韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제 1호, 2004. 1. 123-136.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 1, Jan. 2004. 123-136.

중학교 2학년 증명 지도 방법에 관한 연구

-정의와 성질의 구분을 중심으로-

김 창 일 (단국대학교)
정 승 진 (단국대학교)
윤 혜 순 (단국대 대학원)

수학이라는 학문 자체가 몇 가지 정의와 공리로부터 논리 법칙을 이용하여 명제나 정의를 유도하고 확장하는 공리적인 성격을 지니고 있기 때문에 그러한 논리 전개의 진위 여부를 판별해주는 증명은 수학에서 아주 중요하다. 특히 중학교 2학년 학생들은 정의와 성질을 이용한 증명을 다루는데 정의와 성질의 역할을 제대로 구분하지 못할 경우 증명 자체가 어려워진다. 학생들을 가르치다 보면 정의와 성질을 구분하지 못하고 증명과정에서 정의와 성질이 어떤 역할을 하는지 제대로 알지 못하는 경우가 종종 있다. 본 연구에서는 정의와 성질의 구분 실태를 조사하고, 정의와 성질의 구분에 어려움이 있는 학생들을 대상으로 증명과정에서 정의와 성질의 역할에 대하여 학생들이 겪는 어려움과 처치과정의 사례 연구를 통하여 분석함으로써 증명 교육의 바람직한 방안을 모색하고자 한다.

I. 서 론

수학에서 증명은 매우 중요한 위치를 차지하고 있다. 수학이라는 학문 자체가 몇 가지 정의와 공리로부터 논리 법칙을 이용하여 명제나 정의를 유도하며 확장하여 나가는 공리적인 성격을 지니고 있는데, 그러한 논리 전개가 옳은지 아니면 오류가 있는지를 판별해주는 기준이 되는 것이 증명이다(서동엽, 1992).

학교수학에서 증명이 중요한 역할을 함에도 불구하고 증명지도는 성공적이지 못한 것으로 나타났다(우정호, 1998). 교사들도 학생들이 증명을 할 수 있기를 기대하기보다는 정리의 활용을 강조한다. 증명 수업은 교사의 시범, 학생들의 모방, 암기의 패턴으로 피상적으로 이루어지고 있으며, 그 결과 학생들은 증명에 필요한 수학적인 생각을 하기보다는 교사가 제시하는 증명 절차를 따르게 되고, 증명이 끝난 다음에도 증명의 의미를 이해하지 못하게 된다.

증명 교육의 실패원인은 절대 주의 수학 철학의 영향을 받아 유클리드 기하를 중심으로 연역적이고 형식적이며 엄밀한 증명을 강조해 온데서 찾을 수 있다. 학생들의 증명 능력을 조사하기 위하여 수행된 여러 연구 결과를 보면 우리나라 중학생들이 증명 능력은 대략 10 - 30% 정도의 학생들만이 기본적인 정리를 증명할 수 있는 수준으로서 매우 낮음을 알 수 있다.

중학교 2, 3학년 기하 단원에서 수많은 증명문제가 다루어지고 있음에도 불구하고 증명에 대한 학생들의 성취도가 극히 낮다는 것은, 그러한 지도가 증명 능력을 향상시키는데 별 도움이 되지 못함을 보여주고 있는 것이다(우정호 · 서동엽 1999).

중요한 것은 증명에서 근거로 사용하는 것들은 무엇이고 어떻게 구분되는가와 다음으로 이들을 사용하여 어떻게 조리 있게 참임을 설명하는(또는 밝히는) 것이다. 그런데 증명을 하기 위한 근거로 제시하고 있는 '이미 알고 있는 정의나 옳다고 밝혀진 성질'들이 어떤 것들인가에 대한 명확한 제시가 없다. 따라서 주어진 명제에 대한 증명을 시작하려고 할 때에 그 증명에 필요한 근거들을 선택해야 하는데 어떤 것들을 증명 없이 받아들여야 하는지 명확하게 판단이 서지 않는 막막한 상태가 되어 한 발도 나아갈 수 없게 되기도 한다. 이러한 방법으로 증명을 처음 다룬다면 다시 한 번 더 수학이 어려운 과목으로 부상하여 당황하게 된다(김홍기, 2001).

중학교 단계에서 증명의 시작은 가정에 포함되어 있는 도형의 정의를 아는 것에서 출발해야 함을 고려한다면, 정의의 지도가 중요함은 당연하다. 그리고 8-나 단계 교과서에서는 가정에서 결론으로 증명을 전개할 때, 반드시 기본이 되는 성질이나 이미 옳다고 밝혀진 성질에 근거해야 함을 강조하고 있다. 따라서 학생들의 증명 학습에서 '정의'와 '기본이 되는 성질이나 이미 옳다고 밝혀진 성질'에 대한 충분한 이해가 필요하다고 할 수 있다.

또한 증명학습에서 학생들이 성취도가 낮은 이유를 규명하기 위해 학생들이 증명을 학습하고 난 후의 정의와 성질에 대한 이해 상태를 조사하여 증명과정에서 어떠한 요소가 어려움이 되는 지를 분석함으로써 증명 교육의 바람직한 방안을 모색하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 학교 수학에서의 증명

현재 학교 수학에서의 증명 지도의 어려운 점은 연역적이고 형식적인 증명만을 강조하는 데 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 다음의 절대주의, 상대주의 증명관을 살펴보고 형식적인 수준에서의 증명활동이 이루어지기 전에 다양한 경험적인 활동의 기회를 제공하여 자연스럽게 다른 수준의 증명 방법을 모색하고자 한다

1) 절대주의

절대주의 관점에서 증명은 객관적이고 절대적인 수학적 지식이 참임을 보장하는 유일한 수단이며 공리 체계 내에서 수학적 진리를 공리에서 공리로 전달하는 메커니즘으로 작용한다. 즉, 참인 공리와 정의에서 출발하여 논리적 추론 규칙을 이용하여 연역적 증명에 의해 참이라고 인정된 명제가 수학적 정리가 된다. 절대주의 관점에서는 연역적 증명에 의해 입증된 모든 수학적 정리는 참이며 절대적 의미에서 증명된 수학적 지식의 확실성을 믿을 수 있다(Ernest.1991)

절대주의 수학철학의 증명관에서 문제는 증명의 역할, 증명의 타당성에 대한 기준, 엄밀성 세 가지 측면에서 생각할 수 있다. 첫째, 증명의 역할이 수학적 지식의 절대적 확실성을 입증하는 것으로 제한되지 않는다. 증명은 지식을 보다 깊이 있게 이해하고 수학적 지식에 대한 의사소통의 역할이 강

하다(Hanna & Jahnke, 1996). De Villiers(1990)는 증명의 역할을 입증, 설명, 체계화, 발견, 의사소통 다섯 가지로 제시하고 있다. 둘째, 증명의 타당성에 대한 기준이 다양하다. 절대주의 수학 철학 내에서도 논리주의, 형식주의, 직관주의에 따라 증명의 타당성에 대한 기준이 논리, 형식, 내성적인 구성으로 각각 다르다. 사회적 구성주의에서는 수학적 지식을 사회적 합의를 통한 구성의 결과로 보고 있으며, 이러한 관점에서 증명의 타당성을 수용하는 기준은 당대의 수학 사회의 합의에 있다. 셋째, 엄밀성의 문제로 엄밀성에 대한 기준은 활동중인 수학자들마다 다르다. Thom(1971)은 엄밀성에 대한 엄밀한 정의는 없다고 비판하면서 적절히 교육을 받아 그것을 이해할 만한 준비가 되어 있는 모든 독자들에게 받아들여지면 엄밀한 증명으로 볼 수 있는 즉, 엄밀성의 수준을 수학자 사회 공동체가 승인하는 정도로 규정하고 있다.

2) 상대주의

증명이란 명제를 정당화하는데 필요한 주장이며, 납득이 되기만 하면 몇 가지 다른 형식을 가질 수 있다. 증명은 '공개 토론'(Davis), '어떤 개방성과 유연성을 갖는 것'(Tymoczko) 등으로 묘사되어 왔다.

수학에서의 증명이 어떤 식으로 사회적 과정을 고려하고 있고, 수학 교육에 나오는 형식적 증명의 개념을 어떻게 초월하고 있는가를 Lakatos와 Tymoczko 등의 견해를 통해서 알아보면 다음과 같다 (류희찬 · 조완영 · 김인수 역, 2003).

Lakatos는 수학이 바로 수학적 속성 때문에 오류가 가능하다고 주장한다. 그래서 수학에 대한 그의 견해는 논리주의자나 형식주의자와는 달리, 수학이 실패에 의해 분명하게 영향을 받는다는 것이다. Lakatos는 수학이 비록 경험과학은 아니지만 경험 과학의 방법들과 매우 유사하다고 주장하면서 수학을 준 경험적(quasi-emperical)인 성격을 지니는 학문으로 파악하였다. 사실 수학은 '고찰과 비평, 증명과 반박의 논리에 의한 추측의 끊임없는 개선'을 통하여 발달한다. 어떠한 증명도 끝난 것은 없으며, 실제로 증명은 시작부터 형식적 준거를 적용하기보다는 의미를 타협하는 사회적 과정으로 의미와 타협을 통하여 증명을 개선하고 증명의 결과를 수용하게 된다.

Tymoczko는 수학자가 하는 일은 수학적 지식에 관한 철학적인 의문들과 관계가 있다고 생각하는 수리 철학자이다. 그는, 영구 불변의 확실한 지식을 생성하기 위해 형식적인 연역절차만 따르면 된다고 생각하는 완전하고 합리적인 '이상적인 수학자'는 수리 철학에 도움이 되는 사람이 아니라고 주장한다. 수학적 지식에 관한 Tymoczko의 설명은 사회(community)에 중심을 두고 있으며, 수학을 가르치는 일은 물론 증명의 개념과 정리를 증명하는 것까지도 공적인 활동으로 보는 것이다. 그는 '증명 아이디어'는 비판에 영향을 받고 비판을 이끌어 내야 한다는 Lakatos의 증명관에 동조한다. Tymoczko는 때로는 비 형식적인 증명이 보다 설득력이 있고, 그로 인해 새로운 것을 발견할 수도 있다고 말한다.

Davis는 증명의 역할이 다양하다고 주장한다. 증명은 타당성을 제공하고, 새로운 발견을 이끌며 논쟁의 초점이 되기도 하고, 오류를 제거하도록 도울 수도 있다. 그는 Tymoczko와 마찬가지로, 전통

적인 논리주의, 형식주의, 직관주의 철학은 이상적인 수학을 기술하는 '사적인 이론들'일 뿐이고 수학은 사회적 활동이면서 공적인 이론이어야 한다고 주장한다.

3) 학교수학에서의 증명

절대주의 수리철학에서는 새로운 수학적 진리의 확실성을 보증하는 증명의 역할 수단으로서 강조한다. 반면, Lakatos(1976)의 준 경험주의 수리철학을 가정하고 있는 사회 구성주의 관점에서 증명은 확신의 수단이자 이해의 수단이다. 증명의 목적은 '엄밀함'이라는 추상적 기준을 만족하기 위해 의례적으로 행해지는 것이 아니라 학생들의 이해를 증진시키는 설명이다.

학교수학은 경험과학과 밀접한 관계가 있다. 학교수학에서 도형의 성질에 관한 정리를 도입할 때, 학생들의 경험에 호소하여 의미를 부여하는 것, 작도와 측정 등 경험적인 탐구활동을 통해 추측을 하고 추측이 참인지 또는 왜 참인지를 정당화하는 과정은 경험과학의 탐구방법과 직접적으로 관련되며 다음과 같은 특징이 있다.

첫째, 수학 특히 기하의 발생은 실용적인 토대 위에서 이루어졌으며, 이러한 것은 수학에 경험적인 차원이 존재함을 의미한다. 바빌로니아와 이집트의 초기 기하학은 실제 측량과 관계된 것이다. 이러한 경험적인 초기의 기하학이 그리스 시대의 탈레스 이후 논증기하로 발전하였다. 바빌로니아와 이집트의 경험적인 수학은 당시의 합리적인 사회적 분위기와 더불어 '어떻게' 뿐만 아니라 '왜' 라는 의문을 가지면서 기하에서의 논증방법과 연역적 특징이 두드러지게 되었다(이우영 · 신항균 역, 1995). 기하가 실생활에서의 필요성에 의하여 비롯된 것이고 학교수학에서는 관찰과 실험 등 경험적 자료가 중요한 역할을 할 수 있을 것이다.

둘째, 학생들은 심리적으로 경험적인 확인에 의존하는 실제적인 사고 방법을 가지고 있으며, 수학적인 명제의 타당성을 절대적으로 보증하려는 전통적인 증명방식과 기본적으로 상충되고 있다(우정호, 1998). 수학교사들은 증명이 필요하다고 생각하지만 학생들은 다양한 예에 대한 측정을 통해 확인을 했기 때문에 연역적 증명이 필요하다고 생각하지 않는다. 학생들의 현 수준에서 출발하여 새로운 수학을 학습해야 한다는 관점에서 볼 때 그들의 경험을 바탕으로 정당화하는 방법과 연결시키는 것이 타당한 지도 방법이라 하겠다

2. 증명에서 정의와 성질의 역할

1) 증명의 구성 요소로서의 정의와 성질(우정호 · 서동엽, 1999).

(1) Galbraith는 증명의 구성요소를 8가지로 제시하고 있는데 중학교 수학에서 정의에서 증명된 성질과 정의를 구분하는 것은 중요하므로 '정의와 성질의 구분'이라는 항목을 설정하였다.

(2) Dreyfus와 Hadars는 학생들이 증명학습에서 겪는 어려움을 분석한 후, 교사에게는 명백해 보일 수 있지만 대부분의 학생들에게는 잘 이해되지 않는 원리로서 여섯 가지를 들고 있다.

① 정리는 예외가 없으며 수학적 명제는 상상할 수 있는 모든 예에서 정확할 때에만 옳다.

② 명백한 명제조차도 증명되어야 하며 증명은 어떤 도형의 외견상의 특징에 따라 좌우되지 않는다.

③ 증명은 일반적이어야 하며 한 두 가지 특별한 경우로는 일반적인 명제를 증명할 수 없지만 하나의 반례는 그것을 반박하기에 충분하다 .

④ 어떤 정리의 전제가 명확히 확인되어야 하며 결론과는 구분되어야 한다.

⑤ 옳은 명제의 역은 반드시 옳지는 않다.

⑥ 복잡한 도형은 기본적인 여러 요소로 구성되며 그 요소는 증명에서 필수적인 역할을 할 수도 있고 제시된 도형이 표준적인 위치에 있지 않은 경우에도 정확히 해석된다.

위의 ④에서 전제가 되는 것은 정의와 이미 알려진 사실이나 증명된 성질이므로 정의와 성질의 구분이 중요하다고 할 수 있다.

2) 8-나 단계 교과서에 제시된 정의와 성질(정리)

▣ 정의

(1) 교과서1(최용준, 2003, p.44) : 용어가 가리키는 것이 무엇인지를 확실하고 간결하게 설명한 것

· 예각삼각형 : 세 내각의 크기가 모두 예각인 삼각형

· 직각삼각형 : 한 내각의 크기가 직각인 삼각형

· 둔각삼각형 : 한 내각의 크기가 둔각인 삼각형

(2) 교과서2(금종해 외, 2003, p.48) : 용어의 뜻을 명확하게 정하는 것

(1) 원은 '한 점으로부터 일정한 거리에 있는 점들의 모임'이라 정의한다.
(2) 정삼각형은 '세 변의 길이가 같은 삼각형'이라 정의한다.
(3) 명제는 '참, 거짓을 판단할 수 있는 문장'이라 정의한다.

(3) 교과서3(강행고 외, 2003, p.43) : 용어의 뜻을 명확하게 정한 문장

· 예각삼각형 : 세 내각의 크기가 모두 예각인 삼각형

· 직각삼각형 : 한 내각의 크기가 직각인 삼각형

· 둔각삼각형 : 한 내각의 크기가 둔각인 삼각형

▣ 정리

(1) 교과서1(최용준, 2003, p.46) : 증명된 명제 중에서 기본이 되는 명제나 다른 명제를 증명할 때 자주 사용되는 명제

· 이등변 삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.

· 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180도이다.

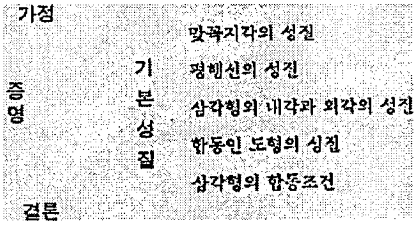
· 두 직선이 한 점에서 만날 때 생기는 맞꼭지각의 크기는 같다.

(2) 교과서2(금종해 외, 2003, p.50) : 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것

· 두 직선이 평행하면 한 쌍의 동위각의 크기는 서로 같다.

· 두 직선이 평행하면 한 쌍의 엇각의 크기는 서로 같다.

(3) 교과서3(강행고 외, 2003, p.44) : 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것이나 앞으로 여러 가지 성질을 증명할 때 활용이 되는 것



3) 8-나 단계 교과서의 증명과정에서 정의와 성질의 역할

(1) 교과서1(최용준, 2003, p.45)

▣ 증명 : 이미 알고 있는 옳은 사실이나 밝혀진 성질들을 이용하여 명제의 가정으로부터 결론을 이끌어내어 명제가 참인 이유를 설명하는 것

▣ 증명의 순서

① 주어진 명제를 가정과 결론으로 나눈다. 특히, 도형에 관한 명제이면 알맞은 그림을 그린 다음 필요한 기호를 붙인다.

② 가정과 그에 관련되는 정의, 정리, 성질 등을 생각하면서 가정에서 결론으로 이끌어낼 방법을 찾는다.

③ 위에서 찾아낸 조건으로 증명 방침을 세우고 차례로 설명한다.

▣ 증명의 예 :

'선분 AB의 수직이등분선 l 위에 점 P를 잡으면 PA=PB이다.'

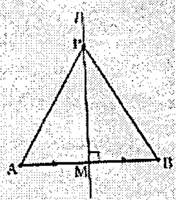
이 때, 이 명제가 참임을 설명하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB와 직선 l과의 교

음 M이라고 하자. 이 때,

[가정] $\overline{AM}=\overline{BM}$, $\angle AMP=\angle BMP=90°$

[결론] $\overline{PA}=\overline{PB}$



이제, 가정으로부터 결론을 이끌어 내어 보자.

$\triangle PAM$과 $\triangle PBM$에서 직선 l이 $\overline{AB}$의 수직이등분선이므로

$\overline{AM}=\overline{BM}$ …… ①

$\angle AMP=\angle BMP=90°$ …… ②

$\overline{PM}$은 공통 …… ③

①, ②, ③에서 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 같으므로

$\triangle PAM \equiv \triangle PBM$ (SAS 합동)

$\therefore \overline{PA}=\overline{PB}$

(2) 교과서2(금종해 외, 2003, p.49)

▣ 증명 : 이미 알고 있는 옳은 사실이나, 밝혀진 성질들을 이용하여 체계적으로 어떤 명제가 참임을 밝히는 것

▣ 증명의 예

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이다.

[가정] $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$는 삼각형의 세 내각이다.

[결론] $\angle A+\angle B+\angle C=180°$

[증명] 오른쪽 그림과 같이 변 BC의 연장선 위에 점 D를 잡고 꼭지점 C에서 변 AB에 평행인 직선 CE를 긋는다.

$\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{EC}$ 이므로

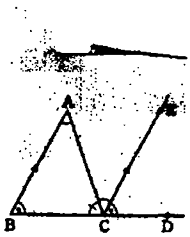
$\angle A=\angle ACE$(엇각)

$\angle B=\angle ECD$(동위각) 이다.

따라서,

$\angle A+\angle B+\angle C=\angle ACE+\angle ECD+\angle C$

$=\angle BCD=180°$(평각)



▣ 증명의 순서

1단계 : 문제에 알맞은 그림을 그리고 기호를 붙인다.

2단계 : 주어진 정리를 가정과 결론으로 나눈다.

3단계 : 증명에 필요한 정의, 기본 성질, 정리 등을 생각하여 증명 계획을 세운다.

4단계 : 증명계획에 따라 증명한다.

(3) 교과서3(강행고 외, 2003, p.44)

▣ 증명 : 어떤 명제가 참임을 밝히는 것.

▣ 증명의 순서 : 주어진 명제를 가정과 결론으로 나누고 가정과 그에 관련된 정의, 정리, 성질을 이용하여 결론을 이끌어내면 된다.

위의 교과서들의 증명과정에서 보여주듯이 도형의 정의 및 삼각형의 합동조건 등의 성질을 이용하여 명제의 가정에서 결론으로 이끌어낸다. 즉, 증명학습의 출발은 증명의 도구가 되는 도형의 정의와 성질을 명확하게 구별할 수 있도록 하고 주어진 명제에서 활용할 수 있는 조건이 무엇이고 증명해야 할 내용이 무엇인지를 인식시킨 후에 증명전략을 구성하도록 해야 한다.

Ⅲ. 연구의 실제

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 서울 시내에 위치한 ○○ 중학교 2학년 1개반 32명으로 하며 생활수준 및 학력수준(인문계진학 : 약 65%, 실업계 진학 : 35%)이 중하 정도로 판단된다.

2. 연구 방법

1) 증명에서 정의와 성질에 구분에 대한 사전 조사 질문지로 증명학습에서 학생들이 정의와 성질을 어느 정도로 구분하는지 알아본다.

2) 증명과정에서 학생들이 어떠한 방법으로 전개하는지를 조사한다.

3) 질문지에 정의와 성질을 구분하는 문제에서 바르게 답한 한 학생이 증명과정에서 정의와 성질을 어떻게 이용하는지를 토론 학습과정을 통한 프로토콜을 분석하고 이를 바탕으로 증명 과정에서의 정의와 성질의 역할에 대하여 분석한다.

3. 질문지 검사 도구

증명에서 학생들이 도형의 정의와 성질에 대한 이해정도를 파악하고 증명과정에서 가장 어려워하는 부분이 어떤 것인지를 알아내기 위해 도형의 정의와 성질을 표현하는 문제와 증명과정을 기술하는 문제로 구성된 질문지를 [부록 1]과 같이 작성하였다.

Ⅳ. 연구의 결과 및 분석

1. 질문지 결과 분석

1) 질문지 정답과 오답의 비율

질문지의 정답과 오답의 비율은 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 질문지의 정답과 오답의 비율

	1번	2번	3번	4번	5번
정 답 자	15/32	20/32	4/32	0/32	9/32
	약 47 %	약 63 %	약 13 %	약 0 %	약 28 %
오 답 자	17/32	12/32	28/32	32/32	23/32
	약 53 %	약 37 %	약 87 %	약 100 %	약 72 %

2) 오답의 분석과정

질문지의 정답과 오답을 구체적으로 분석한 결과는 다음과 같다.

첫째, 정의를 묻는 1번 문제에서 32 명중 17 명(약 53 %)의 학생이 잘 못 정의되어 있는 부분을 바르게 수정하지 못하였다.

오답의 예:

(1) 평행사변형 : 두 쌍의 대변의 길이가 같은 사각형 (질문지 제시된 정의)
⇒ 오답자중 주어진 정의가 옳다고 생각하고 아무런 수정도 하지 않은 학생이 10/17
한 쌍의 대변의 길이가 평행한 사각형이라고 답한 학생이 3/17
각각의 대변의 길이가 같은 사각형이라고 답한 학생이 1/17

(2) 직사각형 : 네 각의 크기가 같은 사각형(질문지에 제시된 정의)
⇒ 오답자중 대부분이 네 변의 길이가 같은 사각형이라고 답함.

(3) 정사각형 : 네 변의 길이가 같은 사각형(질문지에 제시된 정의)
⇒ 오답자중 2명이 네 각의 크기가 같은 사각형이라고 답하고 나머지는 정의를 수정하지 않음

(4) 사다리꼴 : 한 쌍의 대변이 평행한 사각형(질문지에 제시된 정의)
⇒ 두 쌍의 길이가 같은 사각형
두 쌍의 대변이 평행한 사각형

위의 예에서 학생들이 정의에 대한 학습이 전혀 이루어지지 않은 점과 평행사변형의 정의에서는 정의와 성질을 구분하지 못하고 있음(대변의 길이가 같은 사각형이라고 답함)을 보여준다. 증명학습에서 정의와 성질에 대한 이해는 매우 중요하다. 따라서 도형 학습의 기초가 되며 증명의 도구가 될 수 있는 정의에 대한 학생들의 이해를 돕기 위한 교수법을 찾아야 한다.

둘째, 여러 가지 사각형들의 관계를 묻는 2번 질문은 1번 문제와 마찬가지로 정의를 정확히 알고 여러 가지 사각형 사이의 관계를 알아야 하는 문제이다.

오답의 예

다음 여러 가지 사각형의 관계 중에서 옳지 않은 것은?
(1) 직사각형은 평행사변형이다.
(2) 마름모는 직사각형이다.
(3) 정사각형은 직사각형이다.
(4) 평행사변형은 사다리꼴이다.
(5) 마름모는 평행사변형이다.

⇒ (3)번 선택 : 4/12명(약 33 %), (4)번 선택 : 4/12명(약 33 %), (5)번 선택 : 1/12명(약 8 %),
무 응답 : 3/12명(약 25 %)

위의 문제에서도 사각형의 정의를 정확히 구분하지 못하며 여러 가지 사각형 사이의 관계 또한 이해하지 못하고 있다.

그런데 여기서 또 하나의 특징은 1번 문제에서 오답을 보였던 학생중 이 문제에서 정답을 쓴 학생이 8/17명(약 47 %)이나 되었다. 이것은 2번 문제가 사지선다형으로 제시되었기 때문에 정의와 성질을 정확히 구분하고 답을 했는지 확실하지 않으며, 실제로 그 학생들과 인터뷰를 통한 점검을 하지 못했다. 오답자중 3번과 4번을 주로 선택한 결과를 볼 때 도형의 정의와 성질보다는 도형의 모양으로 판단하는 경향으로 보여진다.

여기서 학생들은 도형의 정의와 성질에 대한 이해 이전에 무엇을 '정의'라 하며 수학의 증명학습에서 '성질'의 의미는 무엇인지조차 이해하기 어려운 상태라고 할 수 있다.

셋째, 3번 문제는 이등변 삼각형의 성질을 증명하는 문제인데 소수의 학생만이 정답을 제시했다.

그리고 정의에 대한 이해를 묻는 1번, 2번 문제에서 바르게 답한 학생이 증명문제에서는 정의와 성질을 적절하게 사용하지 않았다.

유형의 예를 제시하면 다음과 같다.

잘못된 증명의 예 : ⇒ 오답자중 20/28 명(약 71 %)은 아무런 제시도 하지 않았다.

⇒ 오답자중 8/28 명(약 29 %)은 다음과 같은 증명과정을 보였다

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 $\angle B=\angle C$ (질문지의 제시된 문제)

가정 : $\overline{AB}=\overline{AC}$

결론 : $\angle B=\angle C$

증명 : $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 이면

이등변 삼각형이므로 $\angle B=\angle C$ 이다.

이 예에서 보면 학생들이 증명하고자 하는 결론을 이미 알고 있는(증명된) 사실로 받아들여 증명의 도구를 사용한 과정 없이 가정에서 바로 결론으로 이끌어낸다.

넷째, 4번 문제는 한 학생도 정확하게 증명을 하지 못했다.

그 중 증명을 시도한 학생 중 15/32 명(약 46 %)은 3번 문제에서처럼 평행 사변형임을 증명하여야 하는 데 평행사변형의 성질을 이용하는 예가 있었다.

잘못된 증명의 예 :두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 사각형은 평행사변형임을 증명(질문지에 제시된 문제)

가정 : $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}},\ \ \overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}$

결론 : $\overline{\mathrm{AB}}//\overline{\mathrm{CD}},\ \ \overline{\mathrm{AD}}//\overline{\mathrm{BC}}$

증명 ; $\angle \mathrm{A}=\angle \mathrm{C}$ (평행사변형이므로)

$\angle \mathrm{B}=\angle \mathrm{D}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}//\overline{\mathrm{CD}},\ \ \overline{\mathrm{AD}}//\overline{\mathrm{BC}}$

위의 예에서도 평행사변형의 성질을 바로 이용하여 증명하였다.

다섯째, 5번 문제에서 정답자들은 평행사변형이라는 가정에서 평행사변형의 성질(마주보는 변의 길이는 같다.)을 이용하여 올바르게 증명을 하였고 그렇지 않은 학생들은 어떠한 내용도 쓰지 않아서 잘못된 증명의 예를 찾을 수가 없었다.

위의 질문지의 답안 예시에서 보여주듯이 학생들은 교과서에서 강조했던 정의와 성질을 묻는 질문지의 1번, 2번 문제에서 도형의 정의를 정확하게 제시하는데 어려움을 갖고 있다. 또한, 증명과정에서 학생들은 도형의 정의와 성질을 구분하지 못하고 있으므로 증명문제에서 정의와 성질을 적절히 사용하여 증명과정을 자연스럽게 전개하지 못하는 것은 당연한 결과라고 할 수 있다. 특히 도형 정

의와 동치관계에 있는 여러 가지 도형의 성질을 배우면서 이러한 구분은 더욱 어려워진다. 예를 들어 질문지의 4번 문제의 주어진 가정(두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 사각형)은 평행사변형의 조건이 되는 성질이므로 학생들은 평행사변형의 성질을 이용하여 평행사변형임을 증명한다.

2. 사례 연구

질문지에 답한 학생들 중 정의를 이해(1번, 2번)하고 있으면서도 증명과정(3번, 4번)에서 바르게 전개하지 못한 학생의 증명과정에서의 어려움을 찾아 해결하고자 한다.

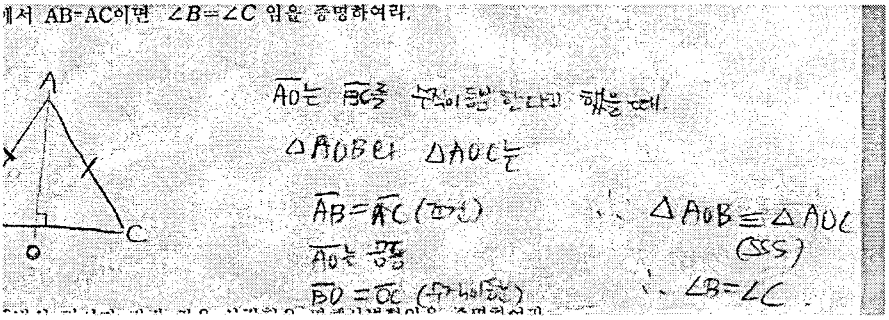
그러기 위해서 질문지의 증명과정에서 증명을 하고자하는 성질과 그 증명에 필요한 도구(정의와 이미 알고 있는 사실)를 구별할 수 있도록 질문지의 내용을 중심으로 이해수준을 파악하고 바른 증명을 위해 대화(의사소통)를 통해 이끌어가고자 한다.

이 활동을 통해 학생 자신의 사고를 언어로 표현하는 능력과 기호와 기호를 사용한 증명 절차 (단계)를 어떻게 표현하는지 알 수 있다.

1) 질문지 3번 문제($\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 $\angle B=\angle C$ 임을 증명하여라.)에 대한 토론

교사 : 증명과정에서 사용할 수 있는 정의와 성질이 무엇일까?
학생1 : 삼각형의 두 변의 길이가 같다는 것 이예요..
교사 : 그 밖의 사용할 수 있는 정의나 알고 있는 성질은 무엇이 있을까?
학생1 : 두 변의 길이가 같은 삼각형은 이등변 삼각형기 때문에 두 밑각의 크기가 같아요.
교사 : 문제에서 우리가 증명해야 할 내용이 이등변 삼각형의 두 밑각의 크기가 같다는 것 아닐까?
학생1 : ... 그냥 같아요.
교사 : 증명은 누구나 인정할 수 있어야 하니까 왜 그런지 이유가 있어야 하지 않을까?
학생1 : 설명하기가 어려워요.
교사 : 그럼, 두 변의 길이가 같은 삼각형을 종이로 만들어 반으로 접어보자.
학생1 : 포개지잖아요.
교사 : 접은 삼각형을 펴면 어떻지?
학생1 : 똑같은 삼각형 두 개가 생기는데요.
교사 : 그럼 두 삼각형은 합동이라고 할 수 있겠네?
학생1 : 네, 맞아요. 그래서 두 각이 같아요.
교사 : 그러면 두 변의 길이가 같은 삼각형의 두 밑각의 크기가 같다는 사실을 무엇을 이용해서 보여주었는지 말할 수 있겠니?
학생1 : 네. 삼각형의 합동이요.
교사 : 그러면 지금까지 말한 내용을 수학 기호나 그림을 이용하여 증명과정을 나타낼 수 있겠니?
학생1 : 해 볼게요.

2) 대화를 통한 교수학습 후 학생의 증명과정



학생이 제시한 부분을 보면 이등변 삼각형을 반으로 접었을 때 수직 이등분되는 성질을 이용하여 삼각형의 합동 조건을 제시하여 증명을 전개했다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 정의와 성질의 구분 실태를 조사하고, 구분에 어려움이 있는 학생들을 대상으로 정의와 성질의 구분, 증명과정에서 정의와 성질의 역할에 대하여 학생들이 겪는 어려움과 처치과정을 사례 연구를 통하여 분석함으로써 증명 교육의 바람직한 방안을 모색하고자 하였다.

증명학습 방법 연구 분석 결과 비록 적은 학생 수를 대상으로 했다는 제한점이 있다 하더라도 도형 단원을 모두 끝낸 상태에서 조사한 결과로 볼 때 도형의 정의와 성질에 대한 이해 정도가 매우 심각하다. 그럼에도 불구하고 교과서에서 제시된 증명문제는 참임을 전제한 가정과 참임을 보여야 할 결론이 제시되고 학생들은 명제가 참이라는 것을 인정하고 연역적인 증명을 시도해야 한다. 그러나 학생들은 이미 참인 사실을 왜 증명해야하는지를 이해하지 못할 뿐만 아니라 증명의 필요성도 느끼지 못하였다.

따라서 본 연구를 통하여 다음과 같은 제안을 하고자 한다.

첫째, 형식적이고 엄밀한 증명이 완성되기까지 많은 좌절과 시행착오가 있으며 이러한 시행착오가 증명에 대한 좋은 학습이 될 수 있다. 따라서 학생들에게 스스로 발견할 수 있는 기회를 주어 '증명'의 필요성을 자연스럽게 이해할 수 있도록 해야 한다.

둘째, 학생들이 엄밀하고 형식적인 증명을 어려워함은 당연하다고 할 수 있다. 증명학습에서 엄밀하고 형식적인 증명으로 접근하기 전에 학생들 사이의 대화를 통해 이전에 학습된 도형의 정의와 이미 밝혀진 성질이 증명학습에서 중요한 요소임을 받아들이고 이해할 수 있도록 해야한다.

셋째, 학생들의 다양한 방법의 '증명'을 인정하면서 점차적으로 형식적인 증명의 수준에 도달 할 수 있는 충분한 시간과 경험을 제공해야 한다. 즉 증명과정에 흥미를 줄 수 있는 방법으로 학생과 학생 사이에서 증명과정과 전략을 이끌어낼 수 있도록 해야 한다.

본 연구에서는 증명학습의 여러 구성요소들 중 정의와 성질의 구분을 강조하고자 했다. 오랜 기간 학생들의 수업 사례를 살피지 못하였으므로 제한점이 있음을 인정하며 증명의 다른 구성요소들에 대한 실제 수업에서의 사례연구가 절실히 요구되며 증명지도에 대한 교사의 계속적인 연구와 실제 수업 사례연구를 통해 학생들이 증명학습에서 느끼는 어려움을 덜어주어야 할 것이다.

참 고 문 헌

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교 출판부.

류희찬 · 조완영 · 김인수(공역) (2003). 고등수학적 사고. 서울: 경문사.

김홍기 (2001). 중학교 수학에서의 증명을 위한 공리 취급에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **40(2)**, pp.291. 서울: 한국수학교육학회.

서동엽 (1992). 증명지도에서 직관의 역할에 관한 연구, 대한수학교육학회논문집 **2(2)**; pp.105. 서울: 대한수학교육학회.

조완영 · 권성룡 (2001). 학교수학에서의 증명, 대한수학교육학회논문집 **11(2)**, pp.385-387. 서울: 대한수학교육학회.

우정호 · 서동엽 (1999). 증명의 구성요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색, 대한수학교육학회 춘계 수학교육학연구발표논문집. pp. 415-418. 서울: 대한수학교육학회.

금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주 (2003). 수학 8-나 교과서. 고려출판(주).

강행고 · 이화영 · 박진석 · 이용완 · 한경연 · 이준홍 · 이혜련 · 송미현 · 박정숙 (2003). 수학 8-나 교과서. 중앙교육진흥연구소(주).

최용준 (2003). 수학 8-나 교과서. 천재교육(주).

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathmatics education.* London : Falmer Press.

Eves, H. (1953). *Introduction to the history of mathematics.* 이우영, 신항균(역). (1995). 수학사. 서울: 경문사.

De Villers, M. D. (1990). *The role and function of proof in mathematics Pythagoras,* 24, pp. 17-24.

Hanna, g., & Jahnke, H. N. (1996). *proof and proving.* In A. J. Bishop et al. (Eds), *International hanbook of mathematics education(part 2),* pp.877-907, Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.

Lakatos, I. M. (1976). *proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.* 우정호 (역) (1991).수학적 발견의 논리. 서울: 경문사.

Thom, R. (1971). *Modern mathematics : An educational and philosophic error? In mathematics education,* pp. 194-209, Cambridge University Press, Cambridge.

[부록 1] 사전 조사 질문지

질 문 지

1. 다음 보기 중 용어의 정의가 아닌 것을 모두 골라 바르게 정의하여라.
(1) 평행사변형 : 두 쌍의 대변의 길이가 같은 사각형
(2) 직사각형 : 네 각의 크기가 같은 사각형
(3) 정사각형 : 네 변의 길이가 같은 사각형
(4) 사다리꼴 : 한 쌍의 대변이 평행한 사각형

2. 다음 여러 가지 사각형의 관계 중에서 옳지 않은 것은?
(1) 직사각형은 평행사변형이다.
(2) 마름모는 직사각형이다.
(3) 정사각형은 직사각형이다.
(4) 평행사변형은 사다리꼴이다.
(5) 마름모는 평행사변형이다.

3. $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 $\angle B=\angle C$ 임을 증명하여라.

4. 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 사각형은 평행사변형임을 증명하여라.

5. $\overline{AB}=\overline{BC}$인 평행 사변형 ABCD는 마름모임을 증명하여라.