韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제 1호, 2004. 1. 111-121.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 1, Jan. 2004. 111-121.

약수의 관계적 이해에 관한 내용 연구

- 스키마(Schema)를 중심으로-

이 상 덕 (단국대학교)
김 화 수 (단국대학교 대학원)

본 발표는 사칙연산과 약수와의 관계, 그리고 소인수 분해와 약수와의 관계를 통한 약수와 공약수, 최대공약수를 구하는 방법과 약수의 범위 등에 대해서 내용 연구를 하였다. 또한 교차연결고리가 부족한 부분에 스키마식 수업 모델을 제시하여 수학의 연계성과 위계성을 강조함으로써 학생들로 하여금 수학의 구조를 파악하게 하여 수학에 대한 흥미와 필요성을 알게 하고자 한다.

I. 서 론

수학은 추상적인 학문이다. '추상'은 몇 개 또는 무한히 많은 사물의 공통성이나 본질을 추출하여 파악하는 사고작용이다. 그리고 이 추상들이 모여 분류(유사성을 기초로 해서 우리의 경험을 함께 묶는 것)가 되고 그 다음에 이름이 붙여진다. 이것이 바로 개념(concept)이 형성되는 과정이고 수학자가 수학을 하는 과정이다. 그리고 이 개념들은 여러 가지 모양으로 결합하여 스키마(Schema)라고 부르는 개념 구조를 형성하게 되는데, 이 스키마(Schema)는 수학적 사고를 하는데 매우 중요한 역할을 한다.

각각의 개념은 다른 개념의 구조 속에 포함된다. 일차적인 개념을 제외한 각각의 개념은 다른 개념들로부터 유도되고, 다른 개념을 형성하는데 도움을 주므로 분류위계의 일부분이 된다. 또한 각 단계에서 선택적인 분류가 가능한데, 이는 서로 다른 분류 위계를 만든다. 그러므로 스키마는 수학을 개념적으로 이해하는데 도움을 주고, 새로운 지식을 얻는데 꼭 필요한 필수적인 도구이다(Richard R. Skemp 지음/ 황우형 옮김, 1997, pp. 49).

학생들의 수학적 개념이 스키마로 구성되기 위한 교사가 해야 할 3가지 원칙을 제시해 보면,

첫째, 교사는 일차적 개념에 대한 확실한 이해를 위해서 '왜'라는 의문을 가지고 항상 반영적 사고를 해야 한다.

둘째, 교사는 항상 학생과 입장을 바꾸어서 생각을 해야 하고 학생의 입장에서 수업을 준비해야 한다.

셋째, 교사는 학생들이 알고 있는 스키마와 교사 자신이 제공하는 스키마 사이의 간격을 언제든지 넓히고 좁힐 수 있는 준비를 하고 있어야 한다.

많은 초등학생들은 여러 사설 교육기관이나 국립기관 그리고 개인 교습을 통하여 많은 양의 선수

학습을 행하고 있다. 이들 중 대부분은 방법과 이유를 아는 관계적이해를 하기보다는, 주어진 규칙을 적용하여 정답을 찾아내는 도구적 이해를 하고 있고 수학을 능동적이기보다는 수동적인 입장에서 받아들이게 되는 성향을 강하게 보이고 있다.

이러한 생각에 기초하여, 본 논문에서는 스키마를 구성하기 위해 필요한 일차적 개념에 대한 연구와 분석을 하고 이것을 중심으로 스키마식 수업모델을 제시하여 수업을 해 봄으로써 학생들에게 수학에 대한 진정한 이해와 수학의 연계성과 위계성을 알게 하는데 그 목적을 두고 있다.

II 이론적 배경

1. Schema

Skemp는 피아제의 심리학의 기본적인 아이디어를 수학 학습 심리학의 입장에서 해석하여 수학적 개념의 이해를 위한 학습지도이론 곧 스키마의 형성을 위한 스키마 학습이론을 전개하고 있다. 어떤 규칙을 기억하고 있으면서 그 규칙이 왜 그렇게 적용되는지를 알지 못하고 문제해결에 적용하는 상태를 '도구적이해'라고 하고 방법과 이유를 아는 상태 특정한 법칙이나 알고리즘을 연역할 수 있는 상태를 '관계적이해'라고 한다.

대전을 알기 위해서는 대전의 전체 지리를 알아야 한다. 하지만 전체를 다 안다는 것은 불가능하다. 왜냐하면 대전이라는 도시는 고정되어 있지 않고 길도 계속 뚫리고 다리도 놓아지고 건물도 많이 생기면서 자라고 있기 때문이다. 만일 새로운 동네가 형성되면 우리는 거기에서 자신의 인지지도를 확장해야 한다. 수학도 마찬가지다. 수학 또한 멈추지 않고 계속 크고 새로운 것들이 발견되고 증명되어진다. 예전에 비해 보는 관점, 설명하는 방법 등이 달라지고 새로운 개념들이 머리 속에 들어오게 된다. 우리는 이러한 개념들을 자신이 알고 있던 개념들과 함께 여러 가지 모양으로 구성해서 문제 해결에 도달하게 되는데, 이 개념들의 구성체가 바로 '스키마(schema)'이다.

III 연구 방법 및 연구 내용

A. 연구 방법

본 연구는 초등학교 학생들이 수학의 관계적이해를 하는데 스키마가 어떠한 작용을 하는지 알아보기 위해 2002년도 1월 ~ 2003년도 7월까지, 대전에 있는 10개의 초등학교 4학년 학생들 중에서 반 석차 10%안에 포함되는 학생 216명을 대상으로, 지능검사(한국 웩슬러 유아지능검사)와 문제 해결력 검사, 창의력 검사를 통해 비슷한 성향의 학생 6명씩을 6개월 동안 한 반으로 구성하여, 72명(6명씩 열두 반)을 한 팀으로 하여 연구를 하였다. [*A*팀(72명) : 2002년 1월 ~ 2002년 7월, *B*팀(72명) : 2002년 7월 ~ 2003년 1월, *C*팀(72명) : 2003년 1월 ~ 2003년 7월]

6개월씩 세 분기(18개월) 동안 세 팀(216명)이 배우는 주제(단원의 내용)는 같지만 스키마의 단계를 팀 별로 달리하여 어느 단계에서 더 많은 학생들이 관계적이해를 하였는지, 두 가지의 연구문제를 중심으로 양적 연구와 질적 연구를 하였다. 그리고 본 발표는 이 연구 중에서 스키마를 중심으로, 약수의 관계적이해에 대한 내용 연구를 언급하였다.

B. 연구 내용

1. 약수의 일차적 개념과 나눗셈과의 관계

1) 약수의 일차적 개념

(i) 어떤 수를 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 수.
(ii) 어떤 수를 나누었을 때, 나머지가 0이 되게 하는 수.
(iii) 어떤 수를 나누었을 때, 나머지가 없게 만드는 수.

① 약수의 범위
약수는 어떤 수를 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 수이므로 약수는 자기 자신의 수보다 크지 않다 (1≤약수≤자기 자신).
예를 들면, 6을 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 수는 1이상 6이하의 수 (1 ≤ 6의 약수 ≤ 6) 중에 존재한다. 그러므로 가장 작은 약수는 1이고, 가장 큰 약수는 자기 자신인 6이 된다.

② 약수를 구하는 방법
약수의 개념에서 나타내는 것과 같이 피제수를 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는(나머지가 0인, 나머지가 없게 만드는) 제수가 약수이다.
예를 들면, 10의 약수는 어떤 수로 10을 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 수이다 ($10\div1=10$, $10\div2=5$, $10\div5=2$, $10\div10=1$). 그리고 이 수들은 약수의 범위에서 얘기 한 바와 같이, 1이상 10이하인 자연수 안에 포함되어 있으므로 1부터 10까지 수들로 10을 차례로 나누어서 나누어 떨어지게 만드는 수를 찾으면 된다.
즉, 10을 나누고 있는 1, 2, 5, 10은 10을 나누었을 때, 나머지가 없게 만드는(나머지가 0인, 나누어 떨어지는) 수들이다. 그러므로 1, 2, 5, 10은 10의 약수가 된다. ((피제수)÷(제수)=(몫) 의 관계에서 피제수를 나누어 떨어지게 만드는 제수가 약수가 된다.). 이와 같이, 약수는 나눗셈과 관계가 있기 때문에 나눗셈을 이용해서 약수를 구할 수 있다.

첫 번째 방법은 피제수를 나누어 떨어지게(나머지가 0인, 나머지가 없게 만드는) 한다는 것은 '피제수에 제수가 한 번 또는 여러 번 포함 될 때, 피제수의 나머지가 없는 상태'를 말한다. 그리고 이 때의 제수가 약수이다.

예를 들면, 14의 약수는 14의 나머지가 없이 한 번 또는 여러 번 포함되는 수를 말한다. 14에는 1이 14번, 2가 7번, 7이 2번, 14가 1번, 나머지가 없이 포함된다. 그리고 이 수들은 약수의 범위에서 얘기 한 바와 같이, 1 이상 14 이하인 자연수 안에 포함되어 있으므로 1부터 14까지의 수들을 14에 차례로 한 번 또는 여러 번 포함 시켰을 때, 14의 나머지가 없이 포함시킬 수 있는 수를 찾으면 된다.

즉, 14에 같은 수를 14의 나머지가 없이 포함시킬 수 있게 하는 수(나머지가 0인, 나머지가 없게 만드는), 1, 2, 7, 14는 14의 약수가 된다.

두 번째 방법은 피제수를 나누어 떨어지게(나머지가 0인, 나머지가 없게 만드는) 한다는 것은 '피제수에서 제수를 한 번 또는 여러 번 뺄 때, 피제수의 나머지가 없는 상태'를 말한다. 그리고 이 때의 제수가 약수이다.

예를 들면, 12의 약수는 12에서 나머지가 없이 한 번 또는 여러 번 뺄 수 있는 수를 말한다. 12에서는 1을 12번, 2를 6번, 3을 4번, 4를 3번, 6을 2번, 12를 1번 뺄 수 있다. 그리고 이 수들은 약수의 범위에서 얘기 한 바와 같이, 1 이상 12 이하인 자연수 안에 포함되어 있으므로 1부터 12까지 수들을 12에서 차례로 뺄 때, 12의 나머지가 없이 뺄 수 있게 하는 수를 찾으면 된다.

즉, 12에서 같은 수를 12의 나머지가 없이 뺄 수 있게 하는 수(나머지가 0인, 나머지가 없게 만드는), 1, 2, 3, 4, 6, 12는 12의 약수가 된다.

세 번째 방법은 피제수를 나누어 떨어지게(나머지가 0인, 나머지가 없게 만드는) 한다는 것은 '피제수에 제수를 한 번 또는 여러 번 더했을 때, 나머지가 없이 피제수가 나오는 상태'를 말한다. 그리고 이 때의 제수가 약수이다.

예를 들면, 20의 약수는 1이 20번, 2가 10번, 4가 5번, 5가 4번, 10이 2번, 20이 1번 포함된다. 즉, 1을 20번, 2를 10번, 4를 5번, 10을 2번, 20을 1번 더하면 20이 된다. 그리고 이 수들은 약수의 범위에서 얘기 한 바와 같이, 1 이상 20 이하인 자연수 안에 포함되어 있으므로 1부터 20까지 수들 중에서 같은 수를 한 번 또는 여러 번 20에 포함 시켰을 때, 나머지가 없이 포함되게 하는 수, 즉, 1부터 20까지 수들 중에서 같은 수를 여러 번 더했을 때, 20이 나오게 되는 수를 찾으면 된다.

20에서 같은 수를 여러 번 더했을 때, 피제수가 나오게 하는 수 1, 2, 4, 5, 10, 20이 20의 약수가 된다.

네 번째 방법은 피제수를 나누어 떨어지게(나머지가 0인, 나머지가 없게 만드는) 한다는 것은 '두 수를 곱하였을 때, 피제수가 나오게 하는 수',와 같은 뜻을 가진다.

즉, '(피제수)÷(제수)=(몫)'은 등식의 성질에 의해서 '(피제수)=(제수)×(몫)'이 되므로 제수와 몫의 곱은 피제수가 나오게 만드는 두 수의 곱이고 동시에 제수와 몫은 피제수의 약수가 된다.

예를 들면, 16의 약수는 두 수를 곱했을 때, 16이 나오게 되는 수들이다.

16=1×16, 16=2×8, 16=4×4, 이 수들 또한 약수의 범위에서 얘기 한 바와 같이, 1 이상 16 이하인 자연수 안에 포함되어 있으므로 1부터 16까지의 수들 중에서 두 수를 곱해서 16이 나오게 되는 수들을 찾으면 된다. 그리고 곱셈은 같은 수의 덧셈을 간편하게 표현한 것이기 때문에 세 번째 방법에서 얘기한, '같은 수의 덧셈으로 피제수가 나오게 하는 수'와 같은 뜻을 지니고 있다. 왜냐하면 1×16은 1을 16번, 2×8은 2를 8번, 4×4는 4를 4번 더한 것을 나타내기 때문이다. 그러므로 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈은 서로 연결되어 있고, 서로를 다른 방법으로 표현 할 수 있다.

즉, 두 수를 곱해서 16이 나오게 되는 1과 16, 2와 8, 4(4×4이지만 같은 수가 2개 있으므로 하나만 사용하여)는 16의 약수가 된다.

다섯 번째 방법은 '소인수분해'를 이용한 방법이다. 소인수분해는 합성수를 소수의 곱의 꼴로 바꾸는 일을 말한다. 그러므로 소인수분해에 사용된 소수와 소수인 인수들의 곱은 합성수의 약수가 되고, 합성수는 소수의 배수가 된다.

예를 들어 18의 약수는 18을 소인수분해 하면, 2×3×3이 되므로 각각의 소인수 (2 , 3)와 소수인 인수들의 곱 (2×3=6, 3×3=9, 2×3×3=18)은 18의 약수가 되고 모든 수들의 약수인 1또한 약수가 되어, 1, 2, 3, 6, 9, 18이 18의 약수가 되는 것이다.

소인수분해에 사용된 소수와 소수인 인수들의 곱이 합성수의 약수가 되는 이유를 예를 들어 설명하면, 30을 소인수분해 하면, 2×3×5가 되고 30은 소수 2의 15배 (2×15), 소수 3의 10배 (3×10), 소수 5의 6배 (5×6)이므로 약수의 일차적 개념에 의해서 소수 2, 3, 5는 피제수 30을 나누었을 때 나누어 떨어지게 하는 수(나누었을 때, 나머지가 0이 되게 하는 수, 제수의 배수가 되는 피제수)이므로 소인수 분해에 사용된 소수가 합성수의 약수가 된다. 그리고 소수는 '에라토스테네스의 체'[1])에 의해서 걸러진 수이고, '에라토스테네스의 체'에 걸러지지 않은 수들은 1을 제외한 자연수 중, 2이외의 2의 배수, 3이외의 3의 배수, 5이외의 5의 배수, 7이외의 7의 배수이므로 소수는 합성수[2]) 또는 배수의 약수가 되는 것이다. 그래서 소수인 2, 3, 5와 소수인 인수들의 곱인 6(2의3배, 2×3), 10(2의5배, 2×5), 15(3의5배, 3×5), 30(2의15배, 3의10배, 5의6배, 2×15,

---

1) 그리스의 수학자이자 지리학자인 에라토스테네스가 고안한 소수를 찾는 방법. 에라토스테네스는 지구 둘레의 길이를 처음으로 계산한 것으로도 유명하다. 에라토스테네스의 체로 소수를 찾으려면, 먼저 자연수를 차례로 쓴 다음, 1을 제외한 2~10까지의 수중에서 2 이외의 2의 배수, 3 이외의 3의 배수, 4 이외의 4의 배수, 5 이외의 5의 배수, 순서로 수를 지워나간다. 그러면 체로 친 것처럼 끝에 남는 수가 있다. 이 수가 바로 그 자신과 1 이외의 다른 수로는 나누어 떨어지지 않는 소수이고, 이렇게 소수를 찾는 방법을 에라토스테네스의 체라고 한다.

2) 1 이외의 소수가 아닌 정수. 즉, 두 수 이상의 정수들의 곱으로 나타낸 수를 말한다.

3×10, 5×6)과 모든 수의 약수인 1은 30의 약수가 되므로, 30의 약수는 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30이 된다.

즉, $2\times3\times5$는 합성수 30을 소인수분해 한 것이므로 $2\times3\times5$은 각각의 소수, 2, 3, 5 그리고 2×3, 2×5, 3×5, $2\times3\times5$의 배수가 되고, 반면에 소인수분해에 사용된 소수, 2, 3, 5 그리고 2×3, 2×5, 3×5, $2\times3\times5$는 $2\times3\times5$의 약수가 된다. 그러므로 모든 수의 약수인 1과 소인수분해에 사용된 각각의 소수, 2, 3, 5 그리고 6, 10, 15, 30이 30의 약수 (1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30)가 된다.

또한, 나눗셈을 하나의 틀에서 여러 번을 한 다음, 제수들의 곱으로 소인수 분해를 하여 약수를 구하는 방법이 있다.

$$2\times6=12$$
$$2\times2=4,\ 4\times3=12$$
$$2\times2\times3=12,\ 12\times1=12.$$

그러므로 12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이다. 그런데 왜, 나눗셈 틀의 왼쪽에 있는 제수끼리 곱해서 (2×2와 $2\times2\times3$) 약수(피제수를 나누어 떨어지게 하는 또 다른 제수)를 구할까?

그것은 나눗셈, 약수, 소수 그리고 배수들의 포함관계를 연결한 스키마를 형성해서 생각해 보면 쉽게 알 수 있다. 그 틀의 왼쪽에 있는 제수들은 이미 피제수를 나누어 떨어지게 한(나누었을 때, 나머지가 0이 되게 하는, 제수의 배수가 되는) 약수이고, 피제수는 이 제수들(틀의 왼쪽에 있는 소수인 약수들)의 배수이므로 이 제수들의 곱은 소수인 약수들의 배수가 되고, 피제수는 이 배수들의 배수(소수인 약수들의 곱은 피제수의 약수)가 된다.

위의 12의 약수를 예로 들면, 12는 6과 2의 배수이고, 6은 3과 2의 배수이므로 삼단 논법에 의해서 12는 2와 3의 배수가 된다.

(12의 배수의 집합)⊃(6의 배수의 집합)⊃(2 또는 3의 배수의 집합)

그러므로 나눗셈 틀의 왼쪽에 있는 소수인 약수들 2와 3은 12를 나누어 떨어지게 하는(나누었을 때, 나머지가 0이 되게 하는, 제수의 배수가 되는) 수이므로 12의 약수가 되고, 12는 소수인 약수 2의 6배 ($2\times6=12$), 3의 4배($3\times4=12$), 그리고 모든 수의 약수인 1의 12배가 되어, 12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12가 된다. 그렇기 때문에 약수 4, 6, 12는 나눗셈 틀의 왼쪽에 있는 소수인 약수들의 곱, 2×2, 2×3, $2\times2\times3$으로 구할 수 있다.

2	12
2	6
3	3
	1

(나눗셈 틀)

즉, (피제수)÷(제수)=(몫)은 등식의 성질에 의해서,
(피제수)÷(제수)×(제수)=(몫)×(제수)가 되고, 여기에서 (피제수)÷(제수)는 나눗셈의 일차적 개념에 의해서 ($\frac{\text{피제수}}{\text{제수}}$)가

되므로 $\left(\frac{\text{피제수}}{\text{제수}}\right)\times(\text{제수})=(\text{몫})\times(\text{제수})$가 되고 $\left(\frac{\text{피제수}}{\text{제수}}\right)\times(\text{제수})$가 교환법칙과 분수의 곱셈에 의해서, $\left(\frac{\text{피제수}\times\text{제수}}{1\times\text{제수}}\right)=\left(\frac{\text{피제수}}{1}\right)\times\left(\frac{\text{제수}}{\text{제수}}\right)$이 되어, $(\text{피제수})=(\text{몫})\times(\text{제수})$가 된다.
따라서 12의 약수는 나눗셈 틀의 왼쪽에 있는 소수인 약수들 2, 3과 모든 수의 약수가 되는 1은 피제수를 나누어 떨어지게 하는(나누었을 때, 나머지가 0이 되게 하는, 제수의 배수가 되는) 제수가 되므로 이 제수와 곱해져서 피제수 12가 되게 하는 수(피제수 12의 몫)를 찾으면 된다. $(12=2\times6,\ 12=3\times4,\ 12=1\times12)$. 그래서 12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12가 된다. 그리고 $(\text{피제수})\div(\text{제수})$가 $\left(\frac{\text{피제수}}{\text{제수}}\right)$가 되는 이유를 예를 들어 설명하면, $(3\div5)$는 나눔을 당하는 수(피제수) 3에 나누는 수(제수) 5가 얼마만큼 포함되는지를 아는 것이다. $(3\div5)$의 경우, 피제수 3이 제수 5보다 작기 때문에 제수 5가 피제수 3에 포함 될 수 없는 것처럼 보이지만(제수 5 전체가 피제수 3에 포함이 되지는 못하지만), 제수 5중에서 3은 포함되기 때문에(만약 다 성장한 코끼리가 소형 경승용차에 탄다면 코끼리 몸 전체가 경승용차에 다 들어가지는 못하지만 앞 발 두 개 정도는 태울 수 있는 것과 비슷한 이치) $\frac{3}{5}$이 된다. 그러므로 제수 5가 분모가 되고, 피제수 3이 분자가 되어, $(\text{피제수})\div(\text{제수})$는 $\left(\frac{\text{피제수}}{\text{제수}}\right)$가 된다.

2) 공약수의 개념(나눗셈과 약수의 일차적 개념을 결합한 이차적 개념)

(i) 두 개 이상의 정수 또는 다항식에 공통인 약수.
즉, 두 개 이상의 정수에 공통적으로 포함되는 약수.
(ii) 다항식을 동시에 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 수.
즉, 두 개 이상의 정수를 동시에 나누어 떨어지게 하는 수.

① 공약수의 범위

공약수는 두 개 이상의 정수 또는 다항식을 동시에 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하거나 두 개 이상의 정수 또는 다항식에 공통적으로 포함되는 약수이므로 공약수는 두 개 이상의 정수들 중에서 작은 정수의 약수 안에 존재한다.

$$(\text{공약수의 집합})\subset(\text{두 수 중에서 작은 정수의 약수의 집합})$$

예를 들면, 2와 6을 동시에 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 수는 2의 약수인 1, 2 와 6의 약수인 1, 2, 3, 6중에서 2의 약수인 1, 2안에 존재한다. 그러므로 가장 작은 공약수는 1이고 가장 큰 공약수는 2와 6의 약수에 공통적으로 들어가는 약수 중에서 가장 큰 약수인 2가 된다.

② 공약수를 구하는 방법

공약수란 나눗셈과 약수의 일차적 개념을 결합한 이차적 개념이다. 그러므로 나눗셈과 약수의 일차적 개념의 연결에 의해서 스키마를 형성해 보면 문제 해결에 접근 할 수 있는 여러 가지 방법이 유추될 수 있다.

첫 번째 방법은 두 개 이상의 정수에 공통적으로 포함되는 약수를 찾는 방법이다. 그러기 위해서는 우선 각각의 정수를 나누어 떨어지게 하는 약수를 구한 다음, 각각의 정수에 똑같이 포함되어 있는 약수를 찾으면 된다.

예를 들어 6과 8의 각각의 약수를 구해 보면,

6의 약수 : 1, 2, 3, 6

8의 약수 : 1, 2, 4, 8

이고, 이 두 정수에 공통적으로 포함되는 약수는 1, 2이므로 6과 8에 공통적으로 포함되는 약수, 1, 2는 이 두 정수의 공약수가 된다.

두 번째 방법은 두 개 이상의 정수를 동시에 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 수를 찾는 방법이다. 두 개 이상의 정수를 동시에 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 수는 각각의 정수에 공통적으로 포함되는 약수를 뜻한다. 그러므로 두 개 이상의 정수를 같은 수로 나누어 나머지가 없이 나누어 떨어지게 하는 제수를 찾으면 된다.

예를 들어 12와 16을 각각 나누어 보면,

$$12\div1=12,\ 12\div2=6,\ 12\div3=4,\ 12\div4=3,\ 12\div6=2,\ 12\div12=1$$

$$16\div1=16,\ 16\div2=8,\ 16\div4=4,\ 16\div8=2,\ 16\div16=1$$

이고, 이 두 정수를 나눌 때, 공통적으로 들어가는 제수가 1, 2, 4이므로 이 두 정수의 공약수는 1, 2, 4가 된다.

세 번째 방법은 소인수분해를 이용한 방법이다. 약수를 구할 때와 마찬가지로 두 개 이상의 정수들을 커다란 나눗셈 틀에 놓고 두 개 이상의 정수들을 동시에 나누어 떨어지게 하는 소수(소수인 약수)를 찾아 그 소수(소수인 약수) 자체와 모든 수의 약수이자 공약수인 1과, 소수들끼리의 곱(소수인 약수들끼리의 곱)에 의해서 공약수를 구할 수 있다. 각각의 소수들끼리의 곱(소수인 약수들끼리의 곱)이 공약수가 되는 이유는 소수인 약수들의 곱 자체도 두 개 이상의 정수들의 약수가 되기 때문이다.

예를 들어 12와 16을 동시에 소인수분해 해 보면, $12=2\times2\times3$이고 $16=2\times2\times2\times2$이다. 이때 12와 16에 공통적으로 포함되어 있는 소수들의 곱은 2×2이다. 즉, 12와 16을 각각 소인수분해 한 $2\times2\times3$과 $2\times2\times2\times2$는 2×2의 배수가 되고, 동시에 2×2는 $2\times2\times3$과 $2\times2\times2\times2$의 공약수가 된다. 그러므로 두 개 이상의 정수들을 동시에 나누어 떨어지게 하는 소수들의 곱은(소수인 약수들의 곱은) 두 개 이상의 정수들의 공약수가 되는 것이다. 또한 소수는 1과 자기 자신이외의 수로는 더 이상 나누어 떨어지지 않기 때문에 소인수분해를 이용한 공약수를 구하는 방법은 다시 한

번 나누게 되는 번거러움을 피할 수 있는 특징을 가지고 있다. 그러므로 두 정수를 나누어 떨어지게 하는 각각의 소수 2와 소수의 곱 2×2=4, 그리고 모든 수의 약수이자 공약수인 1을 포함한 1, 2, 4가 12와 16의 공약수가 된다.

3) 최대공약수(나눗셈과 약수의 일차적 개념 그리고 공약수의 개념으로 구성된 스키마)

(i) 두 개 이상의 정수들의 공약수 중에서 최대인 것(가장 큰 공약수).
(ii) 두 개 이상의 정수들을 각각 소인수분해 한 것 중에 공통적으로 포함되어 있는 소수 또는 소수들의 곱(소수인 약수들의 곱) 중에서 가장 큰 값.
(iii) 두 개 이상의 정수들을 나눗셈 틀에 놓고 동시에 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 소수 또는 소수들(소수인 약수)을 곱 중에서 가장 큰 값.

① 최대공약수의 범위

최대공약수는 두 개 이상의 정수 또는 다항식을 동시에 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하거나 두 개 이상의 정수 또는 다항식에 공통적으로 포함되는 약수 중의 최대인 것(가장 큰 공약수)을 뜻하므로 공약수 안에 포함되는 약수 중의 하나이다.

즉, 최대공약수는 공약수 중의 가장 큰 공약수를 말하며, 공약수 안에 포함되는 약수이므로 공약수와 같은 범위를 갖는다.

(최대공약수) ∈ (두 개 이상의 정수 중, 작은 정수의 약수의 집합)

예를 들면, 12와 18을 동시에 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 수중의 가장 큰 수는 12의 약수인 1, 2, 3, 4, 6, 12와 18의 약수인 1, 2, 3, 6, 9, 18 중에서 12의 약수인 1, 2, 3, 4, 6, 12안에 존재한다. 그러므로 가장 작은 공약수는 1이고 가장 큰 공약수(최대공약수)는 12와 18의 약수에 공통적으로 들어가는 약수 중에서 가장 큰 약수인 6이 되는 것이다.

② 최대공약수를 구하는 방법

최대공약수는 나눗셈과 약수 그리고 공약수의 개념들로 연결된 개념이다. 그러므로 나눗셈과 약수 그리고 공약수의 개념 연결에 의해서 스키마를 형성해 보면 문제 해결에 접근 할 수 있는 여러 가지 방법이 유추될 수 있다.

첫 번째 방법은 두 개 이상의 정수들의 공약수 중에서 최대인 것(가장 큰 공약수)이 최대공약수를 뜻하므로 먼저 피제수를 나누어 떨어지게 하는 각각의 제수, 즉 약수들을 구한 다음 그 약수들의 공약수를 구하고 그 중에서 가장 큰 공약수를 구하면 된다.

예를 들어 10과 15의 최대공약수를 구해 보자.

10의 약수는 1,2,5,10이고, 15의 약수는 1,3,5,15가 되어, 10과 15의 공약수는 1과 5가 된다.

그리고 10과 15의 공약수 중, 가장 큰 공약수(최대공약수)는 5가 되므로 10과 15의 최대공약수는 5가 된다.

두 번째 방법은 두 개 이상의 정수들을 각각 소인수분해 한 것에 공통적으로 포함되어 있는 소수 또는 소수들(소수인 약수들)의 곱 중에서 가장 큰 값이 최대공약수를 뜻하므로 먼저 각각의 정수들을 소인수분해를 한 다음, 공통적으로 포함되어 있는 소수 또는 소수들의 곱을 찾아 그 곱 중에서 가장 큰 값을 구하면 그 값이 최대공약수이다.

소인수분해는 합성수를 소수들의 곱의 형태로 나타낸 것이다. 그리고 이때 사용된 소수 또는 소수들의 곱은 합성수의 약수가 되고 합성수는 이들의 배수가 된다. 그러므로 각각의 합성수를 소인수분해한 것에 공통적으로 포함되어 있는 소수 또는 소수들의 곱은 두 개 이상의 합성수들의 공약수가 되고, 이러한 소수 또는 소수들의 곱 중에서 가장 큰 값이 최대공약수가 되는 것이다.

예를 들어 12와 16의 최대공약수를 구하기 위해 12와 16을 각각 소인수분해를 해 보면, $12=2\times2\times3$, $16=2\times2\times2\times2$가 되고 여기에 공통적으로 포함되어 있는 소수 또는 소수들의 곱이 각각 2, 2×2이므로 $2\times2=4$가 된다. 그러므로 2, 4 중에서 가장 큰 값, 즉 4가 최대공약수이다.

세 번째 방법은 두 개 이상의 정수들을 나눗셈 틀에 놓고 동시에 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 소수 또는 소수들(소수인 약수)의 곱 중에서 가장 큰 값이 최대공약수를 뜻하므로 먼저 두 개 이상의 정수들을 나눗셈 틀에 놓고 그 정수들의 소수인 공약수를 구한 다음, 소수인 공약수 또는 공약수들의 곱 중에서 가장 큰 값을 구하면 그 값이 최대공약수가 된다.

예를 들면, 8과 12의 약수를 구하기 위해서 나눗셈 틀에 놓고 동시에 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 소수인 공약수 또는 소수의 공약수의 곱 중에서 가장 큰 값은 $2\times2=4$이다. 그러므로 4는 8과 12의 최대공약수가 된다.

2	8	12
2	4	6
	2	3

(나눗셈 틀)

V. 결 론

수학은 추상적인 학문이고 많은 개념들이 여러 가지 모양으로 모여서 만들어진 개념의 덩어리이다. 하지만 너무나 많은 학생들이 이러한 개념을 이해하고 또 자기 나름대로 하나, 둘씩 개념들을 모아 구성하면서 문제를 해결하기보다는 단순히 암기한 공식에 따라 의미가 거의 없는 기호의 조작만을 연습하기 때문에 수학에 대한 흥미와 수학의 필요성을 느끼지 못하고 있을 뿐만 아니라, 수학의 힘 또한 느끼지 못하고 있다. 또한 새로운 단원으로 넘어갈 때, 학생들은 더욱 더 힘들어하고 수학을 포기하는 사례까지 나타나게 되었다. 이러한 결과는 수학을 관계적으로 이해하지 않고 다만 단순히 교과서의 문제를 풀기 위해 배우는 도구적 이해의 수학이기 때문에 일어나는 현상이 아닌가 생각

한다. 그러나 초등학교 학생들은 수학을 관계적으로 이해하기를 원하고 또한 자신이 가지고있는 개념과, 개념의 구조인 스키마(Schema)에 연결하여 문제를 해결하기를 원한다.

여러 사설교육기관이나 국립기관 그리고 개인 교습 등을 통한 선수학습으로 인하여 초등학생들은 많은 양의 개념과 문제 해결 방법을 알고 있으나, 이러한 초등학생들 중에서 그러한 공식과 방법이 어떻게 해서 나오는가를 아는 학생은 거의 없었다. 또한 그들이 알고 있는 대부분의 개념은 중, 상위 개념과 그 개념들의 구성으로 만들어진 개념들뿐이고 가장 기본적인 1차적 개념은 잘 알지 못하고 있기 때문에 스키마와 스키마 사이의 간격이 연결이 되지 않아 동화가 잘 이루어지지 않는 경우가 대부분 이었다.

이에 본 논문에서는 초등학생들이 수학을 관계적으로 이해를 하는데 도움을 줄 수 있도록 스키마를 중심으로 약수에 관한 내용연구와 약수의 스키마적 구성에 필요한 사칙연산의 내용연구를 해 보았다.

학생들은 자신이 알고 있는 개념 또는 스키마와 교사가 제공하는 개념 또는 스키마사이의 간격이 멀면 멀수록 이해보다는 암기를 하려고 하는 성향이 나타나 수학에 흥미를 잃어 금방 지루해 하는 반면에 그 간격을 줄이면 줄일수록 수학에 흥미를 느끼고 고학년의 수학내용, 문장제 문제, 생활속의 수학문제 까지도 스스로 파악하고 다양한 방법으로 해결하려는 성향이 나타난다. 이것은 스키마식 수업이 학생들의 스키마와 교사가 제공하는 스키마 사이의 간격을 좁혀줌으로써 동화와 조절작용이 일어나 근본적인 원리를 이해하게 하고 학생들 스스로가 구성한 개념들의 구성체인 스키마로 문제 해결에 접근하기 때문이다.

스키마를 이용한 수업은 학생들로 하여금 조직화되고 추상화된 수학을 능동적으로 구성하게 함으로써 수학의 원리와 필요성을 동시에 느끼게 해 주어 수학도 다른 과목 못지 않게 재미있다는 것을 느끼게 할 수 있다고 생각한다.

참 고 문 헌

라병소 (1999). 수학 학습에서의 관계적이해를 위한 스키마 구성에 관한 연구, 단국대학교 박사학위 논문.

R. Skemp 지음 · 황우형 옮김 (1997). 수학 학습심리학, 민음사.

김성숙 · 이상덕 · 김화수 (2002). 수학의 관계적이해를 위한 스키마식 수업모델 제시, 한국수학교육학회.

이규봉 · 김성숙 · 김화수 (2003). 수학의 산책, 경문사.

이상덕 · 김화수 (2003). 스키마식 수업이 초등 수학교육과정에 미치는 영향, 수학교육논총 제 24, 서울 : 대한 수학교육학회.