

3차 분기집합의 2-주기 성분에 관한 기하학적 성질 연구1)

김 영 익 (단국대학교)

금 영 희 (단국대학교)

본 논문에서는 맨델브로트(Mandelbrot) 집합의 개념을 3차의 복소 다항식 $z^3 + c$ 에 확장시켜 3차 분기집합을 정의하고, 이 집합의 2-주기 성분의 경계선 방정식과 관련 기하학적 성질을 고등학교 및 대학에서 다루는 미적분학 관점에서 분석하고자 한다. 복소수, 삼각함수, 매개함수, 함수의 극값, 미분 및 적분 등의 기초 이론을 활용하여 2-주기 성분의 경계선 방정식을 매개함수로 표시하고, 경계선의 내부 면적, 둘레 길이, 무게중심 등을 이론적으로 기술한다. 수학 소프트웨어인 매스매티카(Mathematica)를 활용하여 2-주기성분의 작도 및 기하학적 성질에 관한 수치 해석적 결과를 제시하고자 한다.

I. 서론

맨델브로트(mandelbrot) 집합(그림 1-(a) 참조)의 개념은 1978년 수학자 Benoit Mandelbrot 에 의해 창시되었으며, 복소 수열 $\{z_{n+1} = z_n^2 + c, z_0 = 0\}$ 의 값이 무한대로 발산하지 않도록 하는 복소 매개상수 c 값의 집합으로 정의된다. 이 집합의 신비스러운 구조는 다양한 분야에서 수학자 및 과학자들의 관심과 흥미를 불러 일으켰으며 많은 이론적 성질[7-11,13-16,18]이 밝혀지게 되었고, 고성능 컴퓨터의 정밀 연산 및 고화질 그래픽 처리 기능으로 인하여 그 기하학적 구조를 세밀하게 관찰할 수 있으며, 오늘날 이른바 프랙탈 기하학이라는 새로운 학문을 창시하는 밑거름이 되었다. 고등학교 기초 수학과정에서도 맨델브로트 집합[1]이 소개되고 있으며 이 집합의 기하학적 구조를 해석하기 위해서는 복소수의 연산 개념과 수열의 수렴과 발산, 미분과 적분, 매개함수, 함수의 극값 등에 관한 기초 지식을 필요로 한다.

본 논문에서는 맨델브로트 집합의 개념을 3차의 복소 다항식 $z^3 + c$ 에 확장시켜 3차 분기집합을 정의하고, 이 집합의 2-주기 성분이 갖는 기하학적 성질을 고등학교[1] 및 대학에서 다루는 미적분학[2] 관점에서 분석하고자 한다. 복소수, 삼각함수, 매개함수, 함수의 극값, 미분 및 적분 등의 기초 이론을 활용하여 2-주기 성분의 경계선 방정식을 매개함수로 표시하고, 경계선의 내부 면적, 둘레 길이, 곡률, 무게중심 등에 관한 이론적 분석은 물론, 매스매티카(Mathematica)를 활용하여 2-주기 성분의 작도 및 기하학적 성질에 관한 수치 해석적 결과를 제시하고자 한다. 다음에 언급되는 정의와

1) 본 연구는 2003년도 단국대학교 대학 연구비의 지원으로 수행되었음.

정리는 2절에서 소개되는 2-주기 성분의 경계선 방정식 수립과 관련 기하학적 성질 분석에 매우 유용하다.

정의 1.1 $n \geq 2$ 인 자연수에 대하여 c, z 를 복소수, $P_c(z) = z^n + c$, P_c 를 k -번 합성한 함수를 $P_c^k(z)$ 라하고, 복소수의 집합을 C 라고 하면 n 차 분기 집합 M 은 다음 집합

$$M = \{ c \in C : \lim_{k \rightarrow \infty} P_c^k(0) \neq \infty \}$$

으로 정의된다. 이 정의는 1986년 Devaney[8]에 의해 소개되었다. $n=2$ 인 경우 M 은 맨델브로트 집합[4, 5, 7-10, 15-16, 18]이 된다.

정의 1.2 집합 $P_m = \{ c \in C : c = re^{i\phi_m}, r \geq 0, \phi_m = m\pi/(n-1) \} (m=1, 2, \dots, 2n-2)$ 은 대칭 반직선(rays of symmetry)이라 부른다.

정리 1.1 n 차 분기 집합 M 은 c -매개변수 평면에서 대칭 반직선 $P_m (m=1, 2, \dots, 2n-2)$ 에 관하여 대칭이다.

(증) Geum and Kim [14]의 p.224 참조. ■

정의 1.3 n 차 분기 집합 M 의 k -주기 성분은 다음 집합

$$\{ c \in C : \xi \in C \text{가 존재하여 } P_c^k(\xi) = \xi, \left| \frac{d}{dz} P_c^k(z) \right|_{z=\xi} < 1 \} \quad (1.1)$$

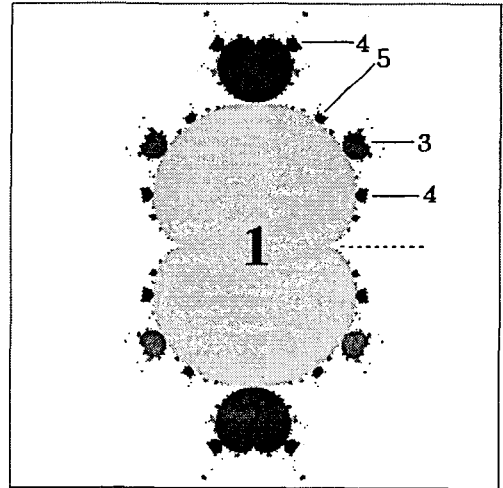
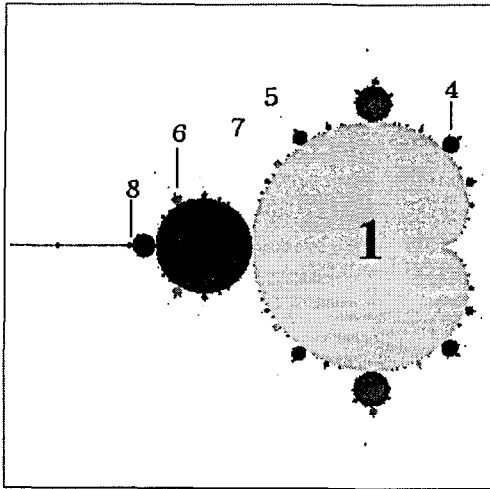
의 대표적 성분[17]으로 정의되며 M_k' 으로 표기된다. $k=1$ 이면 주성분이라 부른다.

주성분의 경계선 방정식[13]은 $a = (1/n)^{1/(n-1)}, 0 \leq \phi < 2\pi$ 라고 할 때 다음 매개함수 방정식으로 주어진다.

$$c = \frac{\alpha}{n} (n \cos \phi - \cos n\phi) + i \frac{\alpha}{n} (n \sin \phi - \sin n\phi). \quad (1.2)$$

맨델브로트 집합 내의 2-주기 성분 경계선 방정식[4,9,15,18]은 중심이 점 $(-1,0)$ 이고 반경이 $1/4$ 인 원으로 주어짐은 알려져 있다. 정의 1.1에 따라 작도된 3차 분기 집합[13,14]이 <그림 1-(b)>에 표시되어 있다. 성분 M_k' 은 숫자 k 및 내부를 채색하여 표시한다. 2개의 2-주기 성분이 존재하지만 정리 1.1에 표현된 대칭성에 의해 상반 평면의 y 축상에 존재하는 성분에 관한 기하학적 성질을 조사하면 충분하다. 제 2절에서는 매개함수 표현을 활용하여 3차 분기집합의 2-주기 성분 경계선 방정식

을 수립하고 관련 성질을 조사한다. 제 3절에서는 2-주기 성분 경계선을 작도하는 알고리즘과 매스 매티카[19] 프로그램 코드를 소개한다. 마지막으로 제 4 절에서는 프랙탈 기하의 출현에 따른 수학적 모델링과 컴퓨터의 활용을 언급하고 분석 결과와 과급 효과 등을 기술하기로 한다.



(a) 맨델브로트 집합

(b) 3차 분기집합

<그림 1> 맨델브로트 집합과 3차 분기집합

II. 3차 분기집합의 2-주기 성분 경계선의 방정식

$w, c \in \mathbb{C}$ 에 관하여 $P_c(w) = w^3 + c$, 2-주기점[15]을 z , $\lambda = \frac{d}{dw} P_c^2(w) \Big|_{w=z}$ 라고 하면 (1.1)식을 활용하여 2-주기 성분의 경계선은 다음을 만족한다.

$$P_c^2(z) = (z^3 + c)^3 + c = z \tag{2.1}$$

$$|\lambda| = 1 \tag{2.2}$$

식(2.2)는 원을 나타내므로 $\lambda = e^{i\phi}$, $0 \leq \phi < 2\pi$ 으로 표시된다. 복소 함수[3] 기초이론으로부터, 식(2.2)는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$z(z^3 + c) = \frac{1}{3} e^{i(\phi/2 + j\pi)} \text{ for } j=0, 1. \tag{2.3}$$

$\psi = \phi/2$, $a = (1/3) e^{i(\psi + j\pi)}$ 라고 하면 식(2.3)으로부터 $z(z^3 + c) = a$ 이고 식(2.1)로부터 $c = z - (a/z)^3 = a/z - z^3$ 이므로 인수분해 하면 $(z - a/z)(z^2 + a^2/z^2 + a + 1) = 0$ 을 얻는다.

$z - a/z = z - (z^3 + c) = 0$ 를 만족하는 1-주기점을 제외하면 2-주기점은 다음 식을 만족한다.

$$(z^2 + a^2/z^2 + a + 1) = 0. \quad (2.4)$$

Vieta's 변환 $t = z + a/z = \pm (a - 1)^{1/2}$ 를 사용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} c &= a/z - z^3 = a/z - z(z^2) = a/z - z(-a^2/z^2 - a - 1) \\ &= a/z + a^2/z + (a+1)z = (a+1)(z + a/z) = (a+1)t \\ &= \pm (a+1)(a-1)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

$a = \pm e^{i\psi}/3$ 를 사용하여 다음과 같이 매개함수로 나타낼 수 있다.

$$c = c(\psi) = \pm (a+1)(a-1)^{1/2} = \pm re^{i\theta}, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} r &= r_1 \sqrt{r_2}, \quad r_1 = \sqrt{10 + 6 \cos \psi} / 3, \quad r_2 = \sqrt{10 - 6 \cos \psi} / 3, \quad \theta = \psi_1 + \psi_2 / 2, \\ \psi_1 &= \tan^{-1} \left(\frac{\sin \psi}{3 + \cos \psi} \right), \quad \psi_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \psi}{-3 + \cos \psi} \right) \text{ and } 0 \leq \psi < \pi. \end{aligned}$$

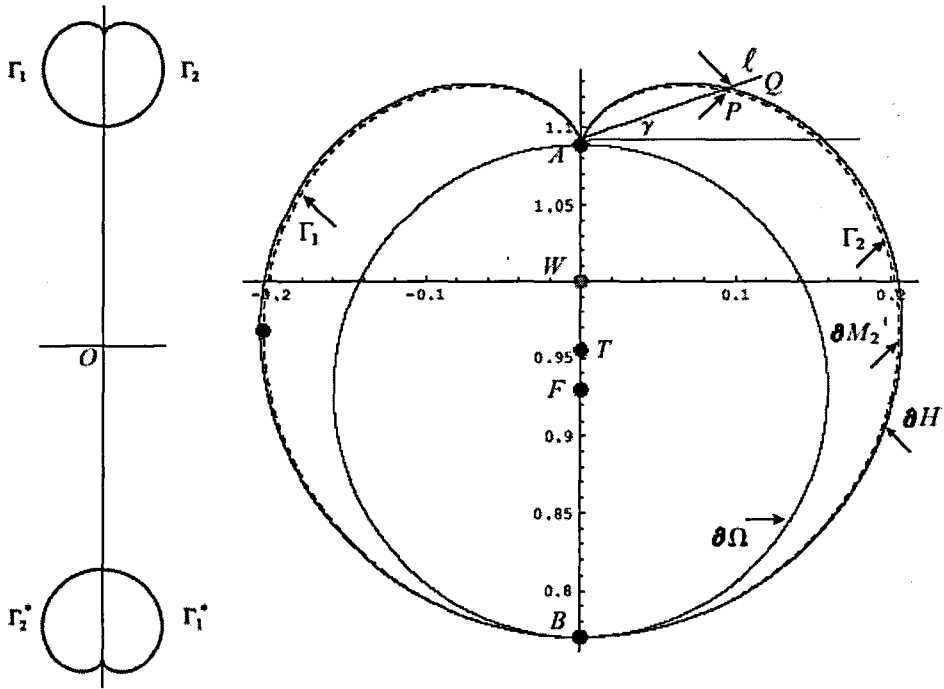
식(2.7)은 다음 4개의 곡선 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_1^*$ 및 Γ_2^* 을 정의하며 <그림 2-(a)>에 도시되어 있다.

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{c \in \mathbf{C} : c = re^{i\theta}, a = e^{i\psi}/3, 0 \leq \psi < \pi\}, \\ \Gamma_1^* &= \{-c \in \mathbf{C} : c \in \Gamma_1\}, \\ \Gamma_2^* &= \{\bar{c} \in \mathbf{C} : c \in \Gamma_1\}, \\ \Gamma_2 &= \{\bar{c} \in \mathbf{C} : c \in \Gamma_1^*\} = \{-\bar{c} \in \mathbf{C} : c \in \Gamma_1\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

n 차 분기집합의 대칭성으로부터 상반 평면 위에 있는 2-주기 성분만 고려하면 충분하고 이 성분의 경계선은 다음으로 표시된다.

$$\partial M_2' = \Gamma_1 \cap \Gamma_2. \quad (2.9)$$

심장형 곡선처럼 보이는 이 2-주기 성분 경계선의 다양한 기하학적 성질을 정리 2.1에서 기술하고 증명하기로 한다.



(a) 2-주기 성분

(b) 상반 평면 위의 2-주기 성분

<그림 2> 2-주기 성분의 경계선

정리 2.1 $r_s = 4\sqrt{2}/3\sqrt{3}$, $r_e = 4/3\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)/9$, $\rho = 2(\sqrt{2}-1)/3\sqrt{3}$ 라고 표시하자. $A(0, r_s)$, $B(0, r_e)$ 및 $F(0, b)$ 를 y축 위의 점이라 하자. <그림 2-(b)>에서 보는 바와 같이 H , M_2' , Ω 를 각각 심장형 곡선 ∂H 의 내부, 상반 평면 위의 2-주기 성분, 반경이 ρ 이고 중심이 $F(0, b)$ 인 원이라 하자. ∂H , $\partial M_2'$, $\partial \Omega$ 를 각각 다음 매개 함수로 표시된 도형이라고 하자.

$$\partial H: x_1(t) = \rho \sin t (1 - \cos t), \quad y_1(t) = \rho \cos t (1 - \cos t) + r_s, \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

$$\partial M_2': x(\phi) = r \cos \theta, \quad y(\phi) = r \sin \theta \quad (r \text{과 } \theta \text{는 식(2.7)에 표시되며 } 0 \leq \phi < 2\pi),$$

$$\partial \Omega: x_2(u) = \rho \sin u, \quad y_2(u) = \rho \cos u + b, \quad 0 \leq u < 2\pi.$$

그러면 다음이 성립한다.

(a) $\partial M_2'$ 은 ∂H 에 내접하며 두 접점은 A 와 B 이다.

(b) $\partial \Omega$ 은 $\partial M_2'$ 에 내접하며 두 접점은 A 와 B 이다.

- (c) ∂H 의 둘레 길이는 $16(\sqrt{2}-1)/3\sqrt{3} \approx 1.275446995936534763$ 이다.
 (d) $\partial M_2'$ 의 둘레 길이는 대략 1.264033759241096936 이다.
 (e) ∂H 의 내부 면적은 $2(3-2\sqrt{2})\pi/9 \approx 0.119780463211699382$ 이다.
 (f) $\partial M_2'$ 의 내부 면적은 대략 0.118042847838789250 이다.
 (g) 점 A 는 첨점(cusp)이다.
 (h) 2-주기 성분의 무게중심 좌표는 $(0, 0.95490055451650363748)$ 이다.
 (i) 2-주기 성분의 중심 좌표는 $(0, 1)$ 이다.
 (j) 점 B 는 주성분의 경계로부터 2-주기 성분이 파생되는 분기점이다.

(증) M 의 대칭성으로부터 Γ_2 를 고려하면 충분하다.

(a) 점 A 를 지나며 경사각 $-\pi/2 \leq \gamma \leq \pi/2$ 인 반직선 ℓ 이 그림 2에서와 같이 주어진다고 하자. 점 $P(-x, y) = P(-r \cos \theta, r \sin \theta)$ 와 $Q(x_1, y_1) = Q(\rho \sin t(1 - \cos t), \rho \cos t(1 - \cos t) + r_s)$ 를 각각 ℓ 과 $\partial M_2'$ 및 ∂H 과의 교점이라 하자. $\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{y(\psi) - r_s}{-x(\psi)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y_1(t) - r_s}{x_1(t)}\right) = \pi/2 - t$ 이기 때문에 γ 는 ψ 또는 t 의 단조 함수가 된다.

$-\pi/2 \leq \gamma \leq \pi/2$ 의 범위에서 Q 가 P 의 바깥쪽에 위치하고 있음을 보이는 것은 $\psi, t \in [0, \pi]$ 에 대하여 $\psi \leq t$ 임을 보이는 것과 동치이다. 양 끝점 A 와 B 에서 두 곡선이 서로 접하고 명백하게 $\psi = t$ 를 만족한다. 구간 $\psi, t \in (0, \pi)$ 에서 $\psi < t$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{y(\psi) - r_s}{-x(\psi)}\right) < \pi/2 - \psi. \quad (2.10)$$

즉, $\psi \in (0, \pi)$ 에 대하여

$$\left(\frac{y(\psi) - r_s}{-x(\psi)}\right) < \frac{\cos \psi}{\sin \psi},$$

이고 $f(\psi) = r_s \sin \psi - r \cos(\psi - \theta)$ 라 하면 함수 f 는 다음을 만족해야 한다.

$$f(\psi) = r_s \sin \psi - r \cos(\psi - \theta) > 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{df(\psi)}{d\psi} = \frac{g(\psi)}{12 \cdot 2^{1/4} \cdot \sqrt{3(5-3\cos\psi)^{3/4} \sqrt{5+3\cos\psi}}}, \quad (2.12)$$

$$g(\psi) = 16(10 - 6\cos\psi)^{3/4} \cdot \cos\psi \cdot \sqrt{5+3\cos\psi} + 161\sin(\psi - \theta) + 3(\sin(2\psi - \theta) - 6\sin(3\psi - \theta) + 9\sin\theta - 3\sin(\psi + \theta)).$$

기초 미적분학 이론으로부터 구간 $(0, \pi)$ 내에서 g 가 하나의 실근 $\psi^* \approx 1.94304509978953403743$ 을 가지며 $f > 0$ 임을 알 수 있다.

(b) $h(\psi) = (-x(\psi))^2 + y(\psi)^2 = x(\psi)^2 + y(\psi)^2$ 라고 하면 도함수 $h'(\psi)$ 은 다음과 같다.

$$h'(\psi) = \frac{\sin[\psi/2]\sqrt{2/\gamma}}{9} \{ w_1(\psi) + w_2(\psi) \}, \quad (2.13)$$

$$w_1(\psi) = -5 \cos(2\theta - \psi/2) + 9/2 \cdot \cos(2\theta + \psi/2) + 9/2 \cdot \cos(2\theta + 3\psi/2) \\ + 3 \cdot \cos(\psi/2) + 3 \cdot \cos(3\psi/2),$$

$$w_2(\psi) = \frac{(2\sqrt{2}-2 + 2^{3/4}\gamma^{1/4}\sqrt{\beta} \sin \theta) \cdot (9 \sin(\theta + 3\psi/2) - \sin(\theta - \psi/2))}{2^{3/4}\gamma^{1/4}\sqrt{\beta}}$$

$$\gamma = 5 - 3\cos \psi, \quad \beta = 5 + 3\cos \psi.$$

도함수 $h'(\psi)$ 은 3개의 실근 $0, \pi, \bar{\psi} \approx 1.456050346953239800468$ 를 가지며, h 는 점 $A(0, r_s)$ 와 $B(0, r_e)$ 에서 최소값 ρ^2 을 갖고, 점 A 와 B 는 두 곡선의 접점이 된다.

(c) 곡선 ∂H 의 둘레 길이는 미적분학 기초 이론으로부터 다음과 같다.

$$\int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2} dt = 8\rho = 16(\sqrt{2}-1)/3\sqrt{3} \approx 1.2754469959365347639.$$

(d) 곡선 $\partial M_2'$ 의 둘레 길이는 미적분학 기초 이론으로부터 다음과 같다.

$$\int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2} d\psi \approx 1.264033759241096936.$$

(e) $r(t) = \sqrt{x^2 + (y - r_s)^2} = \rho(1 - \cos t)$ 이므로 극좌표계에서의 면적 공식을 활용하여 ∂H 의 내부면적은 다음과 같다.

$$2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi \rho^2 (1 - \cos t)^2 dt = \frac{3}{2} \rho^2 \pi = 2(3 - 2\sqrt{2}) \pi / 9 \approx 0.119780463211699382.$$

(f) $\psi^* \approx 2.0081718975276435150$ 를 곡선 $\partial M_2'$ 의 최우측 점을 표시하는 매개변수 ψ 의 값이라 하면 $\partial M_2'$ 의 내부면적은 $2(A_1 - A_2) \approx 0.118042847838789250$ 으로 주어진다. 단, 여기서

$$A_1 = \int_0^{\psi^*} |y(\psi) x'(\psi)| d\psi, \quad A_2 = \int_{\psi^*}^\pi |y(\psi) x'(\psi)| d\psi.$$

(g) ϵ 을 충분히 작은 양수라고 할 때 $\psi = \epsilon > 0$ 에서 $\frac{x'(\psi)}{y'(\psi)} = \frac{dx}{dy} > 0$ 이고, $\psi = 0$ 에서

$$\frac{x'(\psi)}{y'(\psi)} = \frac{dx}{dy} = 0 \text{ 이므로 } M \text{의 대칭성으로부터 } A \text{는 첨점(cusp)이다.}$$

(h) 무게중심 T의 x-좌표가 명백히 0 임은 M_2' 의 대칭성으로부터 알 수 있다. 무게중심 T의

y -좌표를 \bar{y} 라 하고 S 를 $\partial M_2'$ 의 내부면적이라 하면 다음을 얻는다.

$$\bar{y} = \frac{1}{S} \int_{M_2'} y dS. \quad (2.14)$$

M_2' 를 A 를 지나는 수평선에 의해 두 영역으로 나눈다. 각 영역에서 적절히 dS 표현을 선택하고 적분하면 $\bar{y} = 0.95490055451650363748$ 을 얻는다.

(i) Geum and Kim[14], p.230 참조.

(j) $\lambda^2 = 1$ 및 식(1.2)로부터 해당 분기점(root point[10])을 얻는다. ■

III. 2-주기 성분의 경계선 작도 알고리즘과 프로그램

이 절에서는 정리 2.1의 결과를 활용하여 2-주기 성분의 경계를 작도하는 알고리즘을 수립하고 이 알고리즘을 실행하는 매스매티카 프로그램 코드를 소개하기로 한다. 3차 분기집합의 대칭성을 효율적으로 사용하여 2-주기 성분의 경계선을 작도하고 매스매티카[19]의 ParametricPlot 명령어를 활용하기로 한다. 그림 2-(a)는 프로그램의 실행 결과이다.

알고리즘 3.1

단계 1. 식 (2.7)에 따라서 변수 $r, r_1, r_2, \phi_1, \phi_2$ 및 θ 를 설정한다.

단계 2. Γ_1 위의 점을 (x, y) 으로 표기한다. 단, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

단계 3. $0 \leq \phi \leq \pi$ 의 범위에서 3차 분기 집합의 대칭성을 사용하고 동시에 3개의 매개 함수 $(x(\phi), y(\phi)), (-x(\phi), y(\phi)), (x(\phi), -y(\phi)), (-x(\phi), -y(\phi))$ 를 그린다.

알고리즘 3.1에 의한 매스매티카 코드

```

r1 = 1/3*Sqrt[10 + 6*Cos[phi]];
r2 = 1/3*Sqrt[10 - 6*Cos[phi]];
phi1 = ArcTan[3 + Cos[phi], Sin[phi]];
phi2 = ArcTan[-3 + Cos[phi], Sin[phi]];
r = r1*Sqrt[r2]; q = phi1 + phi2 / 2;
x = r * Cos[q]; y = r * Sin[q];
ParametricPlot[{{x,y},{-x,y},{x,-y},{-x,-y}},{phi,0,Pi},
  PlotPoints -> 400, PlotStyle -> Thickness[0.02],
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All, Ticks -> None];

```


IV. 결과 분석 및 토론

맨델브로트 집합이 보여주는 프랙탈 기하는 자연과학의 세계에서 매우 복잡하지만 질서를 표현하는 시스템의 수학적 기술과 수학적 모델링의 한 예를 제시한다. 프랙탈 학문은 최근 몇 년 사이에 놀라운 발전을 이룩하였으며 고성능 컴퓨터의 활용과 더불어 순수 수학을 자연 응용과학과 연결시키는 데 지대한 공헌을 하였다. 컴퓨터 하드웨어의 발달에 힘입어 고속도의 초정밀 컴퓨터 그래픽은 프랙탈 도형의 표현에 획기적인 진전을 이룩하였다. 더욱이 매스매티카와 같은 고성능 기호 연산, 정밀 수치 연산 및 고화질 그래픽 처리 기능을 가진 수학 전문 소프트웨어의 출현에 힘입어 프랙탈 도형의 신비하고 아름다운 모습을 어렵지 않게 관찰할 수 있게 되었다.

본 논문에서는 맨델브로트 집합을 3 차 복소 다항식에 확장시켜 새로운 프랙탈 도형(<그림 1-(b)>참조)을 나타내는 3차 분기집합을 정의하였고, 이 집합이 보여주는 프랙탈 기하의 특성을 고등학교 및 대학의 미적분학 관점에서 이론적으로 분석하였다. 매스매티카를 활용하여 이 집합의 2주기 성분의 경계선 작도와 함께 미분, 수치 적분, 함수의 극값 이론, 함수의 그래프, 복소수 이론, 매개함수, 극좌표 표현 등을 활용하여 2-주기 성분의 경계선 방정식 및 관련 기하학적 성질을 정밀도가 높은 수치 결과로 제시하였다.

2-주기 성분의 내부면적과 둘레 길이, 최상단점 및 최우측점 등을 계산하는 데 사용한 매스매티카의 FindRoot 명령어는 뉴턴 수치 해법[6,12]을 기반으로 하고 있으며 AccuracyGoal -> 20, DampingFactor->1, MaxIterations->25, WorkingPrecisions->48 등의 선택사항을 활용하여 최종 계산 결과가 유효숫자 20 자리 이상이 되도록 하였다. M_2' 의 대칭성을 최대한 활용하고 매스매티카의 매개함수 그래프 명령어인 ParametricPlot 를 사용하여 경계선을 작도하였다. 정리 2.1의 결과에 의하여 2-주기 성분의 경계선은 심장형 곡선처럼 보이지만 실제로는 심장형 곡선에 내접하며 그 내부 면적과 둘레길이가 심장형 곡선의 그것보다는 작다는 것을 확인하였다.

매스매티카의 수치적분 명령어 NIntegrate를 선택사항 WorkingPrecisions->48, AccuracyGoal->28와 함께 사용하여 2-주기 성분의 내부면적 계산 결과가 유효숫자 20 자리 이상이 되도록 하였다. 정리 2.1의 결과로부터 $\Omega \subset M_2' \subset H$ 임을 관찰할 수 있다. 무게중심의 계산은 최상단점의 위치를 필요로하고 이때의 매개변수 ψ 를 구하기 위해 도함수의 계산 $y'(\psi)$ 이 필요하다. 예측한 바와 같이 계산 결과로부터 무게중심은 성분중심(0,1) 보다 아래에 있음을 알 수 있었다.

3차 분기집합의 2-주기 성분 경계선 방정식은 탈출-시간(escape-time) 알고리즘에 의해 3차 분기 집합을 작도할 때 2-주기 성분 내부 점을 우회시킴으로써 작도시간을 감소시켜 주는 효과를 준다. 3차 분기집합의 2-주기 성분에 관한 이론적 배경은, 계산의 복잡도 때문에 대수적 조작이 어려울 것이지만, 4차 분기 집합의 2-주기 성분 경계선 방정식에도 확장 적용될 것으로 예측된다. 본 논문에서 제시한 수학적 분석 방법과 컴퓨터 및 소프트웨어의 활용은 프랙탈 도형의 분석에 관심있는 수학교사 또는 연구 종사자들의 유사 문제 해결에 도움을 줄 것으로 판단된다.

참고 문헌

- 구광조 · 박한식 · 이강섭 · 이동수 · 정치호 · 황선욱 (1999). 수학 II, 서울: (주)지학사.
- 대한수학교재편찬위원회 (1990). 미적분학, 서울: 단국대학교 출판부.
- Ahlfors, Lars V. (1979). *Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill Inc.
- Barnsley, Michael F. (1993). *Fractals Everywhere*, 2nd ed., Academic Press Professional.
- Carleson, Lennart & Gamelin, Theodore W. (1995). *Complex Dynamics*, Springer-Verlag.
- Conte, Samuel D. & de Boor, Carl. (1980). *Elementary Numerical Analysis*, McGraw-Hill, Inc.
- Devaney, Robert L. (1986). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, The Benjamin/Cummings publishing Company, Inc.
- Devaney, Robert L. (1990). *Chaos, Fractals, and Dynamics*, Addison-Wesley Inc.
- Devaney, Robert L. (1992). *A First Course in Chaotic Dynamical Systems, Theory and Experiment*, Addison-Wesley Inc.
- Devaney, Robert L. Complex Dynamical Systems, The Mathematics Behind the Mandelbrot and Julia Sets, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Volume 49, American Mathematical Society*, Providence, Rhode Island, 1994.
- Douady, A. & Hubbard, J. H. (1982). Iteration des polynomes quadratiques complexes, *C. R. Acad. Sci., Paris I*, **294**, pp.123 – 126.
- Forsythe, George E.; Malcolm, Michael A. & Moler, Cleve B. (1997). *Computer Methods for Mathematical Computation*, Prentice-Hall Inc.
- Geum, Young Hee & Kim, Young Ik. (2002). Intersection of the Degree- n Bifurcation Set with the Real Line, *J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math.*, Volume **9**, Number **2**, pp.113 – 118.
- Geum, Young Hee & Kim, Young Ik. (2003). A Study on Computation of Component Centers in the Degree- n Bifurcation Set, *Intern. J. Computer Math.*, Volume **80**, No. **2**, pp.223 – 232.
- Gulick, Denny. (1992). *Encounters with Chaos*, McGraw-Hill, Inc.
- Munafu, Robert P. (2003). Pixel Counting, <http://www.mrob.com/pub/muency/pixelcounting.html>.
- Munkres, James R. (1975). *Topology*, 3rd ed., Prentice-Hall Inc.
- Peitgen, H. O. & Richter, P. H. (1986). *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Wolfram, Stephen. (1999). *The Mathematica Book*, 4th ed., Cambridge University Press.