

◎ 논문

주기적인 온도를 갖는 두 수평 평판 사이에서의 자연 대류에서의 이례적인 분기 현상

유 주 식^{*1}, 김 용 진^{*2}

An Anomalous Bifurcation in Natural Convection between Two Horizontal Plates with Periodic Temperatures

Joo-Sik Yoo and Yong-Jin Kim

This study investigates the transition of flows in a natural convection problem with periodic wall temperatures of the form, $T_L = T_1 + \delta\Delta T \sin kx$ and $T_U = T_2 + \delta\Delta T \sin kx$. The fluid considered is air with $Pr=0.7$. In the conduction-dominated regime with a small Rayleigh number, two large cells are formed over one wave length, for all wave numbers. When $k \leq 1.8$, the flow becomes unstable with increase of the Rayleigh number, and multicellular convection occurs above a critical Rayleigh number. The flow patterns are classified by the number of eddies over one wave length, and several kinds of transition phenomena, such as 2→3→4, 4→3→2, and 2→4 eddy flow, occur with increase (or decrease) of the Rayleigh number. Dual solutions are found above a critical Rayleigh number, and an anomalous bifurcation is observed.

Key Words: 자연 대류(Natural Convection), 천이(Transition), 분기(Bifurcation), 이중해(Dual Solutions)

1. 서 론

본 연구에서는 일정한 온도 차이를 가지고 있는 Rayleigh-Benard 문제[1]에 같은 형태의 작은 불균일 온도($\delta\Delta T \sin kx$)가 상하 벽면에 가미되었을 때 일어나는 자연 대류 현상을 조사한다. Fig. 1과 같이 아래와 위 벽면은 각각 $T_L = T_1 + \delta\Delta T \sin kx$, $T_U = T_2 + \delta\Delta T \sin kx$ 의 온도 분포를 가지고 있다. 이와 같은 주기적인 경계 조건을 갖는 문제로는 두 판의 형태가 길이 방향으로 정현적(sinusoidal)이거나 삼각과 등과 같이 물결 모양을 이루는 판에서의 자연 대류 혹은 강제 대류에 대한 연구가 수행

되었다[2-5]. 그런데 이러한 문제에 있어서는 벽면의 온도가 늘 일정하다고 하였으며 주로 정상 상태의 대류 현상을 조사하였다.

주기적인 온도 분포를 갖는 시스템에 대한 연구로는 Patankar 등[6]과 Yoo and Kim[7]의 연구가 있다. Patankar 등[6]은 축 방향으로 정현적인 온도 분포를 갖는 관 내에 충분히 발달된 강제 대류가 있을 때의 열전달 문제에 대한 연구를 하였다. 그리고 Yoo and Kim[7]은 평균 온도 차이가 없는 두 벽면이 주기적인 온도 분포를 갖고 있을 때 일어나는 자연 대류 현상을 조사하였다.

한편 주기적인 불균일 벽면 온도를 갖는 다공성 매질(porous medium)에서의 대류에 관한 연구로는 Paulikakos and Bejan[8], Bradean 등[9], Yoo[10], Yoo and Schultz[11]의 연구가 있다. Paulikakos and

* 2004년 6월 17일 접수

*1 정희원, 안동대학교, 기계교육과

*2 한국기계연구원, 열유체환경연구부

Bejan[8], Bradean 등[9]은 주기적으로 가열되고 냉각되는 수평 평판을 가진 반 무한 다공성 매질에서의 대류를 조사하였다. 그리고 Yoo[10]와 Yoo and Schultz[11]는 다공성 매질에서 평균온도 차이가 없는 두 벽면이 정현적인 온도 분포를 가지고 있을 때의 유동을 작은 Rayleigh 수에 대한 점근적인 해를 구하여 조사하였다.

본 연구에서 고려하는 시스템은 Fig. 1과 같이 두 벽면이 서로 다른 평균 온도를 갖고 주기적으로 변화하는 온도 분포를 갖고 있다. 유동장은 벽면 온도와 같은 공간적인 주기를 가지므로 파장(wave length) $2\pi/k$ 는 시스템의 종횡비 (가로/세로)에 해당된다. 여기에서는 $k > 1$ 의 범위에서 조사하는데, $2\pi/k \approx 2, 4$ 가 되는 $k=3.14, 1.5$ 에 대해 중점적으로 조사한다. 한편 벽면 온도의 진폭 $\delta=0.1$ 이며 Prandtl 수는 0.7(공기)이다. 본 연구에서 관심을 갖는 것은 Rayleigh 수에 따른 유동의 천이 현상인데, 일반적으로 나타나는 분기 현상과는 다른 특이한 현상이 관찰되었다.

2. 해 석

두 개의 수평 평판 사이에 유체가 채워져 있으며, 두 벽면은 작은 진폭을 갖고 정현적으로 변화하는 불균일 온도 분포를 가지고 있다(Fig. 1). Boussinesq 근사 하에서 부력 항에서만 유체의 밀도 변화를 고려하고 다른 물성치들은 모두 일정하다고 가정한다. 에너지 방정식에서 점성 소산(dissipation)도 역시 무시한다. 이와 같은 가정 하에서 질량, 운동량과 에너지에 대한 보존 방정식[12]을 특성 길이, 시간, 속도, 압력 및 온도를 각각 $H, H^2/x, x/H, \rho_0 x^2/H^2, \Delta T$

로 택하여 무차원화시킨다. 흐름 함수(Ψ)와 와도(ω) 및 온도(θ)로써 표현되는 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\Psi, \omega) + Pr \nabla^2 \omega + Pr Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (1)$$

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = J(\Psi, \theta) + \nabla^2 \theta \quad (3)$$

여기에서 $Pr = \nu/\alpha$, $Ra = ag\Delta TH^3/\alpha\nu$ 는 각각 Prandtl 수와 Rayleigh 수를 나타내며, Jacobian과 Laplacian은 다음과 같이 정의된다.

$$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \quad (4)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (5)$$

그리고 벽면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y=0, 1 \quad (6)$$

$$\theta = 1 + \delta \sin kx \quad \text{at } y=0 \quad (7)$$

$$\theta = \delta \sin(kx) \quad \text{at } y=1 \quad (8)$$

수평 방향으로는 다음과 같은 주기적인 조건이 흐름 함수 Ψ 와 와도 ω 및 온도 θ 에 대해 적용된다.

$$F(x, y, t) = F\left[x + \frac{2\pi}{k}, y, t\right], \quad F = \Psi, \omega, \theta \quad (9)$$

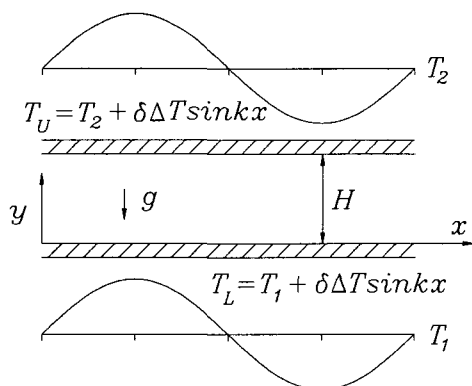


Fig. 1 Definition sketch.

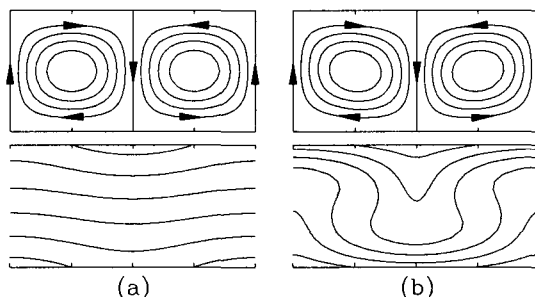


Fig. 2 Streamlines and isotherms at $k=3.14$: (a) $Ra=100$; (b) $Ra=5000$. The domain of x is $\pi/2k \leq x \leq 5\pi/2k$.

x 방향으로 $2\pi/k$ 의 주기를 가지므로 벽면에서의 평균 Nusselt 수를 다음과 같이 정의한다.

$$\overline{Nu} = -\frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} \frac{\partial \theta}{\partial y} dx \text{ at } y=0,1 \quad (10)$$

식 (1)-(9)의 해는 Napolitano and Quartapelle [13]가 제안한 Block ADI 방법을 써서 구한다.

x 방향으로서는 균일한 격자계를 사용하고, y 방향으로서는 벽면 부근의 얇은 경계층을 분해하기 위하여 다음과 같은 좌표 확장을 이용한다.

$$y = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\tanh(B(2\eta-1))}{\tanh(B)} \right], \quad B=1.5 \quad (11)$$

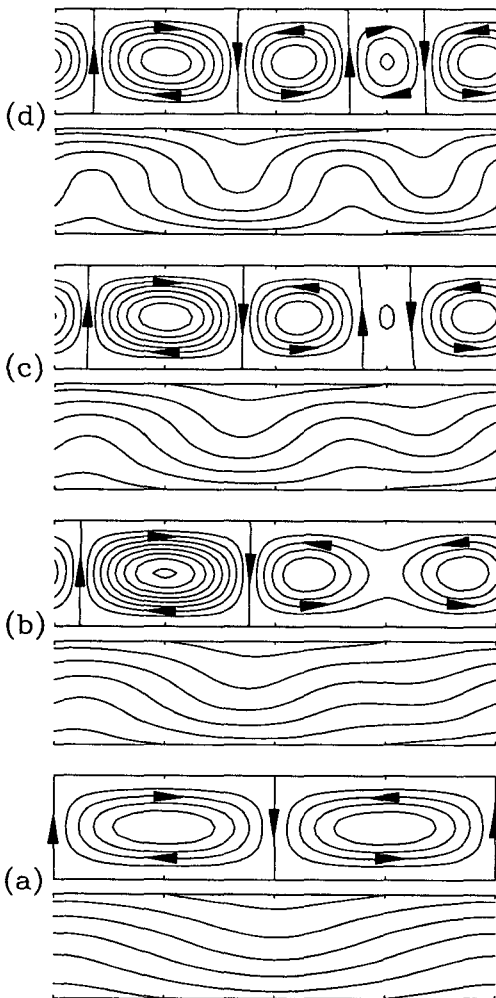


Fig. 3 Variation of flow patterns (streamlines, isotherms) with respect to Rayleigh number at $k=1.5$: (a) $Ra=1950$; (b) $Ra=1980$; (c) $Ra=2100$; (d) $Ra=3000$. The domain of x is $\pi/2k \leq x \leq 5\pi/2k$.

여기에서 사용한 격자계는 (81×25) 이다. 이것은 여러 가지의 격자계를 시험한 다음 충분하다고 생각되는 것을 택한 것이다. 예를 들어 $k=1.5$, $Ra=5000$ 인 경우, (41×15) , (81×25) , (121×45) 에서의 $(\overline{Nu}, \psi_{\max})$ 의 값은 각각 $(1.830, 5.716)$, $(1.828, 5.514)$, $(1.827, 5.440)$ 이다.

3. 결과 및 논의

먼저 3.14인 경우에 대해 $Ra=100, 5000$ 에서의 유동장을 Fig. 2에 도시하였다. 이 경우는 종횡비 (aspect ratio)가 $2\pi/k \approx 2$ 가 된다. 벽면 온도가 일정한 표준적인 Rayleigh-Benard 문제인 경우, 비록 부력에 의한 불안정성이 언제나 존재하지만 임계 Rayleigh 수 ($Ra_{c,B}=1708$) 이하에서는 유체의 점성력에 의해 정지 상태를 유지한다. 그러나 본 문제에서는, 벽면에서의 수평 방향의 온도 구배에 의해 정지 상태가 존재하지 않고, 아주 작은 Rayleigh 수에서도 Fig. 2(a)와 같은 유동이 일어난다. $k=3.14$ 인 경우에는 Rayleigh 수가 증가하여도 유동장은 전도 상태와 같이 2개의 소용돌이를 갖는 형태를 유지한다 (Fig. 2(b)). 한편 전도 영역의 등온선은 Fig. 2(a)와 같이 거의 수평으로 놓여진다. 그러나 큰 Rayleigh 수에서는 상대적으로 강한 대류가 형성됨으로 인하여 등온선의 모습은 Fig. 2(b)와 같이 크게 달라진다.

모든 파동수에 대해, 전도 영역에서의 유동은 Fig. 2(a)와 같이, 아래 벽면의 온도가 가장 큰 $kx = \pi/2$ 부근의 유체는 위로 올라가고, 가장 작은 $kx = 3\pi/2$ 부근에서는 내려가는 모양을 갖는 두 개의 소용돌이 (eddy)를 형성한다. 파동수가 큰 경우 ($1.9 \leq k \leq 3.5$)에는 Rayleigh 수가 증가하여도 이와 같이 두 개의 소용돌이를 갖는 유동장이 유지된다. 그러나 $k \leq 1.8$ 에서는 Rayleigh 수가 어떤 임계치를 넘어서면 더 많은 수의 소용돌이를 갖는 유동이 일어난다.

Fig. 3에는 $k=1.5$ 일 때의 Rayleigh 수의 증가에 따른 유동장의 변화 양상을 도시하였다. Rayleigh 수가 증가하여도 $Ra=1950$ 까지 $k=$ 는 Fig. 3(a)와 같이 2개의 소용돌이를 갖는 전도 상태가 유지된다. 그러나 $1960 \leq Ra \leq 2010$ 에서는 같은 방향으로 회전하는 두 개의 소용돌이가 하나의 큰 셀 내에 형성된다

(Fig. 3(b)). $Ra_{c,1} \approx 1960$ 에서 전도 상태가 깨어진 후에는 Ra 의 증가에 따라 작은 소용돌이가 빠르게 분리되기 시작하며, 곧 이어 $Ra \geq 2020$ 에서는 반대 방향으로 회전하는 하나의 새로운 셀이 두 개의 소용돌이 사이에 생성되어 같은 방향으로 회전하는 두 소용돌이는 완전히 분리된다 (Fig. 3(c)).

Fig. 3의 (a), (b), (c-d)는 한 파장 내에서 각각 2, 3, 4개의 소용돌이를 보여주고 있다. 앞으로 이와 같은 유동을 각각 2, 3, 4 eddy 유동으로 부르기로 하겠다. 유동의 형태를 이와 같이 소용돌이의 수로 분류할 때, Fig. 3(a-d)는, Rayleigh 수의 증가에 따라 전도 영역의 2 eddy 유동으로부터, 차례로 3, 4 eddy 유동으로 천이하는 과정을 보여주고 있다. 그런데 본 연구에서 흥미 있는 것은, 어떤 임계치 이상의 큰 Rayleigh 수에서는 전도 영역의 2 eddy 유동을 초기치로 사용하면, Rayleigh 수의 증가에 따라 얻어지는 4 eddy 유동과는 다른 2 eddy 유동이 동시에 구해진다는 것이다.

Fig. 4에는 이와 같은 유동의 분기 현상을 도시하였다. 관찰된 현상은 다음과 같다. 작은 Rayleigh 수인 $Ra \leq 1950$ 에서는 2 eddy 유동이 존재한다. 그러나 Rayleigh 수의 증가와 함께 $Ra_{c,1} \approx 1960$ 에서 3 eddy 유동으로의 천이가 일어난다. 3 eddy 유동은 $1960 \leq Ra \leq 2010$ 에서 존재하며, $Ra_{c,2} \approx 2020$ 에서 4 eddy 유동으로의 천이가 일어난 후 $Ra \geq 2020$ 에서는 Rayleigh 수를 증가시켜도 4 eddy 유동이 유지된다. 한편 큰 Ra 에서 구해진 4 eddy 유동으로부터 출발하

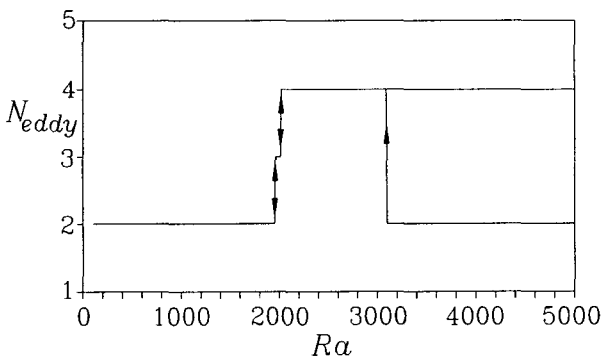


Fig. 4 Bifurcation diagram showing the solution branches at $k=1.5$. The flow patterns are classified by the number of eddies over one wave length.

여 Ra 를 감소시키면, 차례로 3, 2 eddy 유동으로의 역천이(reverse transition)가 일어난다.

이상에서 설명한 천이 과정은, Rayleigh 수의 증가(감소)에 따라 2→3→4 eddy 유동(4→3→2 eddy 유동)으로의 순차적인 천이 과정을 보여주고 있다. 이와 같은 유동의 천이 현상은 다수 셀 대류(multicellular convection)가 일어날 때 일반적으로 나타나는 현상이다. 그런데 여기에서 흥미 있는 것은, $Ra \geq 3100$ 에서는 3 eddy 유동을 거치지 않고 가장 아래 분지(branch)의 2 eddy 유동을 곧바로 초기치로 사용하면, 3 eddy 유동을 초기치로 사용할 때 나타나는 4 eddy 유동이 구해지지 않고 2 eddy 유동이 구해진다는 것이다. 이렇게 하여 Fig. 4에서 보이는 것과 같이, $Ra \geq 3100$ 에서는 2 eddy 유동과 4 eddy 유동이 함께 존재한다. Fig. 5에는 $Ra=5000$ 에서의 이와 같은 이중해(dual solutions)를 도시하였다. 한편 Rayleigh 수를 감소시키면 2 eddy 유동으로부터 4 eddy 유동으로의 천이가 일어난다(Fig. 4). 그러나 4 eddy 유동으로부터 2 eddy 유동으로의 천이는 일어나지 않는다. 이와 같이 한쪽 방향으로만 일어나는 천이 현상은 환형 공간에서의 자연대류에서 발견된 현상과 유사하다. 환형 공간에서의 공기의 자연 대류에서는, Ra 의 감소와 함께 2 셀 유동으로부터 1 셀 유동으로의 천이가 일어난다. 그러나 낮은 Ra 에서 출

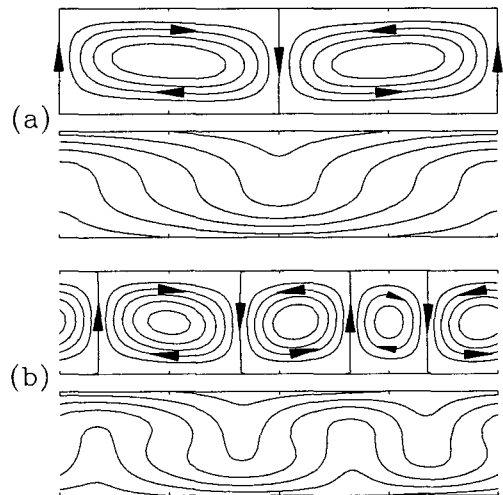


Fig. 5 Dual solutions at $k=1.5$ with $Ra=5000$. The flows of (a) and (b) have 2 and 4 eddies over one wave length, respectively. The domain of x is $\pi/2k \leq x \leq 5\pi/2k$.

발하여 Ra를 증가시켜도 1 셀 유동으로부터 2 셀 유동으로의 천이는 일어나지 않는다[14]. 그런데 본 문제에서는, Rayleigh 수의 감소에 따라 작은 수의 셀을 갖는 대류(2 eddy)로부터 많은 수의 셀을 갖는 대류(4 eddy)로의 천이가 일어난다는 것이 또한 흥미로운 사실이다.

끝으로 Fig. 6과 7에는 $k=3.14$ 와 $k=1.5$ 에서의 Rayleigh 수에 따른 평균 Nusselt 수의 거동을 도시하였다. 큰 Rayleigh 수에서도 전도 영역과 비슷한 유동 형태를 유지하는 $k=3.14$ 인 경우에는 Rayleigh

수에 따라 매끈한(smooth)한 Nusselt 수의 증가가 일어난다. 그러나 전도 영역의 유동과는 다른 형태의 유동으로의 천이가 일어나는 $k=1.5$ 인 경우에는, 천이점 부근에서 상대적으로 급격한 Nusselt 수의 증가가 일어난다. 한편 이중해의 영역에서는, 4 eddy 유동이 2 eddy 유동에 비해 언제나 큰 Nusselt 수를 갖는다. Fig. 7에서 $(\overline{Nu}_{4 \text{ eddy}} - \overline{Nu}_{2 \text{ eddy}}) / \overline{Nu}_{4 \text{ eddy}}$ 의 값은 약 0.12~0.16에 있다.

4. 결 론

서로 다른 평균 온도와 같은 형태의 작은 불균일성 ($\delta \Delta T \sin kx$)을 갖는 두 수평 평판 사이에서 일어나는 정상 상태의 공기($Pr=0.7$)의 자연 대류 현상을 조사하였다. 모든 파동수(k)에 대해, 전도가 지배적인 작은 Rayleigh 수에서는 한 주기에 걸쳐 두 개의 큰 셀(cell)을 갖는 유동이 일어난다. Rayleigh 수가 증가하여도 $1.9 \leq k \leq 3.5$ 에서는 전도 영역과 같은 형태의 유동장이 유지된다. 그러나 $k \leq 1.8$ 에서는 Rayleigh 수가 어떤 임계치를 넘어서면 더 많은 수의 소용돌이를 갖는 유동이 일어난다. 유동의 형태를 한 파장($\lambda = 2\pi/k$)에서 형성되는 소용돌이(eddy)의 수로써 분류할 때, $k=1.5$ 인 경우에는, Rayleigh 수의 증가 혹은 감소와 함께, 2→3→4, 4→3→2, 2→4 eddy 유동으로의 천이가 일어난다. 그러나 4→2 eddy 유동으로의 천이는 일어나지 않는다. $k=1.5$ 에서는 이와 분기 현상에 의해 어떤 임계치 이상의 큰 Rayleigh 수에서는 이중해가 존재한다. 이중해가 존재할 때, 모든 Rayleigh 수에서 4 eddy 유동이 2 eddy 유동보다 큰 평균 Nusselt 수를 갖는다.

참고문헌

- [1] Busse, F.H., Transition to Turbulence in Rayleigh- Bénard Convection. In Topics in Applied Physics, Vol. 45, Edited by H.L. Swinney and J.P. Gollub. Springer-Verlag, (1981), pp. 97-137.
- [2] Watson, A. and Poots, G., "The effect of sinusoidal protrusions on laminar free convection between vertical walls," J. Fluid Mech., Vol. 49, (1971), pp. 33-48.

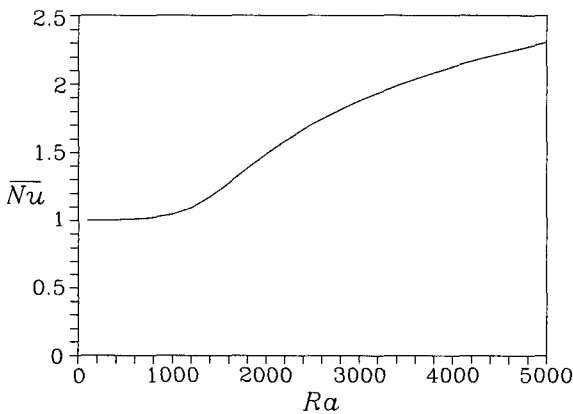


Fig. 6 Mean Nusselt number as a function of Rayleigh number at $k=3.14$.

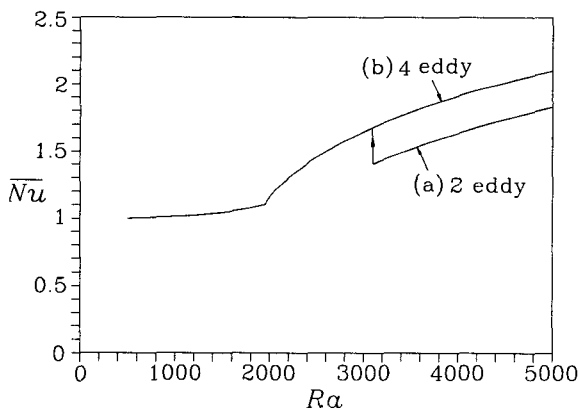


Fig. 7 Mean Nusselt number as a function of Rayleigh number at $k=1.5$. In the region of dual solutions, the curves (a) and (b) represent \overline{Nu} of the 2 and 4 eddy flows, respectively.

- [3] Sparrow, E.M. and Charmchi, M., "Heat transfer and fluid flow characteristics of spanwise-periodic corrugated ducts," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 23, (1980), pp. 471-481.
- [4] Faghri, M., and Asako, Y., "Periodic, fully developed, natural convection in a channel with corrugated confining walls," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 29, (1986), pp. 1931-1936.
- [5] Asako, Y., Nakamura, H. and Faghri, M., "Heat transfer and pressure drop characteristics in a corrugated duct with rounded corners," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 31, (1988), pp. 1237-1245.
- [6] Patankar, S.V., Liu, C.H. and Sparrow, E.M., "The periodic thermally developed regime in ducts with streamwise periodic wall temperature or heat flux," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 21, (1978), pp. 557-566.
- [7] Yoo, J.-S. and Kim, M.-U., "Two- Dimensional Convection in a Horizontal Fluid Layer with Spatially Periodic Boundary Temperatures," *Fluid Dynamics Research*, Vol. 7, (1991), pp. 181-200.
- [8] Poulikakos, D. and Bejan, A., "Natural convection in a porous layer heated and cooled along one vertical side," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 27, (1984), No. 10, pp. 1879-1891.
- [9] Bradean, R., Ingham, D.B., Heggs, P.J. and Pop, I., "Buoyancy-induced flow adjacent to a periodically heated and cooled horizontal surface in porous media," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, (1996), No. 3, pp. 615-630.
- [10] Yoo, J.-S., "Thermal convection in a vertical porous slot with spatially periodic boundary temperatures: low Ra flow," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, (2003), pp. 381-384.
- [11] Yoo, J.-S. and Schultz, W.W., "Thermal convection in a horizontal porous layer with spatially periodic boundary temperatures: small Ra flow," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, (2003), pp. 4747-4750.
- [12] Drazin, P. and Reid, W., *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, 1982.
- [13] Napolitano, M. and Quartapelle, L., *Block ADI Methods for steady natural convection in two dimensions*, in *Numerical Methods in Heat and Mass Transfer Vol. 3*, John Wiley and Sons, 1985.
- [14] Yoo, J.-S., "Prandtl Number Effect on Bifurcation and Dual Solutions in Natural Convection in a Horizontal Annulus," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, (1999), pp. 3275-3286.