

◎ 논문

물질신장 사상법에 의한 혼합효과의 정량화

서 용 권*

Quantification of the Mixing Effect by Using the Method of Material-Stretching Mapping

Y. K. Suh

In this study a stretching-mapping method is proposed for calculating the materials' stretching exponents, which are to be used in quantification of the mixing effect. In this method, the mapping tensor associated with the deformation of each fluid material is first obtained. Then deformations of a lot of materials are obtained by applying the mapping tensor. The local stretching rates and their space-average values are next computed with the mapped deformations. Application to a simple time-periodic flow within a cavity shows that the method is indeed effective compared with the conventional method; i.e. the mapping method is fast and yields the same results as the conventional one.

Key Words: 물질신장(Material Stretching), 사상텐서(Mapping Tensor), 혼돈적 교반(Chaotic Stirring), 물질신장 지수(Material-Stretching Exponent)

1. 서 론

유체혼합은 유체유동에 의해 발생된다. 따라서 유체유동이 1차적이고 혼합은 그에 수반되는 2차적 부산물로 생각할 수 있다. 경우에 따라서는 그러나 유체유동 그 자체보다는 혼합이 더 중요시된다. 예를들면, 화학공정에서 탱크 내 서로 다른 두 유체를 교반하는 경우, 스크류 압출기 내에서 색상이 서로 다른 두 물질을 골고루 혼합시키는 경우, 생체 배양기(bioreactor) 내에서 세포와 영양액의 접촉의 빈도를 높이기 위한 혼합, 마이크로 채널 내 낮은 레이놀즈 수 흐름에서 두 유체를 혼합시키는 경우 등등과 같다.

1980년 중반 이전의 유체혼합에 대한 연구는 다분히 수동적이었다. 즉 유체유동이 주어지고 그에 따라 나타나는 혼합효과를 분석하는 정도이다. 그러

다가 1984년 Aref[1]가 비선형 동역학 혹은 혼돈의 개념을 혼합에 응용하면서 이 분야의 연구는 획기적인 전환을 맞이하였다. 교반(Aref는 혼합과 교반의 개념을 달리 적용하였다. 즉 교반은 물질의 분자적 확산을 전혀 고려하지 않은 것을 말하고 혼합은 여기에 분자적 확산을 고려한 것을 의미한다고 하였다. 그러나 본 연구에서는 분자적 확산은 고려하지 않으며 따라서 혼합과 교반의 차이는 없다)이 잘 되는 이유는 물질의 늘임-접힘(stretching-folding)의 원리에 의한 것이며 이러한 양상은 곧 수학자들이 즐겨 다루는 비선형 동역학에서의 단순한 사상으로 설명할 수 있다는 것이다. 이에 따라 Poincare 단면법이나 Liapunov 지수 등의 개념을 혼합에 이용하는 계기가 되었고 이후 Ottino[2]는 종래의 혼합에 대해 즐겨 다루던 개념인 물질변형(material deformation)을 이러한 도구들과 연계시키는 데 힘썼다. 이제는 이러한 도구들을 사용함으로써 혼합에 대한 보다 능동적인 연구가 가능하게 되었다. 즉 혼

* 2004년 8월 10일 접수

* 정희원, 동아대학교 기계공학과

합기를 설계할 때 이러한 개념을 미리 적용하여 설계기간을 단축시킬 수 있는 가능성이 보이며, 경우에 따라서는 혼합효과를 제어할 수도 있는 가능성도 보이고 있다.

Aref[1] 이후 혼돈동역학 이론을 교반특성 해석에 적용하는 연구가 단순한 유동 모델(유동해를 간단한 수학적함수로 표현가능한 유동)에 대해 매우 활발하게 수행되었다. Aref 이후 1990년까지의 이러한 연구 성과에 대해서는 Ottino[3]의 리뷰 논문에서 확인할 수 있다. 한편, 서[4]는 이러한 단순 유동모델에서 벗어나 실제의 유동모델을 대상으로 그것도 레이놀즈 수가 수백정도인 현실적인 경우에 대해 이러한 비선형 동역학 도구들을 적용한 사례를 발표하였다. 또한 양호한 혼합은 양호한 열전달로 이어진다는 사실을 역시 실제 유동에 대한 열전달 해석으로 확인하였다[5]. 혼합특성 해석을 위한 수치해석에서 입자의 운동방정식 적분은 핵심이 된다. 이러한 점에서, 2차원 유동의 표준 모델인 Driven-Cavity 유동의 경우 구석에서의 특이성은 장시간의 입자궤적 추적에 큰 걸림돌이 된다. 이러한 점을 서[6]는 심층적으로 분석하고 그 해결책을 제시한 바 있다. 스크류를 사용한 사출성형 혹은 압출성형에서 유체의 유동은 매우 낮은 레이놀즈 수의 흐름이므로 교반이 잘 되지 않는 문제점이 있다. 이러한 유동에 대해서 등[7]은 엇갈림형 스크류를 사용한다면 교반특성이 획기적으로 좋아질 것임을 예측하고 관련 연구를 수행한 바 있다. 이와 유사하지만 구조가 다소 다른 압출용 스크류의 경우에 대해서는 Hwang 등[8]이 실험과 수치해석을 통해 연구하였다.

날로 발전하는 CFD 도구의 활용은 혼합분야에서도 예외가 될 수 없다. Lamberto 등[9]은 교반용 탱크 내 3차원 유동에 대해 유동해석은 FLUENT로 하고 혼합특성 해석을 위한 입자궤적 추적은 별도의 수치해석 코드로 계산한 바 있다. 이 연구에서는 초기에 수천 개의 입자를 유동장 내에 분포시킨 뒤 그 궤적을 운동방정식의 적분으로 구하고 있다. 비슷한 유동 모델에 대해 Zale 등[10]은 상용코드 ORCA CFD로 혼합특성을 분석하였다. 여기서는 60,000 개의 입자를 유동장에 위치시킨 뒤 이후 몇 백 주기 동안의 궤적으로부터 혼합특성을 조사하였다. 또한 Muzzio 등[11]과 Cerbelli 등[12]은 혼돈적 교반에 따른 미세구조를 가시화하기 위한 수치해석

적 방안으로서 ICA (Interfacial Contact Area)법이라는 방법을 개발하였다. 이 방법에서는 주어진 유동역을 격자망으로 분할한 뒤 어떤 선분요소가 시간과 더불어 늘어날 때 각 셀에 찾아드는 선분의 총 길이의 밀도분포로써 지역마다 서로 다른 물질신장 효과를 파악하는 것이다. 그러나 이들 연구에서는 혼합효과를 나타내는 정량적 수치의 제시는 없다. 한편, 입자궤적의 추적에 소요되는 계산시간이 실제적으로 매우 커지는 문제점을 해결하기 위하여 사상법(mapping method [13]) 혹은 확장사상법(extended mapping method [14, 15])을 개발하여 적용한 사례도 있다. 여기서 말하는 사상법이란 주어진 공간을 역시 균일한 격자망으로 분할하고 변형전의 격자망과 한 주기 후 변형한 뒤의 격자망을 겹쳤을 때 변형전의 i 번 째 셀에 변형 후의 j 번 째 셀의 면적이 얼마만큼 침투하였는지를 정량화한 사상행렬(mapping matrix) $\Psi_{i,j}$ 을 사용하는 방법을 의미한다. 이에 따라 초기에 어떠한 형태의 물질이 놓여져 있다면 이 물질이 어떻게 분산되는가를 이 물질의 농도분포변화로써 추적할 수 있으며, 이 때 이 사상행렬을 적용함으로써 농도분포의 변화를 간단히 계산할 수 있다는 원리이다. 확장사상법에서는 여기에 농도뿐만 아니라 물질의 계면정보(예로서 수직 벡터)도 같이 추적하는 방법을 일컫는다. 그러나 이 방법의 가장 큰 단점은 사상행렬의 계산에 많은 시간이 소요된다는 점이다; 낮은 레이놀즈 수에서의 극히 간단한 2차원 유동장에 대해서도 워크스테이션으로 10시간 이상이 필요하다고 보고하고 있다. 이와 유사한 방법이 Guer and Schall[16]에 의해 제안되어 몇 가지 단순한 유동장에 대해 적용된 연구 결과도 보고되었다. 여기서도 이러한 방법의 실용상에 있어서 유사한 문제점이 예상되는 것으로 보고되었다.

이들 연구의 성과들을 면밀히 검토하고 그 결과를 종합해 볼 때 아직도 CFD에 의한 혼합효과를 정량화하고 분석하는 일은 많은 문제점이 있고 연구할 여지가 많음을 알 수 있다. 우선, 단순한 2차원 유동인 경우에도 물질의 궤적을 직접 추적하는 데는 상당한 계산시간이 소요된다. 결국 이들 궤적으로부터 혼합효과가 구해지기 때문에 보다 효과적인 계산방법이 요구되고 있다. 다음으로는 혼합효과의 지역별 차이를 효과적으로 보이고 정량화할 수

있는 도구가 없다는 점이다. 물론 앞에서 사상법이나 확장사상법이라는 것이 이를 위한 도구로 제안되었으나 사상행렬의 계산에 매우 긴 시간이 요구되고 있기 때문에 3차원 유동과 같은 실제 혼합문제로 적용하기에는 무리다.

본 연구에서는 이러한 문제를 극복하기 위하여 물질신장 사상법을 개발하였으며 이를 적용할 때 계산시간의 현격한 단축이 가능함을 제시하고자 한다. 더불어 이를 통해 구해진 결과는 원래의 방법(즉 물질의 이동과 변형을 직접수치모사하는 방법)으로 구한 것과 거의 동일하기 때문에 앞으로 이 분야의 연구나 혼합기 설계에 매우 유용하게 적용될 수 있을 것으로 판단된다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 취급대상 유동장의 정의와 더불어 물질신장의 기본 개념과 그것의 혼합효과와의 관계에 대해 살펴보고, 3장에서는 본 연구를 통해 개발한 물질신장 사상법으로 물질 신장지수를 구하는 과정에 대해 설명한다. 4장에서는 이를 적용한 수치해석 결과를 제시하며, 이로부터 검토된 결론은 5장에서 요약하여 제시한다.

2. 물질신장과 혼합

본 연구의 대상 유동은 비정상 유동이되 시간주기적인 유동이나 정상유동이되 공간적으로 주기적인 유동 등이다. 예로서 (x, y) 공간 내의 시간주기적인 2차원 유동

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, t) = u(\acute{x}, y, t+T) \\ v &= v(x, y, t) = v(x, y, t+T) \end{aligned} \quad (1)$$

혹은 (x, y, z) 공간 내의 공간주기적인 3차원 정상 유동

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z) = u(x, y, z+L) \\ v &= v(x, y, z) = v(x, y, z+L) \\ w &= w(x, y, z) = w(x, y, z+L) \end{aligned} \quad (2)$$

을 들 수 있다. 단, 위 식에서 t 는 시간, u, v, w 는 각각 x, y, z 방향의 속도성분을 나타내며, 식 (1)에서 T 는 2차원 유동의 시간 주기를 나타내고, 식 (2)에서 L 은 3차원 유동의 공간 주기를 나타낸다. 설명의 편의를 위해 본 논문에서는 (1)의 경우만을 다루기로 한다.

본 논문에서 말하는 ‘물질신장’(material stretching)

이란 초기에 어떠한 유한한 길이의 선분이 시간과 더불어 늘어지는 것을 말하며, 이를 구하는 이유는 이를 바탕으로 얻어지는 물질신장 지수(material-stretching exponent)를 혼합효과의 지표로 사용하기 위해서이다. 물질신장은 결국 유체입자의 궤적으로부터 얻어질 수 있다. 어떠한 비정상 2차원 유동장 (1)에 대해 유체입자의 궤적은

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, t) \quad (3a)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, t) \quad (3b)$$

에 의해 구해진다. 여기서 $x(t), y(t)$ 는 입자의 위치를 나타내는 공간 좌표로서 시간의 함수이다.

식 (3a), (3b)는 유체 입자의 연속적인 이동을 표현하는 식이다. 주어진 유동장이 시간주기적이므로 입자의 위치변동을(따라서 물질변형을) Poincare 단면에서 검토하는 것이 타당하다. 우선, Poincare 단면을 매시점 $\tau^{(m)} = mT$ 에서의 유동해로 정의하자 (m 은 양의 정수). 그리고 Poincare 단면에서의 입자의 위치를 $\mathbf{x}^{(m)}$ 으로 나타낸다면 그 다음 주기에서의 입자의 위치 $\mathbf{x}^{(m+1)}$ 은

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(m)}) \quad (4)$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서 공간 함수 $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(m)})$ 는 입자의 위치사상(position map) 텐서이다. 그러면 시점 $\tau^{(m)}$ 에서 위치 $\mathbf{x}^{(m)}$ 에 부착시킨 유체의 미소 선분요소 $\delta\mathbf{x}^{(m)}$ 은 그 다음 주기에서

$$\delta\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{D}(\mathbf{x}^{(m)})\delta\mathbf{x}^{(m)} \quad (5)$$

의 식에 의해 정해진다. 여기서 \mathbf{D} 는

$$\mathbf{D} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}^{(m)}} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \quad (6)$$

와 같으며, 물질의 변형사상(deformation map) 텐서 혹은 신장사상(stretching map) 텐서이다.

만약 선분요소 $\delta\mathbf{x}^{(m)}$ 이 $\mathbf{x}^{(m)}$ 을 중심으로 매우 작은 원을 그린다면, 그 다음 주기에서의 요소는 타원을 그린다는 사실을 증명할 수 있다. 이는 변형사상 텐서 \mathbf{D} 를 아래와 같이 세 텐서의 곱으로 나타낼 수 있음을 증명하는 것과 같다.

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}\mathbf{K}\mathbf{Q} \quad (7)$$

단, 텐서 P , Q 는 회전을, 텐서 K 는 x -방향의 신장(동시에 y -방향의 수축)을 나타내며 각각 아래와 같이 표현된다.

$$P = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

여기서 k , α , 및 β 는 각각 아래 식과 같이 구해진다.

$$k = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(d_{11} + d_{22})^2 + (d_{21} - d_{12})^2} + \sqrt{(d_{11} - d_{22})^2 + (d_{21} + d_{12})^2} \right] \tag{9a}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2), \beta = \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) \tag{9b}$$

$$\tan \gamma_1 = \frac{d_{21} - d_{12}}{d_{11} + d_{22}}, \tan \gamma_2 = \frac{d_{21} + d_{12}}{d_{11} - d_{22}} \tag{9c}$$

식 (7)이 의미하는 바를 Fig. 1을 참고하여 설명하면 다음과 같다. 초기에 원형인 물질(Fig. 1a)은 각 β 만큼 회전하고(Fig. 1b), 이어서 x -방향으로 k 배만큼 신장하여(동시에 y -방향으로는 $1/k$ 배

만큼 수축하여) 타원으로 변형하며(Fig. 1c), 마지막으로 각 α 만큼 회전함으로써 $\delta \mathbf{x}^{(m+1)}$ 가 대변하는 물질은 타원의 모양이 되는 것이다(Fig. 1d).

두 번째 과정에서 x -방향으로 k 배만큼 신장될 때 y -방향으로 $1/k$ 배만큼 수축되는 것은 주어진 유동장이 비압축성이기 때문에 타원의 면적이 초기의 원의 면적과 같아야 한다는 원리와 같다. k 는 이전 시점의 길이에 대한 현 시점의 길이의 비이므로 신장비(stretching ratio)라 부르는 것이 마땅하다.

만약 어떠한 선분요소가 유동장 내에서 변형할 때 타원의 주축 방향(위 과정에서 물질이 k 배만큼 늘어나는 방향, 즉 Fig. 1c에서 B 의 방향)으로만 계속해서 늘어난다고 한다면 이는 가능한 모든 경우 중에서 가장 빠른 신장에 해당한다. 한 예로서 $u=x, v=-y$ 로 정의되는 Hiemenz 유동은 물질을 x 방향으로만 계속 늘어나게 하기 때문에 시간적으로 지수적인 늘임이 가능하다. 그러나 이것은 공간이 무한히 넓은 경우에만 가능하며 완전히 또는 부분적으로 갇힌 공간의 경우에는 전체영역에서 이러한 유동이 발생할 수는 없다. 나아가 이 경우에는 빠른 물질신장이 좋은 혼합효과를 의미하지는 않는다. 한편, 갇힌 공간 내에서 높은 신장비를 얻기 위해서는 물질을 늘임과 동시에 접어야 한다. 그러면 높은 신장비와 동시에 좋은 혼합특성이 보증된다. 이는 요리사가 밀가루 반죽으로 면을 만드는 과정으로 쉽게 설명할 수 있다. 한정된 주방 공간 내에서 빠른 시간 내에 가느다란 면을 만드는 방법은 반죽을 늘임과 동시에 늘어진 면을 접어야 한다. 이렇게 함으로써 한 가닥이 두 가닥이 되고 다시 네 가닥, 여덟 가닥 등등, 가닥의 수가 지수적으로 늘어나면서 면의 길이도 지수적으로 증가하게 된다. 가닥의 수가 늘어나는 것은 물론 좋은 혼합을 의미한다. 이는 공간 내에서 접는 과정이 수반되기 때문에 가능한 것이다. (수학자들은 이것을 텐트 사상(tent map)으로 단순화시킨 모델에서 비선형 동역학을 해석하고 있다). 단, 이러한 과정에서 물질이 늘어나는 방향은 주축의 방향과 반드시 일치하지는 않는다는 것이다. 이는 물론 접는 과정이 수반되기 때문이다. 따라서 변형사상 D 나아가 최대 신장비 k 만을 구한다고 하여 물질의 신장특성 혹은 혼합효과를 구하였다고 볼 수는 없다. 반복되는 사상에 의해 물질이 꾸준히 향하는 방향 즉 불변다양체

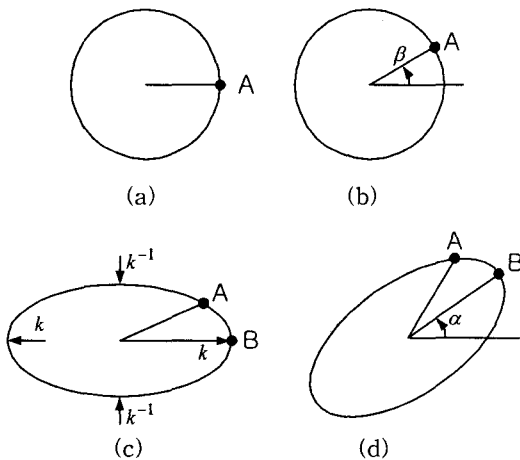


Fig. 1 Deformation of a circular fluid-material after a period mapping: (a) the original shape; (b) rotation with the angle β ; (c) stretching and contraction along the x - and y -directions, respectively; (d) rotation with the angle α .

(invariant manifold) 방향으로의 신장특성을 구해야 혼합효과를 대변하는 양으로 삼을 수 있다. 앞에서도 언급하였지만 이 방향은 주축의 방향과 일치하지 않기 때문에 반복계산에 의한 수치해석으로 구해야 하는 것이다. 다시 말하면, 공간 내 혼합효과를 대표하는 양인 물질의 신장비는 불변다양체 상에서의 신장비가 되어야 하며, 이는 다분히 주축 방향으로의 신장비와 다르기 때문에 이를 구하기 위해서는 수치해석에 의존해야 한다.

3. 불변다양체 상에서의 물질신장지수의 계산

불변다양체 방향으로의 신장비는 다음과 같은 방법으로 추구할 수 있다. 초기에 두 지점 (x_0, y_0) 과 (x_1, y_1) 을 잇는 선분 위에 무수히 많은 유체입자가 놓여져 있다고 가정하고 두 지점을 잇는 선분의 길이를 l 이라 하자. 초기로부터 시간이 t_{lapse} 만큼 경과하였을 때 두 지점이 (x_0', y_0') 와 (x_1', y_1') 으로 이동하였고 두 지점사이에 있던 입자들도 각각 위치이동을 하였다고 할 때, 이동한 유체입자들에 의해 형성되는 선분의 길이를 l' 이라 하자. 그러면 이 기간동안의 신장비는 당연히 l'/l 과 같다. 그러나, 이렇게 정의한 신장비는 경과시간 t_{lapse} 와 더불어 계속 변하는 문제점이 있다. 한편, 좋은 혼합에서는 물질이 시간과 더불어 지수적으로 늘어난다는 점을 감안하여, 일반적으로는 아래와 같이 정의한 신장지수(stretching exponent)를 주로 사용한다.

$$\lambda = \frac{1}{t_{\text{lapse}}} \ln \frac{l'}{l} \quad (10)$$

이는 l' 이 상수 λ 에 대해 $l' = l \exp(\lambda t)$ 와 같이 증가한다는 기본 공식에 의한 것이다. 리야푸노프 지수(Liapunov exponent)는 이 식의 분모 t_{lapse} 가 무한히 클 때의 λ 에 해당한다.

한편 식 (10)으로 정의된 물성치는 다분히 라그랑지적 개념을 가진다. 그것은 두 지점을 잇는 선분이 시간과 더불어 길어지면서 유동 영역 내 많은 지역을 점유하기 때문이다. 따라서 초기의 선분이 극히 짧다 하더라도 그 후의 선분의 길이는 매우 커지고 또 그 선분은 영역 내 많은 지점을 지나기 때문에

시간과 공간의 변화를 동시에 고려한 양이다. 만약 주어진 선분이 유동 영역 내 모든 지점을 골고루 찾아다닌다면 식 (10)으로 정의된 물성치는 주어진 유동모델에 대한 혼합효과를 잘 나타내는 양이라 생각해도 좋은 경우가 많다. 그러나 실제로는 유동 영역 내에는 교반효과가 탁월한 혼돈적 교반의 영역(혼돈영역, chaotic region)이 있는가 하면 그렇지 못한 영역(정규영역, regular region 또는 섬, island 라 부름)도 존재한다. 이들 두 영역 내에 있는 유체 입자들은 서로 교류하는 일이 없기 때문에 만약 초기에 선분이 혼합영역 내에 있다면 그 후에도 선분은 혼합영역 내에만 존재한다. 따라서, 이 선분의 길이변화로부터 식 (10)에 의해 계산한 신장지수는 혼돈영역에 대한 혼합효과만을 대변하며 전체 영역에 대한 것을 대변한다고 볼 수 없다. 더구나 같은 혼돈영역이라 하더라도 지역에 따라서는 신장지수가 다를 수 있다. 따라서 식 (4)의 신장지수는 국소적인 양으로서만 의미를 부여해야 하고 전체 영역에 대해서는 이들을 평균화한 양 등으로써 혼합효과를 분석하는 것이 타당하다 하겠다.

앞에서 신장지수는 불변다양체 상에서 구해야 한다고 하였다. 따라서 신장지수의 계산을 위해서는 불변다양체를 구하는 일이 선행되어야 한다. 불변다양체를 수치적으로 구하는 과정을 설명하면 다음과 같다. 초기에 어떠한 유체 입자가 $\mathbf{x}^{(0)}$ 에 있고 이 위치로부터 미소 변위 $\delta \mathbf{x}^{(0)}$ 만큼 떨어진 지점 $\mathbf{x}^{(0)} + \delta \mathbf{x}^{(0)}$ 에 또 다른 유체 입자가 있을 때, 한 주기 후의 변위 $\delta \mathbf{x}^{(1)}$ 는 식 (5)에 의해 아래와 같이 얻어진다.

$$\delta \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{D}(\mathbf{x}^{(0)}) \delta \mathbf{x}^{(0)} \quad (11)$$

(물론 한 주기 뒤에도 이 변위벡터의 크기는 충분히 작다는 가정하에서 이것이 성립된다.) 변형상 텐서 \mathbf{D} 는 네 개의 요소를 가지기 때문에 이들을 구하기 위해서는 초기에 설정한 2 개의 변위벡터가 한 주기 후 어떠한 형태로 변형하는지 추구할 필요가 있다. 이를 위해 초기 변위를 아래와 같이 두 개의 수직 벡터로 설정하면 가장 효과적이다.

$$\delta \mathbf{x}_1^{(0)} = \varepsilon \mathbf{i}, \quad \delta \mathbf{x}_2^{(0)} = \varepsilon \mathbf{j} \quad (12)$$

여기서 \mathbf{i} , \mathbf{j} 는 각각 x , y 방향으로의 단위 벡터이며, ε 은 매우 작은 상수이다. 한 주기 후의 변

위벡터들을 $\delta \mathbf{x}_{1,2}^{(1)} = (\delta x_{1,2}^{(1)}, \delta y_{1,2}^{(1)})$ 로 나타내면 텐서 \mathbf{D} 의 네 개 요소는 아래 식으로 쉽게 구할 수 있다.

$$d_{11} = \delta x_1^{(1)}/\epsilon, \quad d_{12} = \delta x_2^{(1)}/\epsilon, \quad d_{21} = \delta y_1^{(1)}/\epsilon, \quad d_{22} = \delta y_2^{(1)}/\epsilon \quad (13)$$

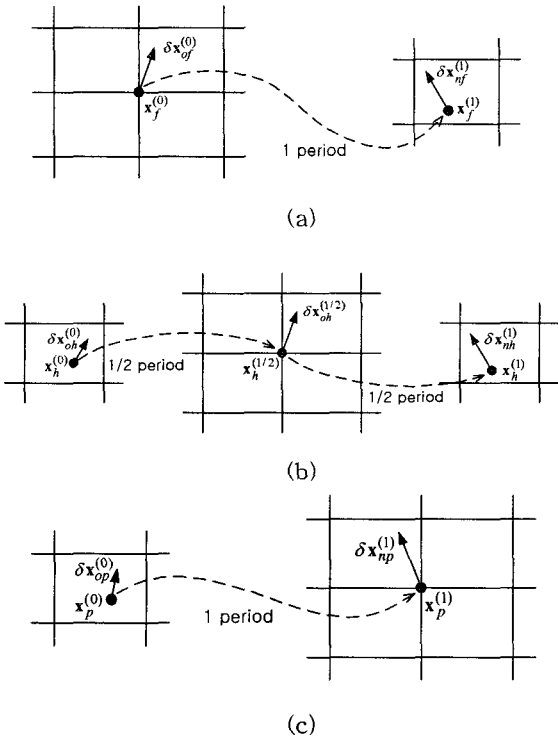


Fig. 2 Deformation of the material line element $\delta \mathbf{x}^{(0)}$ after one period for (a) F-method, (b) H-method and (c) P-method.

그러면 어떠한 초기 변위벡터 $\delta \mathbf{x}^{(0)}$ 에 대해서도 한 주기 후의 변위벡터 $\delta \mathbf{x}^{(1)}$ 는 식 (11)로 즉시 구할 수 있게 된다. 여기서 말하는 변위벡터는 앞에서 언급한 선분요소의 벡터와 같은 의미이다. 다만 매우 짧은 선분요소를 의미한다.

앞에서도 언급한 바와 같이, 물질신장의 효과는 유동공간 내의 위치에 따라 다르기 때문에 모든 영역에 대한 물질의 늘임효과를 골고루 반영하지 않은 신장지수는 주어진 유동영역에 대한 올바른 혼합효과를 대변한다고 볼 수 없다. 이를 위해 우선 주어진 공간을 $I \times J$ 개의 격자망으로 분할한다. 단, 영역 내의 네 구석에서의 특이성을 피하기 위해 경

계에서는 극히 미소한 거리만큼 안 쪽으로 이동한 격자선을 생성한다. 입자의 궤적을 추적하는 과정에서 어느 시점에 입자가 격자점에 오도록 하느냐에 따라 본 연구에서는 세 가지 방법을 적용하였다. 먼저, Fig. 2(a)에서 보인 첫 번째 방법(앞으로 F-법이라 부름)에서는 초기에 입자 위치 $\mathbf{x}^{(0)}$ 와 미소 선분요소 $\delta \mathbf{x}^{(0)}$ 를 격자점에 위치시키고 한 주기 뒤의 입자 위치와 선분요소를 추적하는 방법이다. 본 연구에서는 경계를 제외한 모든 격자점에서 초기 선분요소를 $\delta \mathbf{x}^{(0)} = \epsilon \mathbf{i}$ 로 설정하였다. 단, 경계에서는 경계선에 평행한 방향의 선분요소를 설정하였다. 그리고 한 주기 뒤에 이들이 이동한 지점 $\mathbf{x}^{(1)}$ 과 변형된 변위벡터 $\delta \mathbf{x}^{(1)}$ 를 추적한다. 이 결과를 이용하여 그 다음 주기에서의 변위벡터를 구하기 위해서는 보간법이 필요하다. 이는 한 주기 뒤의 입자위치 $\mathbf{x}^{(1)}$ 가 정해진 격자점에 위치하지 않기 때문이다(Fig. 2a). 이에 대한 구체적인 방법은 추후 설명하기로 한다. 두 번째 방법은 초기에 격자점에서 벗어나 있던 입자가 반 주기 뒤에 격자점에 위치하도록 하는 방법이다(Fig. 2b; 앞으로는 H-법이라 부름). 세 번째는, 한 주기 뒤에 격자점에 도달하도록 하는 방법이다(Fig. 2c; P-법이라 부름).

위의 세 가지 방법 중 P-법과 H-법에서는, 각 주기에서 $\delta \mathbf{x}$ 의 초기조건을 보간법으로 구해야 하는 문제점을 안고 있다. Fig. 2(a)의 첫 번째 방법에서는 한 주기 뒤의 선분요소 $\delta \mathbf{x}_{nf}^{(1)}$ 를 물질사상 \mathbf{D} 로 구하고 나면 그 다음 주기에서의 계산을 위한 초기조건 $\delta \mathbf{x}_{of}^{(1)}$ 이 필요하다. 이 경우는 Fig. 2(c)의 세 번째 방법으로 구한 $\delta \mathbf{x}_{np}^{(1)}$ 이 격자점에서 정의된 것이므로 이 선분요소를 바로 이용한다면 보간법이 필요없다. 한편, 두 번째와 세 번째 방법에서의 초기 조건은 격자점에서 벗어난 지점에서 정의되므로 어떻게 하든지 보간법을 적용하지 않을 수 없다. 이를 위한 구체적인 방법을 Fig. 3을 참고하면서 설명한다. 먼저 초기벡터를 구하고자 하는 지점인 P가 그것을 둘러싼 네 개의 격자점 중에서 어느 것과 가장 가까운지 찾는다. 이것은 점선에 의해 형성되는 4개의 면적 중에서 가장 작은 면적을 제공하는 점(Fig. 3a에서 "0"의 지점)으로 결정한다. 그러면 이 점에서의 단위 벡터 \mathbf{X}_0 (선분벡터를 정규화한

것)가 기준이 되어 다른 4개의 벡터들의 영향을 보 간법으로 반영한다. 이 때 각 벡터의 가중치는 이 셀의 면적에 대한 각 면적의 비율로 한다. 그러나 각 선분벡터는 그것이 지시하는 방향과 반대되는 방향도 같은 중요성을 가지므로 보간법을 적용할 때 이 점에 유의하지 않으면 안된다. 본 연구에서는 기준 벡터 \mathbf{X}_0 에 다른 벡터를 단순히 합하였을 때 그 결과의 벡터 값이 더 큰 쪽을 선택하여 반영한다. Fig. 3(b)는 벡터 \mathbf{X}_2 의 경우는 그 반대방향의 벡터(점선)를 선택해야 한다는 것을 보여주고 있다.

한 주기 후의 선분벡터가 얻어졌으면 초기 선분 벡터와의 신장비로부터 격자점 (i, j) 에서의 국소 신장지수는 다음 식으로 구한다.

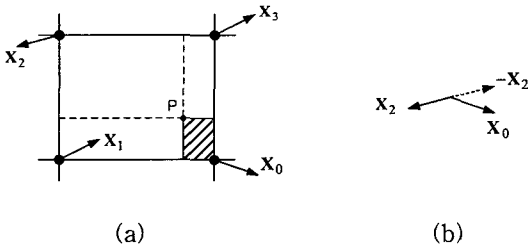


Fig. 3 Illustration of the interpolation method used in estimating the initial line-element vector at the off-grid point P.

$$\Lambda_{i,j} = \frac{1}{T} \ln \frac{|\delta \mathbf{x}_{i,j}^{(1)}|}{|\delta \mathbf{x}_{i,j}^{(0)}|} \quad (14)$$

위 식으로 구한 $\Lambda_{i,j}$ 는 물론 주기 m 마다 다르다. 각 주기에서의 공간평균 신장지수는 아래 식으로 구한다.

$$\Lambda_m = \frac{1}{A} \int_A \Lambda_{i,j} dx dy \quad (15)$$

여기서 A 는 유동장 전체의 면적을 나타낸다. 지금까지 설명한 방법으로 신장지수를 구하는 과정을 요약하면 아래와 같다.

(1) 우선, 식 (3a), (3b)를 역으로 적분하여 F-방법과 P-방법에서 사용되는 초기위치 $\mathbf{x}_f^{(0)}$, $\mathbf{x}_h^{(0)}$ 을 구해둔다. 이 적분에서 초기치는 물론 각 격자점의 위치로 한다.

(2) 세 가지 방법 각각에서, 초기 위치벡터 $\mathbf{x}^{(0)}$

및 이것에 식 (12)의 선분벡터를 합한 위치벡터 $\mathbf{x}^{(0)} + \delta \mathbf{x}_1^{(0)}$, $\mathbf{x}^{(0)} + \delta \mathbf{x}_2^{(0)}$ 에 대해서 식 (3a), (3b)를 적분하여 한 주기 뒤의 위치벡터들을 구한다. 구해진 정보로부터 식 (13)을 사용하여 변형사 상 텐서 \mathbf{D} 를 구한다.

(3) 초기 위치 $\mathbf{x}_f^{(0)}$, $\mathbf{x}_h^{(0)}$, $\mathbf{x}_p^{(0)}$ 에 ϵ 의 크기와 임의의 방향을 지닌 선분벡터를 위치시킨다.

(4) 초기 선분벡터로부터 한 주기 뒤의 선분벡터 $\delta \mathbf{x}_{nf}^{(1)}$, $\delta \mathbf{x}_{nh}^{(1)}$, $\delta \mathbf{x}_{np}^{(1)}$ 을 식 (11)로 구한다.

(5) 선분벡터의 신장비로부터 식 (14) 및 (15)에 의해 국소 신장지수 및 공간평균 신장지수를 계산한다.

(6) 위의 과정 (5)에서 신장지수를 계산한 뒤에는 선분벡터 $\delta \mathbf{x}_{nf}^{(1)}$, $\delta \mathbf{x}_{nh}^{(1)}$, $\delta \mathbf{x}_{np}^{(1)}$ 를 단위 크기의 벡터로 정규화시키고 선형보간법에 의해 다음 주기의 계산을 위한 초기 선분벡터 $\delta \mathbf{x}_{of}^{(1)}$, $\delta \mathbf{x}_{op}^{(1)}$ 를 구한다($\delta \mathbf{x}_{of}^{(1)}$ 는 $\delta \mathbf{x}_{nf}^{(1)}$ 와 같게 두어 구한다). 다시 이들 벡터를 원래의 크기 ϵ 으로 환원시킨다.

(7) 과정 (4)~(6)을 원하는 주기까지 반복계산한다.

4. 수치해석 결과 및 검토

본 연구에서는 $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq a$ 로 정의되는 종횡비 a 의 직사각형 내에서 아래와 같이 정의된 비정상 비압축성 2차원 유동을 대상으로 한다.

$$\mathbf{u} = \cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) \mathbf{u}_1(x, y) + \cos^2\left(\frac{\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{u}_2(x, y) \quad (16)$$

여기서, \mathbf{u}_1 의 각 성분은 아래와 같다.

$$u_1 = \frac{1}{a} [2(y/a) - 3(y/a)^2] \sin \pi x \quad (17a)$$

$$v_1 = -\pi [(y/a)^2 - (y/a)^3] \cos \pi x \quad (17b)$$

그리고 \mathbf{u}_2 의 각 성분은 다음과 같이 정의된다.

$$u_2 = u_1(x, a - y), \quad (18a)$$

$$v_2 = -v_1(x, a - y) \quad (18b)$$

이와같이 정의된 유동은 $y=0$ 에 위치한 아래 경

계와 $y=a$ 에 위치한 윗 경계가 교대로 좌측으로 움직이는 경우에 형성되는 Stokes 유동과 흡사하다 (그러나 엄밀히는 아니다). 단, 구석에서의 특이성을 최소화하기 위해 각 경계가 이동하는 속도는 위치마다 다르게 하였고 구석에서는 0이 되도록 하였다.

본 연구에서 파라미터는 종횡비 a 와 주기 T 이다. 종횡비 a 는 줄곧 0.6으로 고정하고 주기 T 는 3.9에 대해 집중적으로 취급하였으며 후반부에서는 1.5의 경우에 대해 해석하였다. 신장지수의 계산을 위한 격자 수는 20×20 부터 시작하여 200×200 까지 증가시켰으며 입자궤적을 위한 방정식 (3a) 및 (3b)의 적분에는 Euler방법을 사용하였고, 이 때 시간간격은 $\Delta t = 0.002$ 로 하였다. 초기 선분벡터를 위한 ϵ 은 10^{-6} 으로 하였고 경계에서의 격자선은 경계로부터 10^{-5} 만큼 안 쪽으로 들어간 지점으로 택하였다. 계산 결과는 $T=3.9$ 에 대한 것과 $T=1.5$ 에 대한 것을 나누어서 제시하도록 한다.

4.1 $T=3.9$ 의 경우

Fig. 4는 $T=3.9$ 에 대한 불변 다양체를 나타낸다. Fig. 4(a)는 경계를 제외하고 영역 내부에 형성시킨 50×50 의 격자점에서 초기에 길이 0.001인 x -방향의 선분이 4 주기 후 변형된 모습으로서 3 주기부터 거의 변하지 않는 모양을 나타낸다. 최초의 선분은 매우 짧아 직선으로 가정할 수 있기 때문에 두 개의 입자를 연결한 것으로 표현할 수 있지만 시간이 흐를수록 선분은 늘어나서 곡선 모양이 되기 때문에 사이사이에 입자를 계속 추가하여 곡선을 표현할 수 있도록 하였다. 이 때 이웃한 두 입자 사이의 거리는 0.01을 넘지 않도록 하였다. 선분의 길이는 시간경과와 더불어 평균적으로 지수적 증가를 보이기 때문에 이를 표현하기 위한 입자의 수도 지수적으로 증가하고 따라서 계산시간도 지수적으로 증가한다. 한편 Fig. 4(b)는 같은 격자계에서 사상법으로 구한 불변 다양체로서 25 주기 후의 모습이다. 사상법으로 구한 벡터들도 6~7 주기 후에는 거의 변하지 않는 모습을 보이지만 추가계

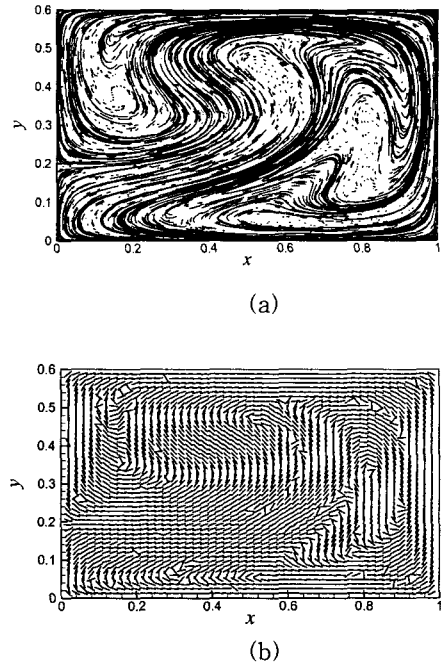


Fig. 4 Invariant manifold for $T=3.9$ obtained by (a) the original method and (b) the mapping method with grids 50×50 .

산에 따른 계산시간이 무시할만큼 작기 때문에 25 주기 후의 모습을 보인 것이다. 사상법으로 구한 벡터들은 원래의 방법으로 구한 불변 다양체의 방향을 거의 모든 지점에서 그대로 따르고 있음을 알 수 있다. 이는 본 연구에서 제시한 사상법이 원래의 불변 다양체를 제대로 잘 나타내고 있음을 입증하는 것이다.

Fig. 5는 P-법, H-법 및 F-법으로 구한 25 주기 후의 국소 신장지수 $\Lambda_{i,j}$ 의 분포를 나타낸다. 이 그림에서 국소 신장지수는 규정된 격자점에서 각각 정의된 것으로 가정하여 그렸다. 각각의 경우에서 입자가 해당 격자점을 통과하는 시점을 현재의 시점으로 본다면, P-법의 경우는 1 주기 전에서부터 현재까지(즉 과거 1 주기 동안, Fig. 5a)의 국소 신장지수를, H-법은 반 주기 전부터 반 주기 후까지(즉 현재 전후의 1 주기 동안, Fig. 5b)의 국소 신장지수를, 그리고 F-법은 현재부터 1 주기 후까지(즉 미래의 1 주기 동안, Fig. 5c)의 값을 그린 것이다.

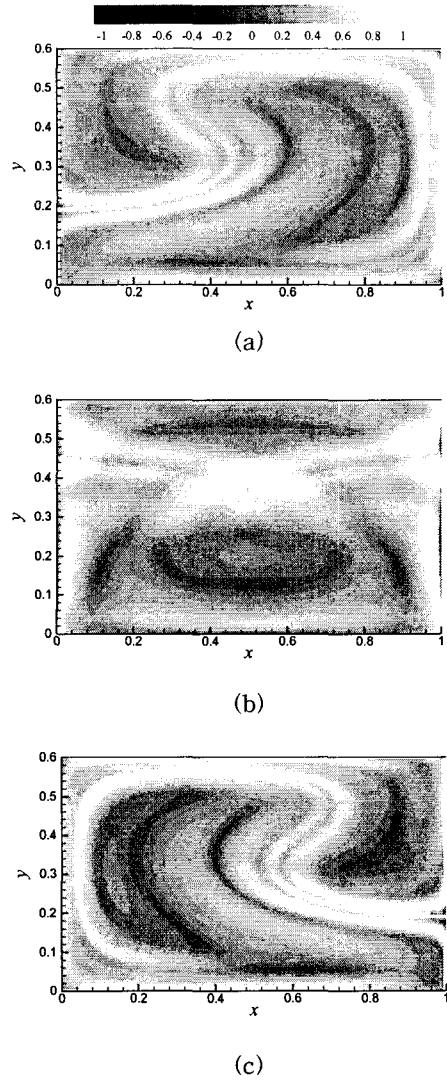
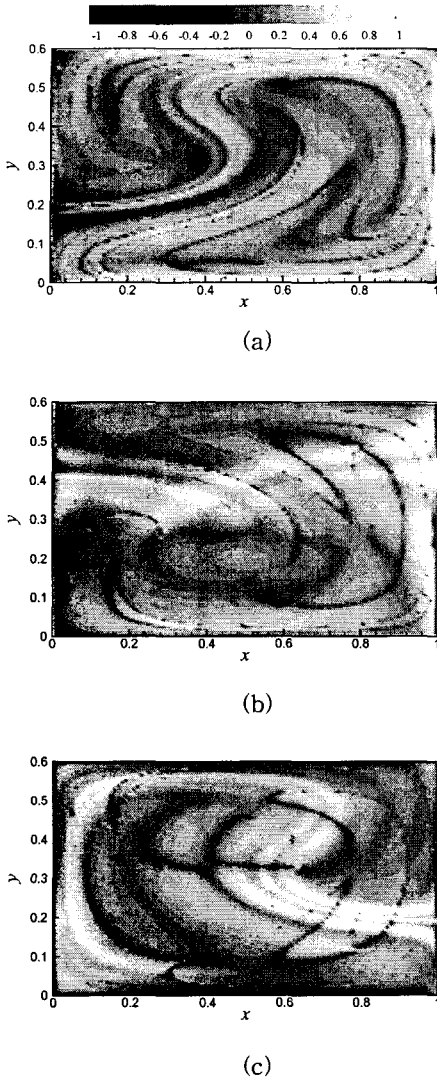


Fig. 5 Distribution of the local stretching exponent $\Lambda_{i,j}$ at $m=25$ obtained numerically for $T=3.9$ with the mapping method under the grids 100×100 by using (a) P-method, (b) H-method and (c) F-method. The values greater than 1.0 were colored white and those less than -1.0 black.

Fig. 6 Distribution of the local value of the maximum stretching exponent $(\ln k)/T$ obtained numerically for $T=3.9$ with the mapping method under the grids 100×100 by using (a) P-method, (b) H-method and (c) F-method. The values greater than 1.0 were colored white.

이와 같이 각각 서로 다른 시점의 정보를 나타내기 때문에 국소 신장지수의 분포도 서로 다르게 나타나고 있다. 그림에서 특이한 것은 음의 신장지수를 포함한 낮은 수치의 신장지수가, 많은 경우, 점이나 선분의 형태로 나타난다는 점이다.

이와 같이 국지적으로 낮은 신장지수는 이 부분에 있는 물질이 접혔거나 앞으로 접힐 것임을 의미한다. 왜냐하면 앞에서 분석한 바와 같이 갖힌 공간 내에서 양호한 혼합효과(즉 혼돈적 교반의 상태)를 얻기 위해서는 물질의 늘임뿐만 아니라 접힘이 반드시 수반되어야 하며, 이 접힘의 과정에서는 불

변 다양체의 방향으로 늘임이 아닌 수축이 일어나서 신장비가 1보다 작아지기 때문이다.

Fig. 6은 각각의 위치에서 얻어지는 가장 큰 신장비 즉 k 를 사용하여 $(\ln k)/T$ 를 계산한 값의 분포를 그린 것이다. k 는 항상 1보다 크기 때문에 이 분포에서는 음의 값은 존재하지 않는다. 앞의 Fig. 5의 신장지수 분포와 달리 이 그림에서는 낮은 신장지수가 집중된 분포는 보이지 않는다. 그 이유는, 지역마다 비록 물질점힘이 발생한다 하더라도 불변 다양체의 방향과 거의 수직인 방향으로의 최대의 늘임이 발생하므로 이 방향으로의 신장비는 항상 1보다 큰 값을 가지기 때문이다. 이 결과는 따라서 최대 신장지수만으로는 물질의 점힘이 수반되는 경우의 물질신장을 제대로 대변한다고 볼 수 없음을 의미한다. 한편, Fig. 5와 달리 P-방법에 의한 결과는 F-방법에 의한 결과와 뚜렷한 좌우대칭의 형태를 보이며 더구나 H-방법의 결과는 그 자체가 이러한 대칭성을 보이고 있다. 이는 유동장(구체적으로는 유선의 형태) 자체가 좌우 대칭의 모양을 보이기 때문으로 생각된다.

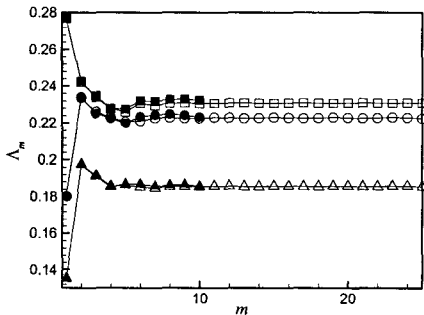


Fig. 7 Numerical results of Λ_m , the spatially averaged stretching-exponent at the m th period $t=mT$ for $T=3.9$. Open symbols denote the data given from the original method with the grids 30×30 , whereas the solid symbols denote the data given from the mapping method with the same grids. Squares indicate the results with P-method, triangles with F-method and circles with H-method.

Fig. 7은 각 주기에서 구한 공간평균 신장지수의 시간변화로서 원래의 방법 및 사상법의 각각에 대해 P, H 및 F의 세가지 방법의 결과를 비교한 것이다. 우선, 모든 결과는 6~7 주기째부터 거의 수렴된 결과를 주고 있음을 알 수 있다. 그리고 세 방법 모두에서 사상법의 결과는 원래의 방법으로 구한 결과와 거의 일치하고 있음을 알 수 있다. 또한, P-방법이 가장 큰 값을 주고 F-방법이 가장 낮은 결과를 예측하며 H-방법이 그 사이에서 P-법에 더 가까운 수치를 예측하고 있다. 이 것의 주된 이유는 주어진 유동역역의 경계에서 찾을 수 있다. 예를 들어 $y=a$ 의 경계에서 보면, 이 경계에서 속도성분 u 는 항상 음이므로(식 (17a) 참조) 흐름은 모든 지점에서 항상 좌측을 향한다. 따라서, P-방법의 경우 이 경계에 있는 격자점의 입자를 위한 초기 위치는 다분히 우측 구석 근처에 쏠려 있다. 이들 초기 위치에서 입자들이 좌측으로 이동하는 1 주기 동안 경계방향(즉 불변 다양체 방향)으로 매우 큰 물질신장을 동반한다. 따라서 경계에서의 신장지수가 커질 수 밖에 없다. 반면, F-방법에서는 입자의 초기 위치는 격자점에 있지만 1 주기 동안 이 입자들이 대부분 좌측 구석 쪽으로 몰려가면서 경계방향으로 물질 수축이 일어나므로 신장지수는 높은 음의 수치를 보일 수 밖에 없다. 한편, H-방법은 이 두 방법의 중간에 속하므로 둘 사이의 값을 보이게 되는 것이다. 그러나 H-방법의 결과가 왜 P-법에 다소 더 가까운 결과를 보이는지에 대한 이유는 파악되지 않았다.

Fig. 8은 공간평균 신장지수 Λ_m 을 $11 \leq m \leq 20$ 의 10 주기 동안 평균한 주기평균 신장지수 Λ 의 격자수에 따른 계산결과를 제시한 것이다. P-방법은 격자수가 증가할수록 점점 작아지는 경향을 보이며 F-방법은 점점 증가하는 모양, 그리고 H-방법은 상대적으로 거의 변하지 않는 양상을 보인다. 격자수 증가에 따른 이같은 수렴특성으로 볼 때 H-방법이 그 중 가장 우수한 방법임을 알 수 있다. 구체적인 예로서, H-방법이 10×10 의 격자수에 대해 예측한 값 0.2355는 격자수 200×200 의 결과 0.2228에 비해 불과 6%의 차이밖에 나지 않고 있다.

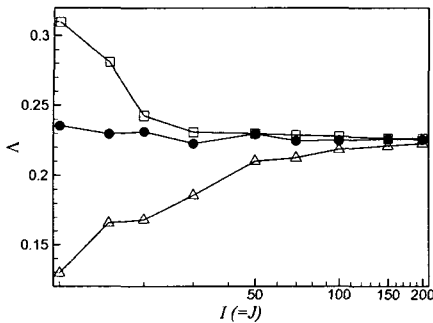


Fig. 8 Convergence of Λ , the time-averaged stretching-exponent, upon the change of the grid points for the mapping method; $T=3.9$. Open squares indicate the results with P-method, triangles with F-method and solid circles with H-method.

앞에서 사상법이 원래의 방법과 거의 동일한 결과를 제시함을 알았다. 그러면 제안된 사상법의 성능은 계산시간 면에서 입증되어야 한다. 계산시간은 격자수에 비례하며 시간 간격 Δt 에 의해서도 달라진다. 격자수 30×30 과 시간간격 $\Delta t=0.002$ 에서 데스크 탑 컴퓨터(Pentium 1.8GHz CPU, 256MB RAM)를 사용하였을 때 계산에 사용된 실시간을 측정해 보았다. 계산과정은 입자의 초기위치를 구한다든지 사상텐서를 구하는 전처리 과정(원래의 방법에서는 사상텐서를 구하는 과정이 물론 없다)과 불변 다양체와 신장지수를 구하는 본과정으로 나누어진다. 측정결과, 원래의 방법에서는 전처리 과정에 28초, 본과정에서 1 주기 계산에 107초가 소요되었다. 반면 사상법에서는 전처리 과정에 188초, 본과정에서 1 주기 계산에 0.09초가 소요되었다. 전처리 과정에서는 사상법이 변형텐서를 구하는 과정에서 계산시간이 추가되기 때문에 원래 방법의 약 7배 정도의 긴 계산시간이 요구된다. 그러나 본과정에서는 반대로 원래 방법이 전처리 과정에 비해 많은 계산시간을 요하지만 사상법은 거의 무시할만큼 짧은 시간을 요하므로 전체적으로 보면 사상법이 훨씬 유리하다. 예를 들어 10 주기 동안 계산한다고 할 때 원래의 방법은 약 1100초, 사상법은 189초가 소요되어 사상법은 원래 방법의 1/6배 정도의 짧은 시간으로 계산이 완료된다. 이는 사상법의 우수성을

입증하는 결과이다.

이제, 신장지수를 혼합효과의 지표로 사용하고자 할 때는 진정한 의미의 “국소” 신장지수를 바탕으로 해야만 하는 필요성에 대해 설명한다. 3장의 계산과정 (6)에서 설명하였지만 본 연구에서 제시한 국소 신장지수는 매 주기마다 극히 짧은 길이의 선분요소를 대상으로 하여 구한다. Fig. 9는 이와는 달리 각 격자점에서 초기에는 매우 짧은 크기의 선분요소에서 출발하지만 시간경과와 더불어 그 길이를 조정하지 않고 그대로 방치하였을 때의 전체 선분요소의 길이 L 을 시간변화에 따라 나타낸 수치해석 결과이다. 결과적으로, 격자수 50×50 의 경우는 Fig. 4(a)의 모든 선분의 길이를 합한 것이 Fig. 9의 마지막 시점의 L 과 같다. 그림에 의하면 세 가지 격자망에서 모두 L 은 시간변화에 대해 지수적으로 증가한다. 그림에서 각 선분의 기울기가 신장지수에 해당한다. 그림에서 그은 직선으로부터 신장지수를 구한 결과는, 20×20 에서는 0.302, 30×30 에서는 0.296, 50×50 에서는 0.283과 같다. 매 주기마다 선분의 길이를 짧게 하여 사상법으로 구한 앞의 결과

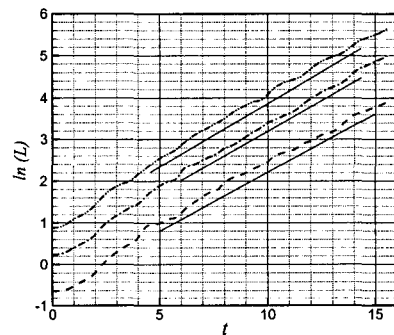


Fig. 9 Time history, during 4 periods of $T=3.9$, of the total length of lines starting at $t=0$ from the regular grid points. The dashed line is given from grids 20×20 , the dash-dot line from 30×30 and the dash-dot-dot line from 50×50 . Three straight lines drawn parallel to each data are used in calculating the stretching exponent.

(예로서, H-법으로 30×30 에 대해 구한 결과 0.223)에 비하면 이 것들은 평균 약 30% 정도 더 높다. 더욱이, 이 값들은 격자수가 증가함에 따라 매우 조금씩만 감소하고 있기 때문에 이 방법으로 해서는 수렴된 결과를 얻기가 어렵다. 이에 대한 근본 이유는 앞서서도 설명한 바와 같다. 즉, 매 주기마다 길이를 짧게 조정(본 논문에서 말하는 '원래의 방법')하지 않는 경우는 각 선분요소의 길이가 지속적으로 증가하여 혼돈영역에서는 이러한 선분들이 중첩적으로 각 지역을 점유한다. Fig. 4(a)에서 지역마다 선분들이 중첩되는 정도가 현격히 다르게 나타나고 있는 것은 이를 잘 입증하고 있다. 따라서 비록 한 점에서 극히 짧은 길이로 출발하였다 하더라도 주기의 경과와 더불어 이 선분이 다른 영역까지 침범하기 때문에 그 후에 나타나는 신장효과는 이들 영역의 신장효과를 중첩적으로 반영하는 셈이 된다. 또한 Fig. 4(a)에서 선분들이 거의 늘어나지 않거나 조금씩만 늘어나는 지역(접힘이 주로 발생하는 지역으로 예측됨)의 신장효과는 전체 길이 L 에 기여하는 바가 거의 없게 되는 결과를 초래한다. 즉 신장효과가 적은 영역이 전적으로 무시되는 결과를 주게 된다. 따라서, 올바른 신장지수를 구하기 위해서는 국소적으로 극히 짧은 선분요소로부터 출발하여 1 주기 후에도 여전히 짧은 선분으로 남는 본 연구의 방법이 타당함을 알 수 있다.

4.2 $T=1.5$ 의 경우

지금까지는 모두 $T=3.9$ 에 대한 결과로서 이 경우는 모든 지점이 혼돈영역에 속한다. $T=1.5$ 의 경우는 정규영역이 공존하기 때문에 수치해석의 관점에서 상황이 달라진다. Fig. 10은 $T=1.5$ 에 대해 구한 Poincare 단면을 보여주고 있다. 두 개의 큰 정규영역이 상하로 분리되어 존재하고 있음을 알 수 있다. $T=3.9$ 의 경우는 이러한 정규영역이 나타나지 않는다.

Fig. 11은 $T=1.5$ 에 대해 격자수 30×30 에서 P, H 및 F의 세 가지 사상법으로 구한 공간평균 신장지수 Λ_m 의 변화를 보여주고 있다. 그림에서 속이 빈 기호는 앞에서 설명한 사상법을 그대로 적용

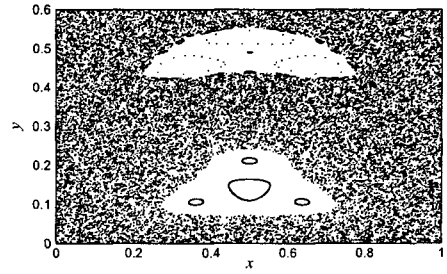


Fig. 10 Poincare section obtained numerically for $T=1.5$. In this plot 50,000 particles are plotted given from 5000 periods' computation for 10 particles initially uniformly distributed along the centerline $x=0.5$.

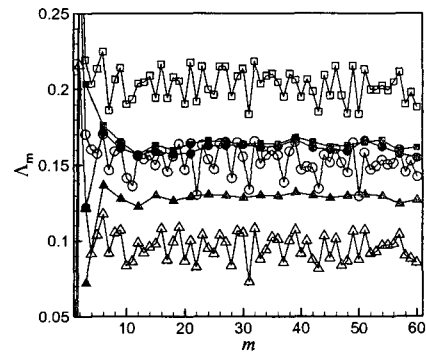


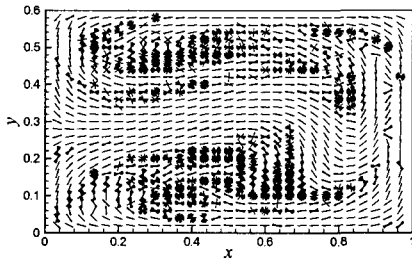
Fig. 11 Numerical results of Λ_m for $T=1.5$ with the grids 30×30 . Open symbols denote the data given from one-period's mapping tensor while the solid symbols are from the three-periods' mapping tensor. Squares indicate the results with P-method, triangles with F-method and circles with H-method.

하였을 때의 결과이다. 우선, 각각의 방법은 모두 m 에 따라 변동이 매우 심한 해를 제시하고 있다.

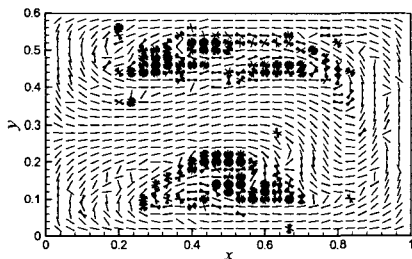
이는 모두 정규영역 때문이다-이에 대해서는 추후 더 자세히 설명한다. 이러한 변동을 줄이기 위한 목적으로 본 연구에서는 다른 방법을 개발하였다. 지금까지는 물질신장의 사상 텐서 D 를 구할 때 한 주기 동안의 선분요소의 변화만을 적용하였으나 그것이 정규영역의 불변 다양체를 제대로 구할 수 없다고 판단하여 3 주기 동안의 선분요소의 변화를 가지고 D 를 계산하였다. 이로부터 구한 결과는 Fig. 11에서 속이 찬 기호와 같다. 변동폭이 확실히

줄어든 것을 확인할 수 있다. 더구나 세 방법의 차이도 많이 줄어들었다. 이는 3 주기 (또는 그 이상의 주기수) 텐서를 사용하는 것이 확실히 유효함을 보여주는 결과이다.

정규영역과 혼돈영역이 공존하는 경우에 신장지수의 큰 변동이 발생하는 근본 이유를 파악하기 위해 동일한 격자수에서 60 주기 동안 사상법으로 구한 선분요소 벡터들 중에서 후반기 30 주기 동안의 선분요소 벡터들을 겹쳐 보았다. 만약 모든 지점에서 불변 다양체가 제대로 포착되었다면 이들은 모두 각 지점에서 하나의 벡터로 보여야 한다. Fig. 12는 그 결과로서 Fig. 12(a)는 한 주기 동안의 데이터로부터 유도된 신장사상 텐서로 구한 결과이며, Fig. 12(b)는 3 주기 동안의 데이터로부터 유도된 신장사상 텐서로 구한 결과이다. 그림에 의하면 혼돈영역($y=0.3$ 근처)에서는 역시 불변 다양체가 제대로 구해지고 있으나 정규영역 내에서는 이것이 제대로 포착되지 못하고 있음을 알 수 있다.



(a)



(b)

Fig. 12 Invariant manifolds for $T=1.5$ obtained numerically by using the mapping method with grids 30×30 . Each of these plots is made by superimposing on themselves the last 30 periods' vector plots taken from the total 60 mappings. In (a), the mapping tensor is given from the one-period's particle displacement, while in (b) it is given from the three-periods' displacement.

그러나, 1 주기의 텐서로 구한 결과(Fig. 12a)보다는 3 주기의 텐서를 사용한 경우(Fig. 12b)가 더 향상된 결과를 제시하고 있으며, 이는 Fig. 11에서 이 경우가 변동폭이 훨씬 줄어든 결과를 제시하고 있음과 일치한다. 즉, Fig. 11에서 신장지수가 큰 변동을 보이는 이유는 정규영역 내의 불변 다양체가 수렴하지 않기 때문이며, 앞으로 이 문제를 해소할 수 있는 수치해석 방법의 개발이 필요하다.

5. 결 론

본 연구는 2차원 주기유동의 혼합효과를 정량화하는 지표로 사용될 물질신장 지수의 효과적 계산 방법에 관한 것이다. 초기에 두 개의 단위 벡터를 설정한 뒤 이 벡터로 구성되는 미소 크기의 선분요소 벡터의 1 주기 혹은 그 이상의 주기 후의 변형으로부터 물질신장 사상의 텐서를 계산하며 이를 사용하여 신장지수를 구하는 방법을 제안하였다. 지금까지 제시한 계산결과 및 검토결과를 바탕으로 요약한 결론은 아래와 같다.

- (1) 제안된 사상법은 혼돈영역 내의 불변 다양체를 효과적으로 찾아준다.
- (2) 제안된 방법은 또한 종래의 방법에 비해 훨씬 더 빠른 시간 내에 신장지수를 계산해 낸다.
- (3) 정규영역이 공존하는 경우에는 불변다양체의 수렴이 어려우며 신장지수의 주기변동도 심하다. 이러한 문제는 그러나 3 주기간의 변형을 나타내는 변형사상 텐서를 사용하면 부분적으로 해소된다.
- (4) 앞으로 정규영역 내의 불변 다양체를 제대로 찾아주는 수치해석 방법의 개발이 필요하다.

참고문헌

- [1] Aref, H., "Stirring by chaotic advection", *J. Fluid Mech.*, Vol. 143, (1984) pp. 1-21.
- [2] Ottino, J.M., "Mixing, chaotic advection, and turbulence", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 22, (1990) pp. 207-253.
- [3] Ottino, J.M., *The Kinematics of Mixing : Stretching, Chaos, and Transport*, Cambridge University Press (1989).
- [4] 서용권, 문중춘, "얇은 직사각형 통내의 혼돈적 교반", *대한기계학회논문집*, Vol. 18, No.2, (1994) pp. 380-388.

- [5] 서용권, "혼돈적 교반에 의한 열전달 향상", 공기조화·냉동공학논문집, Vol. 6, No. 1, (1994) pp. 20-28.
- [6] 서용권, "요동운동에 의한 Driven-Cavity 유동의 혼돈적 교반", 대한기계학회논문집, Vol. 19, No. 2, (1995) pp. 537-547.
- [7] 서용권, 김용균, 문종춘, "압출용 스크류 모델에서의 혼돈적 교반", 대한기계학회논문집, Vol. 21, No. 12, (1997) pp. 1615-1623.
- [8] Hwang, W.R., Jun, H.S. and Kwon, T.H., "Experiments on chaotic mixing in a single screw channel", *AIChE J.*, Vol. 48, No. 8, (2002) pp. 1621-1630.
- [9] Lamberto, D.J., Alvarez, M.M. and Muzzio, F.J., "Computational analysis of regular and chaotic mixing in a stirred tank reactor", *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 56, (2001) pp. 4887-4899.
- [10] Zale, J.M., Szalai, M.M. and Muzzio, F.J., "Using CFD to understand chaotic mixing in laminar stirred tanks", *AIChE J.*, Vol. 48, No. 10, (2002) pp. 2124-2134.
- [11] Muzzio, F.J., Alvarez, M.M., Cerbelli, S., Giona, M. and Adrover, A., "The intermaterial area density generated by time- and spatially periodic 2D chaotic flows", *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 55, (2000) pp. 1497-1508.
- [12] Cerbelli, M.M., Alvarez and Muzzio, F.J., "Prediction and quantification of micromixing intensities in laminar flows", *AIChE J.*, Vol. 48, No. 4, (2002) pp. 686-700.
- [13] Kruijt, P.G., Galaktinov, O.S., Anderson, P.D., Peters, G.W.M. and Meijer, H.E., "Analyzing mixing in periodic flows by distribution matrices: mapping method", *AIChE J.*, Vol. 47, No. 5, (2001) pp. 1005-1015.
- [14] Anderson, P.D., Galaktinov, O.S., Peters, G.W.M., Meijer, H.E.H. and Tuvker III, C.L., "Material stretching in laminar mixing flows: extended mapping technique applied to the journal bearing flow", *Int. J. Num. Methods Fluids*, Vol. 40, (2002) pp. 189-196.
- [15] Galaktinov, O.S., Anderson, P.D., Peters, G.W.M. and Tuvker III, C.L., "A global, multi-scale simulation of laminar fluid mixing: the extended mapping method", *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 28, (2002) pp. 497-523.
- [16] Guer, Y.L. and Schall, E., "A mapping tool using anisotropic unstructured meshes to study mixing in periodic flows", *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 59, (2004) pp. 1459-1472.