

## 매스매티카를 활용한 나비곡선의 작도 및 기하학적 성질 분석1)

금 영 희 (단국대학교)

김 영 익 (단국대학교)

자연의 세계에서 나뭇잎, 돌기물, 구름, 해안선, 곤충의 모습 등에 내재하고 있는 아름다움은 흔히 균형성, 대칭성, 다양성 등으로부터 비롯된다. 자연 현상은 복소수를 활용하여 극좌표 표현으로 묘사되는 경우가 많다. 본 논문에서는 1989년 Temple H. Fay가 Amer. Math. Monthly 96(5)호에서 발표한 나비곡선

$$r = e^{\cos\theta} - 2\cos 4\theta + \sin^5\left(\frac{\theta}{12}\right)$$

의 기하학적 성질을 대칭 이동, 회전 이동, 수치적분, 미분, 극좌표계, 삼각함수, 지수함수 및 매개함수의 표현 등 고등학교 및 대학의 미적분학 관점에서 살펴 보고 극좌표 도형에 관한 흥미 유발과 더불어 컴퓨터 활용 방법을 제시하기로 한다. 수학전문 소프트웨어인 매스매티카를 활용하여 나비곡선의 작도 및 기하학적 성질을 분석하고자 한다.

### I. 수학적 모델링

13세기 아퀴나스(Thomas Aquinas, 1225-1274)는 “균형이 있는 것을 볼 때, 인간은 기쁨을 느낀다.”라고 표현하였고, 인간은 균형으로부터 수학과 아름다움의 관계를 감지한다. 뫼방까레(Henri Poincaré, 1854-1912)는 “수학자는 수학이 유용하기 때문이 아니라 수학에서 기쁨을 느끼기 때문에 연구하고, 또한 수학이 아름답기 때문에 기쁨을 느낀다.”라고 표현하였다. 수학적 아름다움과 균형은 생활 속에서 발견되는 나뭇잎, 돌기물, 구름, 해안선, 곤충 등의 모습에서 찾을 수 있으며 수학적 모델링의 동기가 된다.

고등학교 및 대학의 미적분학 과정에서 다루는 삼각함수와 극좌표, 매개함수를 취급한 수학적 모델링의 예로서 연주형(lemniscate)으로 표시되는 잠자리 날개곡선[1], 에피트로코이드(epitrochoid)로 표시되는 사과와 단면 윤곽선[1], 심장형(cardioid)으로 표시되는 하트곡선[2] 등이 있다. 본 논문에서는 극좌표계  $(r, \theta)$ 에서 방정식  $r = e^{\cos\theta} - 2\cos 4\theta + \sin^5\left(\frac{\theta}{12}\right)$ 으로 표시되며 자연세계의 균형과 대칭을 조화롭게 보여주고 있는 Fay의 나비곡선[3,4,5]에 관한 수학적 모델링을 살펴 보기로 한다. Fay의 나비곡선은 몸체가  $x$ 축에 따라 놓여 있으므로, 반시계 방향으로 (또는  $xy$ 좌표축을 시계 방향으로)  $90^\circ$  회전한 곡선에 대해서 고찰하기로 한다. 곡선  $r$  위의 임의의 점  $(x, y)$ 가 이루는 편

1) 본 연구는 2003년도 단국대학교 대학 연구비의 지원으로 수행되었음.

각[6]을  $\theta$ 라 하면  $x=r(\theta)\cos\theta$ ,  $y=r(\theta)\sin\theta$  이고,  $xy$  좌표축을 반시계 방향으로  $\alpha$  만큼 회전시켜 얻은 새로운  $x'y'$  좌표축과의 회전관계는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r(\theta) \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = r(\theta) \begin{bmatrix} \cos(\theta-\alpha) \\ \sin(\theta-\alpha) \end{bmatrix} \quad (1)$$

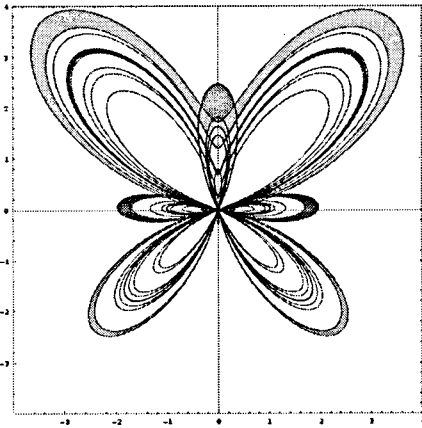
$\alpha = -\pi/2$ ,  $\theta - \alpha = \phi$ ,  $\rho(\phi) = r(\phi - \pi/2)$ 라 하면

$$x' = r(\phi - \pi/2) \cos\phi = \rho(\phi) \cos\phi, \quad y' = r(\phi - \pi/2) \sin\phi = \rho(\phi) \sin\phi$$

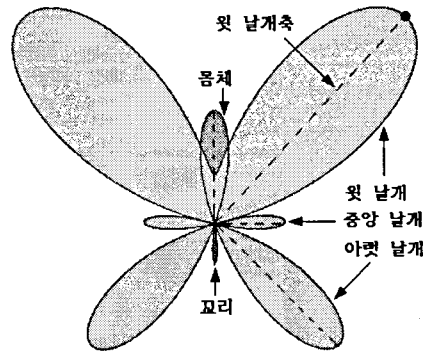
이므로, 새로운 극좌표계 시스템  $(\rho, \phi)$  및 직교좌표계  $(x', y')$ 에서 Fay의 나비곡선은 그 몸체가  $y'$  축 위에 놓여지게 된다. Fay의 나비곡선을  $90^\circ$  회전시킨 새로운 나비곡선(2)를 생각하기로 하자.

$$r = e^{\sin\theta} - 2\cos 4\theta + \sin^5\left(\frac{\theta - \pi/2}{12}\right) \quad (2)$$

곡선(2)는 <그림 1>과 같이 도시할 수 있으며, 정리 2.1에서  $\theta$ 에 관한 최소주기가  $24\pi$ 임을 보여 준다.



<그림 1> 회전한 Fay의 나비곡선



<그림 2> 나비곡선의 수학적 모델링

<그림 1>로부터 수학적 모델링을 통하여 그림 2와 같이, 나비의 기하학적 형상을 묘사할 수 있다. 즉, Fay의 나비곡선은 6개의 날개(2개의 윗 날개, 2개의 중앙 날개, 2개의 아랫 날개)와 1개의 몸체 및 1개의 꼬리 부분으로 구성되어 있으며 <그림 2>에 표시된 점선은 오른쪽 윗 날개축을 뜻하며, 날개축의 끝점은 원점으로부터의 거리가 극대인 위치의 점이다. 같은 방법으로 아랫 날개축, 중앙 날개축, 몸체축, 꼬리축을 지정할 수 있다. 각 축의 경사각도는 양의  $x$  축과 이루는 각도를 뜻한다. 정리 2.1은 나비곡선의 주요한 기하학적 성질을 제시한다.

## II. Fay의 나비곡선이 갖는 기하학적 성질

다음 정리는 Fay의 나비곡선이 가지고 있는 기하학적 성질에 대한 주요한 결과를 기술한다.

### 정리2.1 회전한 Fay의 나비곡선

$$r = e^{\sin\theta} - 2\cos 4\theta + \sin^5\left(\frac{\theta - \pi/2}{12}\right)$$

은 다음과 같은 성질을 갖는다.

- (1) 곡선  $r$ 은 극좌표계에서  $\theta$ 에 관하여 최소주기  $24\pi$ 를 가진다.
- (2) 곡선  $r$ 은  $y$ -축에 관하여 대칭이다.
- (3) 각 날개와 몸체는 12 개의 줄무늬선을 갖는다.
- (4) 날개(왼쪽 및 오른쪽), 몸체 및 꼬리의 내부 면적과 둘레 길이는 각각 다음과 같다.

	내부면적	둘레 길이
윗 날개	17.6556486536818455977814897247	20.350995078112749759082545480
중앙 날개	1.49378580174006158191227533375	8.437840982101135331835530697
아랫 날개	6.26059545764439485601186697275	15.208037991973768260024126863
몸체	1.36152603368862888062742282655	5.3851656389456496707511116396
꼬리	0.0059032369224291312980983936923	0.5719306405284223135316518012

- (5) 오른쪽 날개축, 몸체축, 꼬리축의 경사각과 끝점의 위치 및 축의 길이는 각각 다음과 같다.

	경사각(°)	끝점 위치	축의 길이
오른쪽 윗 날개축	47.58	(3.4063582494, 3.7286754875)	5.05037596766762030600041665311
오른쪽 중앙 날개축	1.64	(1.9707383088, 0.05666542068)	1.97155280217573887949923868699
오른쪽 아랫 날개축	315.77	(2.4388754449, -2.3739281122)	3.40347588767494427919602648058
몸체축	90	(0, 2.4729712596989290066451)	2.47297125969892900664513577018
꼬리축	270	(0, -0.281718171540954764639)	0.28171817154095476463971252864

- (6) 가장 바깥쪽 줄무늬선이 갖는 극소값은  $\theta = 6.5\pi$ 에서 가지며 그 값은  $e-1$ 이다.

(증명) (1)

$$\sin^5\left(\frac{\theta - \pi/2}{12}\right) = \frac{5}{8} \sin\left(\frac{\theta - \pi/2}{12}\right) - \frac{5}{16} \sin\left(\frac{3(\theta - \pi/2)}{12}\right) + \frac{5}{16} \sin\left(\frac{5(\theta - \pi/2)}{12}\right),$$

$$\sin \theta, \cos 4\theta \text{ 로부터 주기 } T_1 = \frac{2k_1\pi}{1/12} = 24k_1\pi, \quad T_2 = \frac{2k_2\pi}{3/12} = 8k_2\pi,$$

$$T_3 = \frac{2k_3\pi}{5/12} = (24/5)k_3\pi, \quad T_4 = 2k_4\pi, \quad T_5 = 2k_5\pi/4 \text{ 를 생각하자.}$$

$T = 24k_1\pi = 8k_2\pi = (24/5)k_3\pi = 2k_4\pi = (1/2)k_5\pi$  라 하면 최소 공통주기  $T$ 는 최소의 자연수쌍  $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$ 을 선택함으로써 결정된다.

$k_1 = (1/3)k_2 = (1/5)k_3 = (1/12)k_4 = (1/48)k_5$  이므로,  $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 5, k_4 = 12, k_5 = 48$  을 택하여  $T$ 는  $24\pi$  이다.

(2)  $0 \leq (2k+1)\pi - \theta \leq 24\pi$  에 속하는  $r(\theta) = r((2k+1)\pi - \theta)$  인  $k$ 의 존재를 보이면 된다.

$$\begin{aligned} e^{\sin((2k+1)\pi - \theta)} &= e^{\sin(\pi - \theta)} = e^{\sin \theta}, \quad 2\cos 4((2k+1)\pi - \theta) = 2\cos 4\theta, \\ \sin\left(\frac{(2k+1)\pi - \theta - \pi/2}{12}\right) &= \sin\left(\frac{2k\pi + \pi/2 - \theta}{12}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{6} + \frac{\pi/2 - \theta}{12}\right) \\ &= \sin\left(\pi + \frac{\pi/2 - \theta}{12}\right) = \sin\left(\frac{\theta - \pi/2}{12}\right) \quad \text{for } k=6. \end{aligned}$$

그러므로  $r(\theta) = r(13\pi - \theta)$  를 만족하고 나비곡선은  $y$ 축에 대해 대칭이다.

(3) 나비곡선  $r$ 을 면밀히 관찰하면, 대칭성에 의해 방정식  $r(\theta)$ 의 그래프(<그림 3>)는 각 날개와 몸체가 각각 12개의 극값을 가지고 있으며 이것으로 인하여 줄무늬선이 12개가 존재함을 알 수 있다.

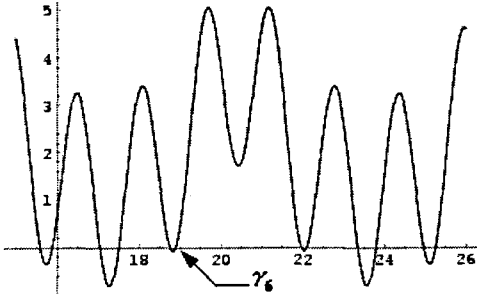
(4) <그림 3> - <그림 6>을 면밀히 관찰하여  $15 \leq \theta \leq 26$ 의 범위에서  $r(\theta) = 0$  과  $r'(\theta) = 0$ 의 실근을 각각  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{12}$ 와  $h_1, h_2, \dots, h_{14}$ 이라 하자. 또한  $54 \leq \theta \leq 63$ 의 범위에서  $r(\theta) = 0$ 과  $r'(\theta) = 0$ 의 실근을 각각  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{11}$ 와  $m_1, m_2, \dots, m_{11}$ 이라 하자. 다음 도표 1, 2는 매스매티카의 명령어 *FindRoot*를 활용하여  $r(\theta) = 0$ 과  $r'(\theta) = 0$ 의 실근을 약 28 자리수의 정밀도로 구한 것을 보여준다.

<도표 1>  $15 \leq \theta \leq 26$ 의 범위에서  $r(\theta) = 0$  과  $r'(\theta) = 0$ 의 실근

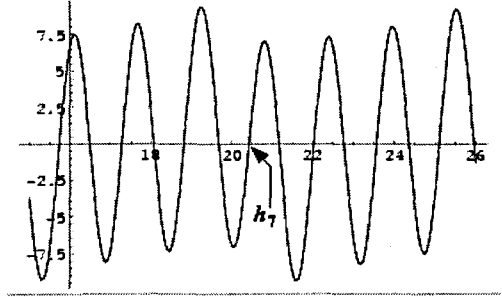
$n$	$\gamma_n$	$h_n$
1	15.5906014970706258924771161760900947434698800261	15.7348023401775012124838036854166233517924083098
2	15.8820994957353466439048379904985966719788299603	16.4856902432621106969943177958239579213564686937
3	17.0463725127229350985171082154999858548044024205	17.2758573457999539858911024806960753352217178801
4	17.5044604777848144282488089484089003063269500138	18.0776516375148579966102898691200552013912110890
5	18.7570933259414810916106397827854383473147943588	18.8175453214821746195104937903379272978727466223
6	18.8773874831393004919500973411204255392691323223	19.6800972852666096078034832008670243415864001503
7	21.9633170135280116080642666415131119552940698695	20.4203522483336560500071819913167687472816010959
8	22.0836111707258310084037241998480991472484078331	21.1606072114007024922108807817665131529768020416
9	23.3362440188824976717655550342246371882362521780	22.0231591751851374805038701922956101966904555696
10	23.7943319839443770014972557671335516397587997714	22.7630528591524541034040741135134822931719911029
11	24.9586050009319654561095259921349408225843722315	23.5648471508673581141232615019374621593414843117
12	25.2501029995966862075372478065434427510933221657	24.3550142534052014030200461868095795732067334982
13		25.1059021564898108875305602972169141427707938820
14		25.9587753205376148288672276683555315758929434281

<도표 2>  $54 \leq \theta \leq 63$ 의 범위에서  $r(\theta) = 0$  과  $r'(\theta) = 0$ 의 실근

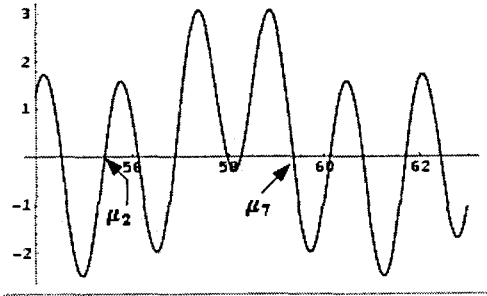
$n$	$\mu_n$	$m_n$
1	54.5357980245880880736872107296592143775929042670	54.1779255835110778493478221818235982812087153214
2	55.4304210859911057783041543604172302737239169940	54.9807699568263999117680980905091825374319801293
3	56.1218978999426723075604463807326485958767056983	55.7719862263769074710631435056858371895110939173
4	56.8882992865623402604017701109231422589940676147	56.5199222878670607213057896546642709690963160477
5	57.9788583089051018406382095702499611652820113295	57.3776185426113161661840351838568828460936351630
6	58.2600698739172479824795956110916455500132564473	58.1194640914111749115589025906708033576476338884
7	59.3506288962600095627160350704184644563012001622	58.8613096402110336569337699974847238692016326139
8	60.1170302828796775155573588006089581194185620786	59.7190058949552891018120155266773357461989517292
9	60.8085070968312440448136508209243764415713507829	60.4669419564454423520546616756557695257841738595
10	61.7031301582342617494305944516823923377023635099	61.2581582259959499113497070908324241778632876475
11	62.4341901817081988408174360602509949924672934036	62.0610025993112719737699829995180084340865524554



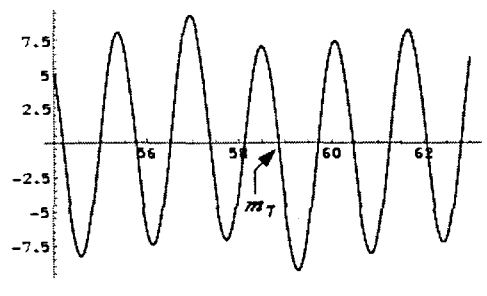
<그림 3>  $r(\theta)$  vs.  $\theta$ ,  $15 \leq \theta \leq 26$ .  
(직교좌표계)



<그림 4>  $r'(\theta)$  vs.  $\theta$ ,  $15 \leq \theta \leq 26$ .  
(직교좌표계)



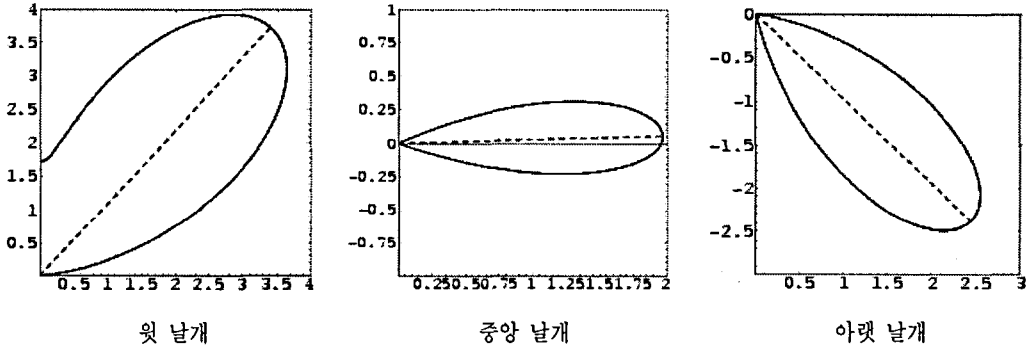
<그림 5>  $r(\theta)$  vs.  $\theta$ ,  $54 \leq \theta \leq 63$ .  
(직교좌표계)



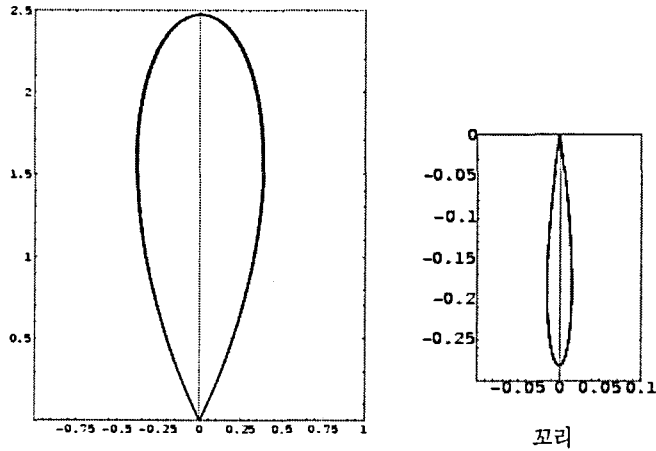
<그림 6>  $r'(\theta)$  vs.  $\theta$ ,  $54 \leq \theta \leq 63$ .  
(직교좌표계)

그러므로, 오른쪽 윗날개 곡선은 집합  $U = \{r(\theta) : r_6 \leq \theta \leq h_7\}$  으로 표현된다. 윗 날개의 내부 면적[4]은  $A_U = 2 \times \frac{1}{2} \int_{r_6}^{h_7} r^2 d\theta = 17.6556486536818455977814897247$  으로 주어지고, 윗 날개의 둘레길이[4]는  $P_U = 2 * \int_{r_6}^{h_7} \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta = 20.350995078112749759082545480$  으로 주어진다.

오른쪽 중앙 날개 곡선은 집합  $M = \{r(\theta) : \mu_7 \leq \theta \leq \mu_8\}$  으로 표현된다. 중앙 날개의 내부 면적은  $A_M = 2 \times \frac{1}{2} \int_{\mu_7}^{\mu_8} r^2 d\theta = 1.49378580174006158191227533375$  으로 주어지고, 중앙 날개의 둘레 길이는  $P_M = 2 * \int_{\mu_7}^{\mu_8} \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta = 8.437840982101135331835530697$  으로 주어진다.



<그림 7> 오른쪽 날개 곡선 (극좌표계)



<그림 8> 몸체 및 꼬리 곡선 (극좌표계)

오른쪽 아랫 날개 곡선은  $L = \{r(\theta) : \gamma_4 \leq \theta \leq \gamma_5\}$  으로 표현된다. 아랫 날개 곡선의 내부 면적은  $A_L = 2 \times \frac{1}{2} \int_{\gamma_4}^{\gamma_5} r^2 d\theta = 6.2605954576443948560118669727528$  이고, 아랫 날개 곡선의 둘레길이는  $P_L = 2 * \int_{\gamma_4}^{\gamma_5} \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta = 15.2080379919737682600241268637$  이다.

몸체 곡선은 집합  $B = \{r(\theta) : \mu_1 \leq \theta \leq \mu_2\} \cup \{r(\theta) : \mu_9 \leq \theta \leq \mu_{10}\}$  으로 표현된다. 몸체 곡선의 내부 면적은  $A_B = 2 \times \frac{1}{2} \int_{17.5\pi}^{\mu_2} r^2 d\theta = 1.361526033688628880627422826558820869$  이고,

몸체 곡선의 둘레길이는  $P_B = 2 * \int_{17.5\pi}^{\mu_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = 5.3851656389456496707511116396$  이다.

꼬리 곡선은 집합  $T = \{r(\theta) : \mu_5 \leq \theta \leq \mu_6\}$  으로 표현된다. 꼬리 곡선의 내부 면적은  $A_T = \frac{1}{2} \int_{\mu_5}^{\mu_6} r^2 d\theta = 0.0059032369224291312980983936923513460283845$  이고, 꼬리 곡선의 둘레 길이는  $P_T = \int_{\mu_5}^{\mu_6} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = 0.5719306405284223135316518012$  이다.

(5) <그림 7>에서 점선으로 표시된 윗 날개축, 중앙 날개축, 아랫 날개축들의 끝점 위치는  $r$  이 극대가 되는 위치를 확인하여, 각각  $\theta = h_6$ ,  $\theta = m_8$ ,  $\theta = h_4$  에서 발생하며, 이  $\theta$  값에서  $r$  값을 구하고  $|r|$ ,  $(x, y)$  를 계산하여, 각각 날개축의 길이와 끝점 위치를 계산할 수 있다.  $r < 0$  이면  $x = r \cos \theta = (-r) \cos(\theta - \pi)$ ,  $y = r \sin \theta = (-r) \sin(\theta - \pi)$  이므로, 축의 경사각을  $\tau$  라 하면  $\tau = \begin{cases} \beta, & r \geq 0 \\ \beta - \pi, & r < 0 \end{cases}$ ,  $\theta \equiv \beta \pmod{2\pi}$  으로 주어진다. 여기서  $\theta \equiv \beta \pmod{2\pi}$  은  $\theta$  를  $2\pi$  로 나누었을 때 나머지가  $\beta$  임을 의미한다.

두 개의 자폐선  $\Gamma_1 = \{r(\theta) : \mu_1 \leq \theta \leq \mu_2\}$  및  $\Gamma_2 = \{r(\theta) : \mu_9 \leq \theta \leq \mu_{10}\}$  을 각각 정의하면  $B = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  는 몸체 곡선을 이루고, 몸체축(대칭축)의 끝점 위치는 두 자폐선의 교점이 되며 이때  $\theta = 19.5\pi$  이다. 몸체축의 길이는  $2 + \frac{(1+\sqrt{3})^5}{128\sqrt{2}} - \frac{1}{e} \approx 2.47297126$  이며, 경사각은 90도, 두 자폐선은 점(0, 2.47297125969892900664513577018)에서 서로 만난다.

꼬리 곡선을 형성하는 자폐선은 집합  $T = \{r(\theta) : \mu_5 \leq \theta \leq \mu_6\}$  으로 표현된다. 꼬리축의 끝점 위치는  $\theta = m_6 = 18.5\pi$  일 때 (0, -0.28171817154095476463971252864) 이며 꼬리축의 길이는 0.28171817154095476463971252864 이며, 경사각은 270도이다.

(6) <그림 3>의 그래프로부터  $r$  의 극소값중 최대는  $\theta = h_7 = 6.5\pi$  에서  $e - 1$  임을 알 수 있다. □

### III. 나비곡선의 작도 프로그램, 결과 분석 및 토론

#### 3.1 나비곡선 작도를 위한 매스매티카 프로그램 코드

다음은 극좌표계에서 Fay의 나비곡선을 작도하는 매스매티카[7](버전 4.0) 프로그램 코드이다.



```
(* Fay's Butterfly Curve: Mathematica 4.0 Codes *)
<<Graphics`Graphics`; (*그래픽팩키지 호출*)
r = Exp[Sin[θ]] - 2 Cos[4 θ] + Sin[(θ-Pi/2)/12]^5;
x = r*Cos[θ]; y = r*Sin[θ];
PolarPlot[r,{θ, 0, 24Pi}, Axes->True, PlotRange->{{-4,4},{-4,4}},
Frame->True, PlotPoints->16400, AspectRatio->Automatic];
```

### 3.2 결과 분석 및 토론

17세기 갈릴레오(Galileo Galilei, 1564-1642)는 “우주는 인간의 응시(凝視)에 끊임없이 열려있지만, 우주가 쓰여진 언어와 문자를 인간이 먼저 이해하지 않고는 우주를 결코 이해할 수 없다. 우주는 수학이라는 언어로 쓰여져 있으며, 그 문자는 삼각형, 원 및 기타 도형으로서 이것 없이는 우주언어의 한마디조차도 인간이 이해하는 것은 불가능하다. 이 언어와 문자가 없다면 인간은 어두운 미로에서 방황할 뿐이다.”라고 표현하였다. 19세기 로바체프스키(Lobachevsky Nicolai, 1793-1856)는 “실제 자연 세계의 현상에 적용되지 않을 수도 있는 추상적인 수학의 분야는 없다.”라고 하였듯이 우주의 언어인 수학과 우주의 문자인 도형을 사용하여 신비로운 자연 세계를 탐구하는 것은 실로 가치있는 일이다. 17세기 데카르트(Rene Des Cartes, 1596-1650)는 직교좌표계를 써서 그래프 개념을 도입했고, 방정식을 기하학적 도형으로, 기하학적 도형을 일련의 방정식으로 바꾸어 놓을 수 있다는 것을 밝혔다. 여러 수학자들에 의해 3차, 4차 및 고차의 방정식이 하트형, 꽃잎형, 루프형, 8자형 등 새로운 곡선을 그려낸다는 것도 증명되었다.

본 논문에서는 우주의 언어인 수학과 우주의 문자인 도형을 활용하여 자연 속에서 발견되는 나비모양을 수학적으로 모델링함으로써, 신비로운 자연의 세계를 탐구하였다. 수학적 모델링의 효율적 분석을 위하여, 수학전문 소프트웨어인 매스매티카의 정밀계산 및 고화질 그래프 처리 기능을 활용하였다. Fay의 나비곡선  $r(\theta)$ 의 작도는 최소주기 범위( $0 \leq \theta \leq 24\pi$ )내에서 매스매티카의 PolarPlot 명령어를 활용하여 그림 1에서 보는 바와 같이 효율적으로 작도하였다. 정리 2.1에 기술된 나비곡선의 기하학적 성질의 증명에 사용된 수치해석적 결과는 매스매티카의 FindRoot (방정식의 근) 명령어 및 NIntegrate (수치적분) 명령어에 의해 수행되었다. 기본 계산은 48자리의 유효숫자를 사용하였고, 계산결과와 정밀도를 대략 28자리 이상으로 유지하기 위해 AccuracyGoal  $\rightarrow$  28, WorkingPrecision  $\rightarrow$  48 과 같은 선택사항을 두 명령어에 공통으로 적용하였다. 고등학교 및 대학의 미적분학 과정에서 다루는 함수의 극값 이론으로부터 나비곡선의 최소주기, 대칭성, 날개와 몸체의 줄무늬선 갯수, 경사각, 축의 위치, 길이 등을 확인하였다. 그림 3으로부터 극대값 중 크기 순으로 차례로 4개를 확인하면 각각  $\theta = h_4, \theta = h_6, \theta = h_8, \theta = h_{10}$ 에서 오른쪽 아랫날개, 오른쪽 윗날개축, 왼쪽 윗날개, 왼쪽 아랫날개축들의 끝점 위치를 확인할 수 있다. 날개, 몸체 및 꼬리의 내부 면적과 둘레 길이는 극좌표계에서 취급하는 공식을 활용하였다. Fay가 곡선의 방정식  $r = e^{\cos\theta} - 2\cos 4\theta$ 에 시각적 효

과를 높이기 위해 첨가한 항  $\sin^5(\theta/12)$ 이 나비 날개의 대칭성을 유지하고, 동시에 줄무늬를 갖게 하는 것은 자연세계에 내재하고 있는 법칙과 규칙을 수학적 모델링으로 기술할 수 있음을 보여주는 전형적인 예임을 강조하고 싶다.

학생들이 수학에 쉽게 접근하지 못하는 이유 중의 하나는 수학적 내용이 너무 추상적이기 때문이다. 따라서 교사들은 구체적이고 실용적인 소재를 선택하여 학생들이 수학에 흥미를 느끼고, 생활 속에서 수학을 발견할 수 있도록 컴퓨터의 활용과 수학 소프트웨어의 사용이 필요하다는 것을 강조하여야 한다. 또한 교사의 수학지도 능력을 향상시키고 교육의 학습 효과를 높이기 위해서는 수학적 모델링에 관한 관심과 관련 지식을 습득하여야 하며, 매스매티카와 같은 컴퓨터 수학 교육 도구를 충분히 활용할 수 있어야 한다.

본 연구에서 Fay가 발견한 나비곡선의 대칭성을 이론적으로 밝히고, 또한 날개의 둘레 길이, 경사각 등 기하학적 성질을 매스매티카를 활용하여 수치적으로 정밀하게 밝힌 것은 유사 분야의 문제 해결에 파급 효과가 클 것으로 예측된다.

## 참 고 문 헌

- 구광조·박한식·이강섭·이동수·정지호·황선옥(1996). *공통수학*, 서울: (주)지학사.
- 대한수학교재편찬위원회(1990). *미적분학*, 서울: 단국대학교 출판부.
- Bourke, Paul. (2003). *Butterfly Curve*, <http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/curve/butterfly>
- Fay, Temple H. (1989). The Butterfly Curve, *Amer. Mathematical Monthly* **96**(5), pp.442-443.
- Fay, Temple H. (1997). A Study in Step Size, *Mathematics Magazine* **70**(2), pp.116-117.
- Longley; Smith & Wilson. (1960). *Analytic Geometry and Calculus*, Ginn and Company.
- Wolfram, Stephen. (1999). *The Mathematica Book*, 4th ed., Cambridge University Press.