53%	89%	47%	45%	73%	36%
(2, 25)	(0.01, 1.05)	2.00	370.40	19.84	56.14	18.01	15.57	30.36	14.23	4.23	7.19	3.57	9.61	17.05	8.61	4.09	6.47	3.43
				33%	93%	30%	47%	92%	43%	43%	74%	37%	51%	90%	46%	48%	76%	41%

<표 2> 다양한 관리도의 ATS_{δ} 비교 ($n_0 = 3, h_0 = 1.0, h_1 = 0.1$)

(δ_1, δ_2)			(0, 0)	(0.5, 0.0)			(0.5, 0.5)			(1.0, 0.0)			(1.0, 0.5)			(1.0, 1.0)		
FSSI $n_0 = 3, h_0 = 1.0$			370.40	60.69			32.87			9.77			18.91			8.47		
(n_1, n_2)	(h_1, h_2)	w	ALL	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI
(1, 4)	(0.01, 2.98)	0.43	370.40	52.78	45.26	38.72	29.35	25.93	23.38	7.00	4.01	2.90	16.72	14.25	12.72	6.37	3.82	2.81
				87%	75%	64%	89%	79%	71%	72%	41%	30%	88%	75%	67%	75%	45%	33%
(1, 5)	(0.01, 1.99)	0.67	370.40	46.46	46.43	34.59	26.80	26.32	21.69	5.49	4.28	2.55	15.19	14.49	11.81	5.14	4.05	2.49
				77%	77%	57%	82%	80%	66%	56%	44%	26%	80%	77%	63%	61%	48%	29%
(1, 8)	(0.01, 1.40)	1.06	370.40	33.85	49.13	26.32	21.81	27.37	18.19	3.85	4.94	2.43	12.45	15.15	10.11	3.73	4.63	2.38
				56%	81%	43%	66%	83%	55%	39%	51%	25%	66%	80%	54%	44%	55%	28%
(1, 10)	(0.01, 1.28)	1.22	370.40	28.60	50.35	22.76	19.59	27.87	16.53	3.61	5.28	2.58	11.34	15.46	9.38	3.53	4.91	2.52
				47%	83%	38%	60%	85%	50%	37%	54%	26%	60%	82%	50%	42%	58%	30%
(1, 12)	(0.01, 1.22)	1.33	370.40	24.82	51.30	20.15	17.88	28.26	15.23	3.61	5.55	2.79	10.53	15.70	8.83	3.53	5.14	2.72
				41%	85%	33%	54%	86%	46%	37%	57%	29%	56%	83%	47%	42%	61%	32%
(1, 15)	(0.01, 1.17)	1.46	370.40	20.92	52.38	17.44	15.97	28.71	13.79	3.78	5.88	3.13	9.69	15.99	8.27	3.69	5.42	3.04
				35%	86%	29%	49%	87%	42%	39%	60%	32%	51%	85%	44%	44%	64%	36%
(1, 20)	(0.01, 1.12)	1.61	370.40	17.24	53.64	14.93	14.03	29.26	12.38	4.25	6.30	3.69	8.94	16.34	7.82	4.12	5.76	3.56
				28%	88%	25%	43%	89%	38%	44%	65%	38%	47%	86%	41%	49%	68%	42%
(1, 25)	(0.01, 1.09)	1.72	370.40	15.50	54.52	13.84	13.08	29.65	11.78	4.76	6.61	4.23	8.69	16.60	7.75	4.59	6.01	4.05
				26%	90%	23%	40%	90%	36%	49%	68%	43%	46%	88%	41%	54%	71%	48%
(2, 4)	(0.01, 1.99)	0.67	370.40	53.97	46.43	40.54	29.73	26.32	23.94	7.13	4.28	3.03	16.92	14.49	13.02	6.47	4.05	2.93
				89%	77%	67%	91%	80%	73%	73%	44%	31%	90%	77%	69%	77%	48%	35%
(2, 5)	(0.01, 1.50)	0.96	370.40	48.85	48.37	37.91	27.59	27.07	22.88	5.68	4.75	2.70	15.60	14.96	12.43	5.30	4.46	2.63
				81%	80%	63%	84%	82%	70%	58%	49%	28%	83%	79%	66%	63%	53%	31%
(2, 8)	(0.01, 1.20)	1.38	370.40	38.41	51.69	31.61	23.54	28.43	20.42	3.97	5.67	2.45	13.28	15.81	11.19	3.83	5.24	2.40
				63%	85%	52%	72%	87%	62%	41%	58%	25%	70%	84%	59%	45%	62%	28%
(2, 10)	(0.01, 1.14)	1.53	370.40	33.72	52.94	28.40	21.71	28.96	19.12	3.65	6.07	2.51	12.34	16.15	10.59	3.55	5.57	2.46
				56%	87%	47%	66%	88%	58%	37%	62%	26%	65%	85%	56%	42%	66%	29%
(2, 12)	(0.01, 1.11)	1.63	370.40	30.12	53.84	25.83	20.26	29.34	18.01	3.56	6.37	2.63	11.62	16.40	10.10	3.47	5.82	2.57
				50%	89%	43%	62%	89%	55%	37%	65%	27%	62%	87%	53%	41%	69%	30%
(2, 15)	(0.01, 1.08)	1.75	370.40	26.17	54.80	22.90	18.56	29.77	16.68	3.62	6.72	2.86	10.83	16.68	9.54	3.53	6.10	2.78
				43%	90%	38%	57%	91%	51%	37%	69%	29%	57%	88%	50%	42%	72%	33%
(2, 20)	(0.01, 1.06)	1.90	370.40	22.06	55.86	19.81	16.65	30.26	15.17	3.90	7.13	3.25	10.02	17.00	8.96	3.78	6.43	3.15
				36%	92%	33%	51%	92%	46%	40%	73%	33%	53%	90%	47%	45%	76%	37%
(2, 25)	(0.01, 1.05)	2.00	370.40	19.84	56.56	18.18	15.57	30.59	14.35	4.23	7.42	3.63	9.61	17.22	8.70	4.09	6.66	3.49
				33%	93%	30%	47%	93%	44%	43%	76%	37%	51%	91%	46%	48%	79%	41%

<표 3> 다양한 관리도의 ATS_{δ} 비교 ($n_0 = 5, h_0 = 1.0, h_1 = 0.01$)

(δ_1, δ_2)		(0, 0)	(0.5,0.0)			(0.5,0.5)			(1.0,0.0)			(1.0,0.5)			(1.0,1.0)			
FSSI $n_0 = 5, h_0 = 1.0$		370.40	33.40			21.93			4.50			12.52			4.24			
(n_1, n_2)	(h_1, h)	w	ALL	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI
(1, 8)	(0.01, 2.32)	0.56	370.40	22.60	20.12	12.93	16.55	14.92	10.65	2.91	1.50	1.47	9.50	8.14	6.01	2.84	1.49	1.46
				68%	60%	39%	76%	68%	49%	65%	33%	33%	76%	65%	48%	67%	35%	34%
(1, 10)	(0.01, 1.79)	0.76	370.40	18.30	21.02	10.81	14.18	15.40	9.23	2.64	1.59	1.63	8.28	8.40	5.37	2.60	1.57	1.61
				55%	63%	32%	65%	70%	42%	59%	35%	36%	66%	67%	43%	61%	37%	38%
(1, 12)	(0.01, 1.57)	0.91	370.40	15.34	21.81	9.41	12.42	15.81	8.23	2.57	1.67	1.80	7.41	8.64	4.96	2.54	1.65	1.77
				46%	65%	28%	57%	72%	38%	57%	37%	40%	59%	69%	40%	60%	39%	42%
(1, 15)	(0.01, 1.40)	1.06	370.40	12.45	22.79	8.09	10.57	16.33	7.26	2.65	1.78	2.04	6.55	8.93	4.59	2.62	1.76	2.00
				37%	68%	24%	48%	75%	33%	59%	40%	45%	52%	71%	37%	62%	42%	47%
(1, 20)	(0.01, 1.26)	1.25	370.40	9.88	24.03	7.05	8.81	16.97	6.49	2.93	1.94	2.42	5.82	9.30	4.38	2.89	1.92	2.37
				30%	72%	21%	40%	77%	30%	65%	43%	54%	47%	74%	35%	68%	45%	56%
(1, 25)	(0.01, 1.20)	1.38	370.40	8.74	24.95	6.76	8.00	17.44	6.28	3.27	2.07	2.77	5.57	9.58	4.44	3.21	2.04	2.69
				26%	75%	20%	37%	80%	29%	73%	46%	62%	45%	77%	35%	76%	48%	64%
(2, 8)	(0.01, 1.99)	0.67	370.40	23.06	20.58	13.35	16.78	15.16	10.88	2.90	1.54	1.37	9.61	8.27	6.07	2.84	1.53	1.36
				69%	62%	40%	77%	69%	50%	65%	34%	30%	77%	66%	49%	67%	36%	32%
(2, 10)	(0.01, 1.59)	0.88	370.40	18.87	21.69	11.34	14.49	15.75	9.55	2.59	1.66	1.46	8.40	8.60	5.45	2.55	1.64	1.45
				57%	65%	34%	66%	72%	44%	58%	37%	32%	67%	69%	44%	60%	39%	34%
(2, 12)	(0.01, 1.42)	1.03	370.40	15.93	22.59	9.94	12.77	16.22	8.57	2.47	1.76	1.56	7.53	8.87	5.02	2.44	1.74	1.54
				48%	68%	30%	58%	74%	39%	55%	39%	35%	60%	71%	40%	57%	41%	36%
(2, 15)	(0.01, 1.30)	1.19	370.40	13.00	23.66	8.55	10.92	16.78	7.57	2.45	1.89	1.71	6.62	9.19	4.59	2.43	1.87	1.69
				39%	71%	26%	50%	77%	35%	55%	42%	38%	53%	73%	37%	57%	44%	40%
(2, 20)	(0.01, 1.20)	1.38	370.40	10.29	24.95	7.35	9.08	17.44	6.66	2.59	2.07	1.94	5.78	9.58	4.25	2.56	2.04	1.91
				31%	75%	22%	41%	80%	30%	58%	46%	43%	46%	77%	34%	60%	48%	45%
(2, 25)	(0.01, 1.15)	1.50	370.40	9.00	25.87	6.89	8.15	17.92	6.32	2.78	2.22	2.15	5.41	9.86	4.17	2.74	2.18	2.11
				27%	78%	21%	37%	82%	29%	62%	49%	48%	43%	79%	33%	65%	51%	50%
(3, 8)	(0.01, 1.66)	0.84	370.40	23.75	21.43	14.28	17.13	15.61	11.46	2.92	1.63	1.34	9.78	8.52	6.35	2.85	1.62	1.33
				71%	64%	43%	78%	71%	52%	65%	36%	30%	78%	68%	51%	67%	38%	31%
(3, 10)	(0.01, 1.40)	1.06	370.40	19.82	22.79	12.49	15.02	16.33	10.32	2.58	1.78	1.40	8.65	8.93	5.81	2.54	1.76	1.39
				59%	68%	37%	69%	75%	47%	57%	40%	31%	69%	71%	46%	60%	42%	33%
(3, 12)	(0.01, 1.28)	1.22	370.40	17.01	23.81	11.16	13.41	16.86	9.43	2.44	1.91	1.47	7.82	9.23	5.40	2.41	1.89	1.46
				51%	71%	33%	61%	77%	43%	54%	43%	33%	62%	74%	43%	57%	45%	34%
(3, 15)	(0.01, 1.20)	1.38	370.40	14.10	24.95	9.73	11.64	17.44	8.43	2.38	2.07	1.58	6.93	9.58	4.96	2.36	2.04	1.57
				42%	75%	29%	53%	80%	39%	53%	46%	35%	55%	77%	40%	56%	48%	37%
(3, 20)	(0.01, 1.13)	1.55	370.40	11.30	26.25	8.36	9.79	18.11	7.43	2.45	2.28	1.76	6.06	9.97	4.55	2.42	2.24	1.74
				34%	79%	25%	45%	83%	34%	55%	51%	39%	48%	80%	36%	57%	53%	41%
(3, 25)	(0.01, 1.10)	1.68	370.40	9.87	27.14	7.73	8.79	18.56	6.97	2.58	2.45	1.92	5.62	10.24	4.39	2.55	2.39	1.90
				30%	81%	23%	40%	85%	32%	58%	54%	43%	45%	82%	35%	60%	56%	45%
(4, 8)	(0.01, 1.33)	1.15	370.40	25.14	23.33	16.65	17.81	16.61	12.92	2.98	1.85	1.41	10.12	9.09	7.11	2.90	1.83	1.40
				75%	70%	50%	81%	76%	59%	66%	41%	31%	81%	73%	57%	68%	43%	33%
(4, 10)	(0.01, 1.20)	1.38	370.40	21.86	24.95	15.39	16.12	17.44	12.17	2.64	2.07	1.46	9.20	9.58	6.76	2.59	2.04	1.45
				66%	75%	46%	74%	80%	56%	59%	46%	33%	74%	77%	54%	61%	48%	34%
(4, 12)	(0.01, 1.14)	1.52	370.40	19.42	26.03	14.25	14.80	18.00	11.48	2.49	2.25	1.53	8.51	9.90	6.45	2.45	2.21	1.51
				58%	78%	43%	68%	82%	52%	55%	50%	34%	68%	79%	52%	58%	52%	36%
(4, 15)	(0.01, 1.10)	1.68	370.40	16.76	27.14	12.85	13.28	18.56	10.61	2.42	2.45	1.63	7.75	10.24	6.05	2.39	2.39	1.61
				50%	81%	39%	61%	85%	48%	54%	54%	36%	62%	82%	48%	56%	56%	38%
(4, 20)	(0.01, 1.07)	1.85	370.40	13.97	28.30	11.29	11.59	19.15	9.58	2.47	2.69	1.79	6.94	10.61	5.62	2.43	2.62	1.77
				42%	85%	34%	53%	87%	44%	55%	60%	40%	55%	85%	45%	57%	62%	42%
(4, 25)	(0.01, 1.05)	1.96	370.40	12.42	29.05	10.43	10.60	19.53	9.00	2.57	2.86	1.94	6.49	10.85	5.40	2.53	2.78	1.92
				37%	87%	31%	48%	89%	41%	57%	64%	43%	52%	87%	43%	60%	66%	45%

<표 4> 다양한 관리도의 ATS_{δ} 비교 ($n_0 = 5, h_0 = 1.0, h_1 = 0.1$)

(δ_1, δ_2)			(0, 0)	(0.5,0.0)			(0.5,0.5)			(1.0,0.0)			(1.0,0.5)			(1.0,1.0)		
FSSI $n_0 = 5, h_0 = 1.0$			370.40	33.40			21.93			4.50			12.52			4.24		
(n_1, n_2)	(h_1, h_2)	w	ALL	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI
(1, 8)	(0.1, 2.20)	0.56	370.40	22.60	21.33	13.81	16.55	15.61	11.25	2.91	1.77	1.60	9.50	8.58	6.36	2.84	1.75	1.59
				68%	64%	41%	76%	71%	51%	65%	39%	36%	76%	69%	51%	67%	41%	37%
(1, 10)	(0.1, 1.72)	0.76	370.40	18.30	22.15	11.50	14.18	16.04	9.72	2.64	1.85	1.72	8.28	8.82	5.66	2.60	1.83	1.70
				55%	66%	34%	65%	73%	44%	59%	41%	38%	66%	70%	45%	61%	43%	40%
(1, 12)	(0.1, 1.51)	0.91	370.40	15.34	22.86	9.95	12.42	16.41	8.65	2.57	1.93	1.87	7.41	9.02	5.20	2.54	1.90	1.84
				46%	68%	30%	57%	75%	39%	57%	43%	42%	59%	72%	42%	60%	45%	43%
(1, 15)	(0.1, 1.36)	1.06	370.40	12.45	23.75	8.49	10.57	16.87	7.59	2.65	2.03	2.09	6.55	9.28	4.78	2.62	2.00	2.06
				37%	71%	25%	48%	77%	35%	59%	45%	47%	52%	74%	38%	62%	47%	49%
(1, 20)	(0.1, 1.24)	1.25	370.40	9.88	24.88	7.31	8.81	17.44	6.71	2.93	2.17	2.46	5.82	9.61	4.52	2.89	2.14	2.41
				30%	75%	22%	40%	80%	31%	65%	48%	55%	47%	77%	36%	68%	50%	57%
(1, 25)	(0.1, 1.18)	1.38	370.40	8.74	25.72	6.94	8.00	17.87	6.45	3.27	2.29	2.81	5.57	9.86	4.54	3.21	2.25	2.74
				26%	77%	21%	37%	82%	29%	73%	51%	63%	45%	79%	36%	76%	53%	65%
(2, 8)	(0.1, 1.90)	0.67	370.40	23.06	21.75	14.24	16.78	15.83	11.48	2.90	1.81	1.51	9.61	8.70	6.43	2.84	1.79	1.50
				69%	65%	43%	77%	72%	52%	65%	40%	34%	77%	70%	51%	67%	42%	35%
(2, 10)	(0.1, 1.54)	0.88	370.40	18.87	22.75	12.02	14.49	16.35	10.04	2.59	1.91	1.56	8.40	8.99	5.75	2.55	1.89	1.55
				57%	68%	36%	66%	75%	46%	58%	43%	35%	67%	72%	46%	60%	45%	37%
(2, 12)	(0.1, 1.39)	1.03	370.40	15.93	23.57	10.48	12.77	16.77	8.99	2.47	2.01	1.64	7.53	9.23	5.26	2.44	1.98	1.62
				48%	71%	31%	58%	77%	41%	55%	45%	37%	60%	74%	42%	57%	47%	38%
(2, 15)	(0.1, 1.27)	1.19	370.40	13.00	24.54	8.95	10.92	17.27	7.89	2.45	2.13	1.77	6.62	9.52	4.78	2.43	2.09	1.75
				39%	74%	27%	50%	79%	36%	55%	47%	40%	53%	76%	38%	57%	49%	41%
(2, 20)	(0.1, 1.18)	1.38	370.40	10.29	25.72	7.61	9.08	17.87	6.89	2.59	2.29	2.00	5.78	9.86	4.39	2.56	2.25	1.97
				31%	77%	23%	41%	82%	31%	58%	51%	45%	46%	79%	35%	60%	53%	46%
(2, 25)	(0.1, 1.14)	1.50	370.40	9.00	26.56	7.08	8.15	18.29	6.49	2.78	2.43	2.21	5.41	10.11	4.29	2.74	2.38	2.17
				27%	80%	21%	37%	83%	30%	62%	54%	49%	43%	81%	34%	65%	56%	51%
(3, 8)	(0.1, 1.60)	0.84	370.40	23.75	22.52	15.14	17.13	16.23	12.03	2.92	1.89	1.48	9.78	8.92	6.70	2.85	1.87	1.47
				71%	67%	45%	78%	74%	55%	65%	42%	33%	78%	71%	54%	67%	44%	35%
(3, 10)	(0.1, 1.36)	1.06	370.40	19.82	23.75	13.16	15.02	16.87	10.78	2.58	2.03	1.51	8.65	9.28	6.09	2.54	2.00	1.49
				59%	71%	39%	69%	77%	49%	57%	45%	34%	69%	74%	49%	60%	47%	35%
(3, 12)	(0.1, 1.26)	1.22	370.40	17.01	24.68	11.69	13.41	17.34	9.82	2.44	2.15	1.56	7.82	9.56	5.64	2.41	2.11	1.55
				51%	74%	35%	61%	79%	45%	54%	48%	35%	62%	76%	45%	57%	50%	36%
(3, 15)	(0.1, 1.18)	1.38	370.40	14.10	25.72	10.13	11.64	17.87	8.74	2.38	2.29	1.66	6.93	9.86	5.15	2.36	2.25	1.64
				42%	77%	30%	53%	82%	40%	53%	51%	37%	55%	79%	41%	56%	53%	39%
(3, 20)	(0.1, 1.12)	1.55	370.40	11.30	26.90	8.63	9.79	18.47	7.66	2.45	2.49	1.83	6.06	10.21	4.69	2.42	2.43	1.80
				34%	81%	26%	45%	84%	35%	55%	55%	41%	48%	82%	37%	57%	57%	43%
(3, 25)	(0.1, 1.09)	1.68	370.40	9.87	27.71	7.92	8.79	18.87	7.14	2.58	2.63	1.98	5.62	10.46	4.50	2.55	2.57	1.96
				30%	83%	24%	40%	86%	33%	58%	59%	44%	45%	84%	36%	60%	61%	46%
(4, 8)	(0.1, 1.30)	1.15	370.40	25.14	24.25	17.42	17.81	17.12	13.40	2.98	2.09	1.55	10.12	9.43	7.41	2.90	2.06	1.54
				75%	73%	52%	81%	78%	61%	66%	47%	35%	81%	75%	59%	68%	49%	36%
(4, 10)	(0.1, 1.18)	1.38	370.40	21.86	25.72	15.98	16.12	17.87	12.56	2.64	2.29	1.57	9.20	9.86	7.00	2.59	2.25	1.56
				66%	77%	48%	74%	82%	57%	59%	51%	35%	74%	79%	56%	61%	53%	37%
(4, 12)	(0.1, 1.13)	1.52	370.40	19.42	26.70	14.72	14.80	18.37	11.80	2.49	2.45	1.61	8.51	10.15	6.64	2.45	2.40	1.60
				58%	80%	44%	68%	84%	54%	55%	55%	36%	68%	81%	53%	58%	57%	38%
(4, 15)	(0.1, 1.09)	1.68	370.40	16.76	27.71	13.21	13.28	18.87	10.86	2.42	2.63	1.70	7.75	10.46	6.22	2.39	2.57	1.68
				50%	83%	40%	61%	86%	50%	54%	59%	38%	62%	84%	50%	56%	61%	40%
(4, 20)	(0.1, 1.06)	1.85	370.40	13.97	28.77	11.53	11.59	19.41	9.77	2.47	2.85	1.86	6.94	10.79	5.74	2.43	2.77	1.83
				42%	86%	35%	53%	89%	45%	55%	63%	41%	55%	86%	46%	57%	65%	43%
(4, 25)	(0.1, 1.05)	1.96	370.40	12.42	29.45	10.61	10.60	19.75	9.15	2.57	3.01	2.00	6.49	11.00	5.50	2.53	2.91	1.97
				37%	88%	32%	48%	90%	42%	57%	67%	45%	52%	88%	44%	60%	69%	47%

-
- [3] Prabhu, S. S., Montgomery, D. C. and Runger, G. C.(1994), "A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval \bar{X} Control Scheme", Journal of Quality Technology, Vol. 26, No. 3, pp. 164-176.
- [4] Prabhu, S. S., Runger, G. C. and Keats, J. B.(1993), "An Adaptive Sample Size \bar{X} Chart", International Journal of Production Research, Vol. 31, No. 12, pp. 2895-2909.
- [5] Prabhu, S. S., Montgomery, D.C., Runger, G. C.(1997), "Economic-statistical Design of Adaptive \bar{X} Chart", International Journal of Production Economics, Vol. 49, No. 1, pp. 1-15.
- [6] Reynolds, M. R. Jr., Amin, R. W. and Arnold, J. C.(1988), " \bar{X} Charts with Variable Sampling Intervals", Technometrics, Vol. 30, No. 2, pp. 181-192.
- [7] Ross S. M.(1996), Stochastic Process (p. 189), 2nd Ed. John Wiley & Sons, Inc.
- [8] Runger, G. C. and Pignatiello, J. J.(1991), "Adaptive Sampling for Process Control", Journal of Quality Technology, Vol. 23, No. 2, pp. 135-155.
-