韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제 1호, 2004. 1. 267-276.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 1, Jan. 2004. 267-276.

# 마이크로월드에서 함수의 그래프에 대한 질적 접근

김 화 경 (서울대학교 대학원)
송 민 호 (서울대학교 대학원)

이 글은 초등학교 학생들을 대상으로 상호변화적(covariational) 개념으로 변화율에 대한 교수실험을 담고 있다. 기하적 문맥에서 함수의 그래프를 자연스럽게 도입하고, 함수의 변화율에 대한 상호변화적 질적 접근의 예를 제시한다. 또한 언어적 명령을 통하여 스스로 함수의 그래프를 만들어보도록 하고 함수의 그래프를 분석하는 경험을 가지게 하여 이후 함수와 그 역함수와의 개념을 마이크로월드에서 경험하도록 하는 환경과 그 역할에 대하여 논의한다. 이 과정을 통한 마이크로월드, 학생, 연구자의 역할과 상호작용을 알아보고 이 후의 대수식의 도입에 대한 문제를 논의한다.

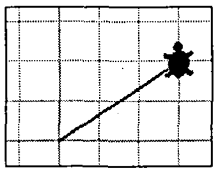
## 1. 도 입

Eisenberg(1991)은 고등 수학적 사고에서 함수 그리고 함수와 관련된 개념이 시각적으로 다루어지지 않고 있으며, 이러한 비시각적 접근이 학생의 함수 감각 발달을 방해한다고 말하고 있다. Stroup(2002)는 대수식 조작 위주의 현재 함수와 미적분(calculus) 교육에 대한 하나의 대안으로 질적 미적분(qualitative calculus)을 제안하고 있다. 이는 대응(correspondence)이라는 수학적으로 엄밀한 관점으로 함수를 파악하기 보다는 상호변화(covariation)라는 보다 직관적인 관점으로 함수의 본연의 성질로 파악하고 이를 시각적이며 활동적으로 학생들에게 도입하여 종합하는 방식을 말한다. 마찬가지로 박교식(1992)은 함수의 대응적 측면만을 부각하는 것에 대한 교육적 문제를 지적하고 있다. 미적분에 국한하지 않고 수식이 도입되기 이전에 함수에 대한 시각적, 활동적 접근을 우리는 함수에 대한 질적 접근(qualitative approach)라고 부르도록 하겠다. 이러한 질적 접근은 기존의 교육과정이 대응이라는 관점에서 함수를 도입하고 이를 대수식으로 정리하며 대수적 조작을 통하여 문제해결에 치중하고 있어 함수의 변화(change)적 속성을 소홀히 하고 있다는 점에 대한 반성의 결과이다. 다시 말해 함수에 대한 질적 접근은 대수식을 사용하지 않고 'how much'와 'how fast'라는 변화에 관한 문맥을 담은 여러 가지 환경을 통하여 학생들에게 제시하자는 것이다. 실제로 Computer Based Ranger(박지현외, 2002; Berry et al., 2003)이나 Motion Detector(Nemirovsky et al., 1998), MathWorlds(Kaput, 1998) 라는 환경을 이용한 연구들은 함수에 대한 질적 접근을 시도한 예이다. 이러한 연구들은 속도·시간 그래프와 위치·시간 그래프라는 두 가지 표현을 행동과 연결시키고, 이를 통하여 함수와 변화율에 대한 질적 접근이 다루어지고 있다. 이들 연구들의 공통적인 특징은 시각적 그래프와 활동이 강조되고 있으며 대수식을 사용하지 않고 함수와 변화율에 대한 개념을 학습할 수 있는 교수 방법에 대한 연구가 이루어지고 있다는 점이다.

본 연구는 보다 어린 학생들에게 직관적이며 시각적으로 분명한 행동으로 속도 · 시간 그래프나 시간 · 위치 그래프 등의 그래프 개념을 도입하는 것이 가능하지 않을까하는 점에서 시작한다. 그래프에 대한 개념이 부족한 초등학교 학생들에게 직관적으로 이해할 수 있는 실제상황으로 그래프를 도입하고 그 문맥 속에서 함수와 그래프에 대한 질적 접근을 다루어보려고 한다. 특별히 일정한 속도로 흐르는 강물 위를 헤엄치는 거북이가 움직이는 자취를 통하여 함수의 그래프를 보다 직관적으로 도입하는 것을 생각해보자. 강물은 가로로 흐르고 이와 수직이 되게 세로로 헤엄치는 거북이 환경에서 만약 강물이 일정한 속도로 흐르게 된다면 거북이의 속도 변화에 따라 거북이가 움직이는 자취는 함수의 그래프로 볼 수 있다. 특히 강물의 속도를 1로 본다면 이는 시간에 따른 거북이의 위치 그래프가 된다. 주목할 점은 함수의 그래프라는 용어를 먼저 도입하는 것이 아니라 시간 · 위치 그래프의 의미를 가지고 있는 환경이 먼저 도입되고 있다는 점이다. 사전 인터뷰를 통하여 학생들이 거북이의 운동을 나타내는 표현은 방향에서 약간의 차이를 보이기는 하지만 함수의 그래프를 나타내는 방식과 크게 다르지 않다는 사실에 주목하였다. 여기서 거북이를 이용하는 이유는 아이들이 보다 친숙해 하는 LOGO(Abelson et al., 1980; Papert, 1993)의 영향이다. LOGO가 눈이 쌓인 운동장 위를 움직이는 활동적 환경을 컴퓨터 환경으로 구현한 것이라면 여기에 제시된 환경은 강물 위를 움직이는 거북이를 컴퓨터로 옮겨놓은 환경인 것이다. 즉, 기존의 LOGO에 강물 위의 거북이의 움직임을 표현할 수 있는 새로운 명령어를 추가하여 함수와 그 그래프에 대한 질적 접근이 가능한 환경을 구성하였다. 강물의 속도와 거북이의 속도를 동시에 표현할 수 있는 명령으로 <표 1>과 같은 명령을 도입한다.

<표 1>

**move a, b**
가로축으로 a만큼, 세로축으로 b 만큼 움직이는 명령



상호변화라는 것은 독립변수와 그에 종속변수의 변화 사이의 관계에 주목한다. 그래프 표현에서 변화하는 양은 $\Delta x$, $\Delta y$로 표현될 수 있을 것이다. 'move $\Delta x$, $\Delta y$'는 이러한 상호변화적 관점에서 학생들이 자신의 생각을 거북이의 움직임으로 나타낼 수 있는 중간 언어 역할을 하게 된다. 즉, 수학적 표현에 도달하기 위한 중간언어 역할을 한다.

이 글은 기존 연구들을 분석하여 이론적 배경을 제시하고 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 한 교수 실험의 몇 가지 에피소드를 소개하여 초기 대수(Early Algebra)의 관점에서 학생들의 함수에 대한 질적 접근에 대하여 알아보고자 한다. 특별히 우리는 연구자에 의해 주어진 환경을 이용한 학생들의 인지변화와 학생 스스로 만드는 과정, 연구자의 환경 재구성에 대하여 논해보도록 하겠다.

## 2. 이론적 배경과 마이크로월드

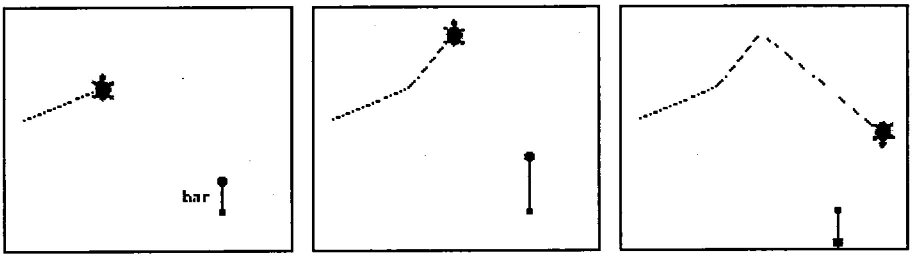
Carlson et al.(2002)과 Laborde et al.(1998)은 함수의 특징을 학교 수학에서 취급하는 관점에 따라 대응과 상호변화로 나누어 보고, 상호변화의 관점이 보다 변화[1](change)라는 개념을 잘 나타내고 있다로 말하고 있다. 이는 함수의 대수식 표현을 보다 중시하는 현재의 교육과정에 대한 반성이다. 기존의 학교 수학이 방정식의 미지수로 문자를 도입하고 이후 변수로 발전시켜 대수식을 학습한 이후 대수식을 만족하는 점들의 집합이라는 대응으로 그래프를 도입하고 있어 변화라는 함수의 본질적인 의미를 학생들이 인식하는 데에 어려움이 있음을 지적하고, 변화라는 개념은 수치적, 양적인 개념이 아니고 질적, 시각적인 움직임으로 도입되어야 한다고 주장하고 있다. 변화를 나타내는 표현 체계가 부족하던 종이와 연필의 시대에 비해 컴퓨터 테크놀러지의 발달은 함수를 변화라는 관점에서 학습할 수 있는 시각적인 표현을 가능하게 하였다. 즉, 시각적 표현 체계의 발달(Kaput, 1998)은 함수의 질적이고 시각적인 도입을 비교적 어린 나이에 가능하게 해 주고 있다. 이에 대한 많은 연구들 중에서 Nemirovsky(1998)나 Berry et al.(2003)은 각각 모션 디텍터(motion detector)와 CBR(Computer Based Ranger)이라는 환경을 이용하여 함수에 대한 학생들의 시각적이고 질적인 접근에 대한 연구를 진행하였다. 이 연구들은 교육을 특정한 지식의 습득이라는 'know how'나 'know what'으로 보지 않고 어떠한 상황에서 교육이 이루어지는가에 대한 'know with'의 관점을 취하고 있으며 우리는 이에 동의한다. 우리는 새로운 표현 체계를 갖는 환경에서 학생들의 학습을 이해하려고 한다.

우리는 앞의 연구들에 등장하는 환경, 툴(tool)은 분명 잘 디자인된 도구이지만 연구자나 교사가 새롭게 디자인할 수 있는 여지가 부족하다고 느낀다. 이러한 이유로 보다 자유로운 디자인이 가능한 LOGO로 대표되는 마이크로월드(조한혁, 2003; diSessa, 2000; Edwards, 1995; Noss et al., 1996; Wilensky, 1993)에 대하여 고려해 보도록 하자. LOGO를 비롯한 마이크로월드의 특징은 그 자체가 언어라는 점이다. 언어로 구조화된 툴은 그 언어를 습득하는 대상에 의해서 손쉽게 새로운 환경으로 구체화될 수 있다. 하나의 개념 형성을 위하여 특별히 구성된 프로그램이 아니고 작은 수학적 세계

1) 동적 기하 환경(DGS)에서는 좀더 동적인 변화에 관심을 갖는다. 김민정외(2003), Goldenberg et al.(1992), Hazzan et al.(1997)과 Laborde et al.(2001)은 DGS에서 함수 개념 학습에 대하여 논하고 있다. 우리는 DGS가 함수의 변화를 나타내는 새로운 환경이라는 관점을 지지한다. 여기에 제시된 마이크로월드는 동적 기하 기능을 포함하고 있으며 우리는 이를 이용하여 동적 기하 환경에서 학생들의 함수 개념 학습에 대하여도 짧은 인터뷰를 실시하였다. 우리는 숨어있는 종속성을 발견하는 앞선 연구와는 달리 대칭점과 중점만을 이용하여 종속성을 부여하고 독립변수에 해당하는 점의 움직임에 따른 종속점들의 움직임을 예측하도록 하는 문제를 제시하였다. 이를 통하여 학생들이 동적 기하 환경에서 함수의 합성에 대한 이해를 알아보려 하였다. 인터뷰를 통하여 학생들은 하나의 명령을 통한 종속성 부여와 그에 따른 움직임은 손쉽게, 때로는 놀라운 방법으로 예측하고 있었지만 여러 번의 합성을 거치는 경우에는 어려움을 겪고 있었다. 그러나 한번 익숙해진 합성의 개념은 이후 자연스럽게 학생들에게 내면화되고 있음을 알 수 있었다. 그 다음 과정으로 원하는 움직임을 갖도록 함수를 만들어보게 하였다. 우리는 동적 기하 환경이 새로운 함수에 대한 표현 체계이며 합성의 과정을 다루는 좋은 환경이 될 수 있다고 생각한다.

를 구현하고 있는 환경이며 컴퓨터와 의사소통할 수 있는 환경이다. 이는 연구자 자신이 원하는 환경을 디자인할 수 있게 하며, 학생은 자신의 입장에서 컴퓨터와 의사소통할 수 있게 된다(Sutherland, 1995). 또한 학생들의 표현은 사고와 반성의 도구가 된다(Brizuela et al.,2000). 언어적 표현을 통하여 학습자와 연구자, 컴퓨터 사이의 의사소통내지 상호작용하는 과정은 그 자체로 하나의 사고체계를 형성하고 학생에게 반성적 사고를 할 수 있는 경험을 제공할 수 있다는 점에서 의미가 있다. 우리는 Javamal 마이크로월드를 이용한다.

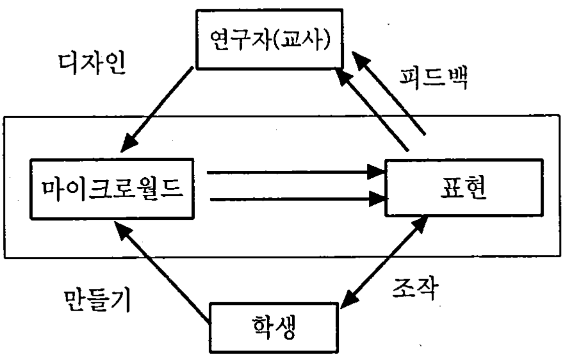
Javamal을 이용하여 학생들이 함수의 그래프를 경험하고 예측할 수 있는 환경으로 연구자에 의하여 구성된 툴은 <그림 1>과 같다. <그림 1>의 오른쪽 아래의 bar는 손잡이의 역할을 하는 것으로 마우스로 끌기(drag)가 가능한 점들이다. bar를 통하여 학생들은 거북이의 방향(위쪽과 아래쪽)과 속도를 변화시키고, 그에 따라서 거북이의 위치의 변화가 화면에 나타나게 된다. 즉 bar를 통하여 속도·시간 그래프 역할을, 거북이가 움직이는 자취를 통하여 위치·시간 그래프 역할을 기대하고 연구자에 의하여 디자인된 환경이다.




<그림 1>

우리는 이 환경을 이용한 함수의 질적 접근에 대한 교수 실험을 실시하였다. 이후 또한 학생의 반응에 따라 점차로 디자인을 수정하며 새로운 개념에 대한 상황을 생각해 보게 된다. 이와 같은 일련의 과정을 마이크로월드와 연구자를 중심으로 나타내면 <표 2>과 같다.

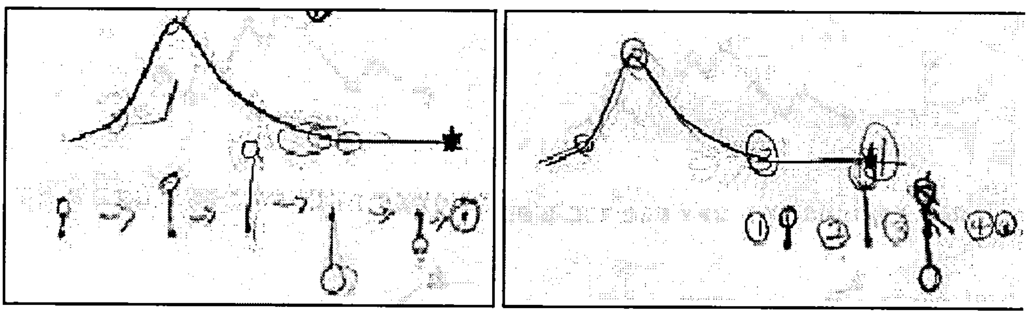
<표 2>



연구자(교사)는 마이크로월드를 이용하여 함수적 상황에 대한 질적 접근을 할 수 있는 툴을 제작하는데 이때 사용하는 도구는 명령이다. 이렇게 사용된 명령은 마이크로월드를 통해서 학생에게 함수적 상황을 나타내는 현상으로 제시되며 학생은 툴과 상호작용하게 된다. 그리고 학생은 그러한 경험을 바탕으로 자신의 생각을 명령으로 마이크로월드에 표현하게 되며 학생의 이러한 반응에 따라 교사는 툴을 재구성하게 된다. 여기서 현상에 대한 질적 접근을 통해서 변화와 관련된 함수의 개념을 받아들이며 자신의 생각을 명령으로 마이크로월드에 전달하는 표현의 과정을 통하여 사고(thinking)와 반성(reflecting)이 일어나게 된다.

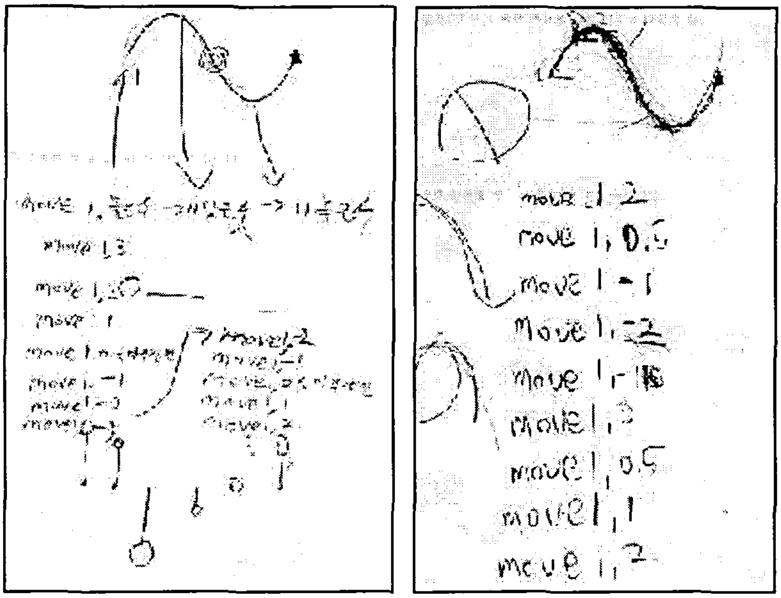
## 3. 에피소드

초등학교 6학년(12~13세) 학생들을 대상으로 한 교수 실험 중에서 변화율과 관련된 에피소드를 제시한다. 컴퓨터가 있는 교실에서 문제를 해결하는 과정을 비디오 테입으로 녹화하고 이를 분석하는 방식을 사용하였다. 주어진 <그림 1>에 제시된 툴을 이용하여 그림을 그리기 위한 조작 순서를 쓰라는 문제를 제시하였으며, 초등학교 6학년 학생 두 명의 답은 <그림 2>와 같다.



<그림 2>

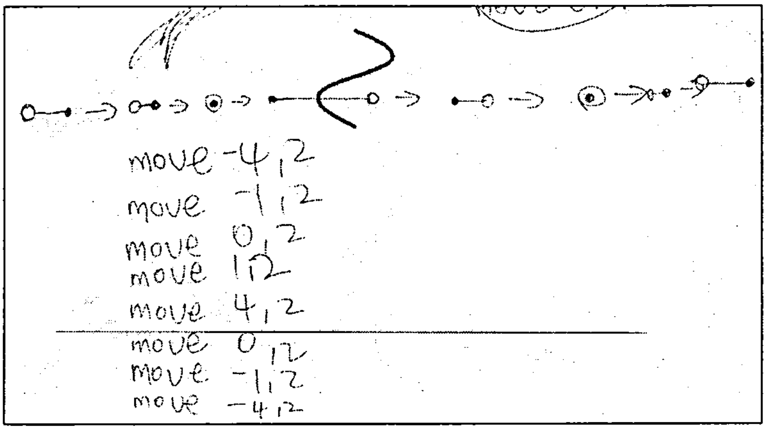
처음 우리가 주목한 사실은 시간에 따라 bar의 위치를 열거한다는 사실이다. 특징적인 위치에 따라 bar의 모양을 순서대로 나타내고 있다. 학생들의 답에서 아래 bar의 움직이는 점을 연속적으로 연결하면 속도·시간 그래프가 된다. 왼쪽 그림은 좀더 연속적인 형태이고 오른쪽 그림은 순간의 bar의 모양을 나타내고 있다. 약간의 차이는 있지만 두 학생 모두 어느 정도의 변화율에 대한 질적 접근을 이루고 있다. 이후 주어진 툴을 통한 조작의 경험을 바탕으로 'move a, b'를 학생들에게 도입하여 직접 원하는 그림을 그리기 위한 명령을 시도할 것을 요구하였다. <그림 3>와 같다.



<그림 3>

<그림 1>는 조작을 강조하여 변화율에 대한 경험할 수 있는 툴이라면 <그림 3>는 학생 스스로 명령을 통하여 그림을 그리는 과정을 보여준다. 한쪽은 조작을 또 다른 한쪽은 만들기(making)를 강조한다는 점을 주목하기 바란다. 특히 이 과정에서 'move 1, a'는 일정한 강물 위에서 거북이의 움직임에 대한 학생들의 생각을 표현할 수 있는 중간 언어가 된다.

그러나 상호변화적 추론을 위해서는 변하는 양을 바꾸어 보는 것이 필요할 것이다. 이에 거북이의 속도를 일정하게 하고 강물의 속도를 변화시키는 툴에 대한 고려를 할 수 있다. 이 경우에 학생들이 중간 언어로 'move a, b'를 혼동 없이 사용할 수 있을 것인가? 우리는 역함수에 해당하는 이 상황을 학생들은 자신의 언어로 나타낼 수 있는가를 알아보기 위한 수업이 필요하다고 느꼈다. 같은 방식으로 툴을 디자인하였으며 bar가 가로로 움직이는 툴을 제시하였고, 이후 학생들이 명령을 사용할 수 있는 기회를 제공하였다. <그림 4>은 학생의 답이다.




<그림 4>

두 경우 모두 학생들은 우선 앞에서 자신이 경험한 bar를 생각한다는 점이다. 즉 어느 곳에서 bar의 길이가 어떻게 변하는 지 생각하고 이를 수치화하여 명령어를 작성하려고 노력한다는 점이다. 'move a, b'는 순간순간의 변화를 나타내는 명령이다. 이는 극한으로 변화율의 개념에 완전히 다다른 것은 아니지만 그로 나아가는 중간적인 역할을 담당할 수 있다고 생각한다. 특히 증가에서 감소로, 또는 요철이 바뀌는 위치의 특징이 move를 이용하여 설명 가능하다.

위의 에피소드들은 어린 학생들에게 증가와 감소, 변화율 등의 함수의 성질에 대한 질적 접근이 가능하다는 점을 보여준다. bar의 움직임에 따라 명령어를 이용하여 제시하고 있다. 내면화(interiorization)가 이루어지고 있는 단계이며 이후 이를 압축화(condensation)하고 대상화(reification)하는 과정을 거쳐야 할 것이다(Sfard, 1991).

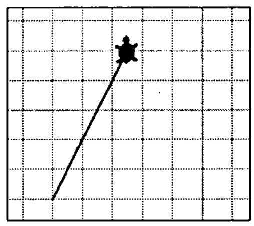
## 4. 마치며

마이크로월드 환경에서 초등학교 학생들의 함수에 대한 질적 접근을 시도한 이 교수 실험을 통하여 우리는 적절한 표현만 제공된다면 초등학교 학생들에게도 함수에 대한 경험이 가능함을 알 수 있었다. 이 때, 학생들이 함수에 대한 사고를 할 수 있도록 도와주는 시각적 표현으로 제시되는 툴이 중요한 역할을 한다. 우리는 마이크로월드를 사용하여 연구자가 마이크로월드를 통하여 툴을 만들고 또한 학생들은 마이크로월드에서 그래프를 그리는 상호작용(interaction)을 강조한다.

이 글을 통하여 주장하려는 점은 크게 두 가지이다. 그 첫째는 함수에 대한 경험이 그래프 표현이 도입되기 이전부터 학생들에게 가능한 것이며 대응이나 대수적 조작이라는 일방적 측면을 강조하는 현재의 교육과정보다는 학생들이 함수적 사고에 관한 경험을 지속적이며 꾸준히 접하고 이 후의 자신의 행동을 언어화, 대상화하는 상호변화 과정에서 대수식이 등장하는 형태의 교육과정이 바람직하

다는 점이다. 경험이 부족한 상황에서 형식적인 정의가 먼저 도입되는 것은 그 본질을 파악할 수 있는 기회를 잃게 만든다. 두 번째는 know with의 관점에서 초기 함수 교육에도 컴퓨터 환경을 적극 활용해야 한다는 점이다. 그러나 그 틀은 단편적으로 하나의 교육과정에만 국한되는 국소적인 것이어서는 안 되며 보다 일반적인 마이크로월드 상에서 구현될 수 있는 것이어야 하고 상황에 따라 교사가 수업의 진행방식을 바꿀 수 있듯이 교사나 연구자가 환경을 디자인하고 재수정할 수 있어야 하며 학생 스스로 컴퓨터와 의사소통할 수 있도록 디자인되어야 한다. 만드는 활동을 통하여 내면화, 압축화, 대상화가 일어날 수 있는 환경이어야 한다는 점이다.

문맥이나 활동을 통한 수학화를 도모하는 많은 연구들이 수평적 수학화를 이루어낼 뿐 수직적 수학화를 이루어내지 못한다는 비판이 있다. 마이크로월드 상황에서의 활동도 여기서 그치게 되면 바람직한 수학화가 이루어지고 있다고 볼 수 없다. 활동을 표현하는 중간 언어를 사용한 마이크로월드는 보다 형식적인 대수식을 사용할 수 있는 기회를 제공해야 한다. <그림 5> 언어적 명령으로 표시된 일차함수의 형태를 모눈종이 형태로 제시한 것이다. 이 환경을 이용하여 함수의 그래프에 이름 붙이기의 대상화 작업을 수행하고 결국은 함수식 $y=2x$ 을 사용하게 되는 수직적 수학화를 기대해 볼 수 있다. 앞으로의 연구는 마이크로월드에서의 경험과 그 경험을 압축화, 대상화하여 수직적 수학화를 이루어낼 수 있는가를 알아보는 것이다. 이 글은 함수의 그래프에 대한 질적 접근과 중간 언어를 거친 수직적 수학화의 하나의 가능성에 대한 제시이다.


<그림 5>

# 참 고 문 헌

김민정 · 김화경 (2003). DGS 동적 기하 환경에서 종속성에 의한 함수 개념 학습, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 16, pp.67-80, 서울: 한국수학교육학회.

박교식 (1992). 函數 槪念 指導의 敎授現象學的 接近, 서울대학교 대학원 교육학 박사학위 논문.

박지현 · 권오남 · 김래영 · 정호선 (2002). 워크샵 / 수학교육에서 휴대용 테크놀로지의 활용 - 그래픽계산기와 CBL 및 CBR을 중심으로, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> 8, pp.607-622, 서울: 한국수학교육학회.

조한혁 (2003). 컴퓨터와 수학교육, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 42(2), pp.177-191, 서울: 한국수학교육학회.

Abelson, H. & diSessa, A. (1980). *Turtle geometry*, Cambridge, MA: MIT Press.

Brizuela, B.; Carraher, D. & Schliemann, A. (2000). Mathematical notation to support and further reasoning, Symposium paper, *2000 NCTM Research Pre-session Meeting*, pp.18.

Berry, J. S. & Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus, *Journal of Mathematical Behavior* **22(4)**, pp.479-495.

Carlson, M.; Jacobs, S. Coe E.; Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events : a framework and a study, *Journal for Research in Mathematics Education* **33**, pp.352-378.

diSessa, A. (2000). *Changing Minds*, Cambridge, MA: MIT Press.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties, In Tall. D.(Ed.), *Advanced mathematical thinking*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Edwards, L. D. (1995). Microworlds as representation. In diSessa, A., Hoyles, C., Noss, R. & Edwards, L.(Eds.), *Computers and exploratory learning*, Berlin: Springer.

Goldenberg, P.; Lewis, P. & O'Keefe, J. (1992). Dynamic representation and the development of a process understanding of function, In Ed Dubinsky & Guershon Harel(Eds.), *The Concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, pp.235-260, The Mathematical Association of America.

Hazzan, O. & Goldenberg, E. P. (1997). Students' understanding of the notion of function in dynamic geometry environments, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **1**, pp. 263-291.

Kaput, J. (1998). Missing new technologies, new curricula and new pedagogies to obtain extraordinary performance from ordinary people in the next century, In H. S. Park, Y. H. Choe, H. Shin, & S. H. Kim(Eds.), *Proceedings of the 1st International Commission on Mathematical Instruction East Asia Regional Conference on Mathematics Education* **1**, pp.141-156.

Laborde C. & Mariotti M. A. (2001). Grounding the notion of function and graph in DGS, *Cabri World 2001 - Montreal.*

Nemirovsky, R.; Tierney, C., & Wright, T. (1998). Body motion and graphing. *Cognition and Instruction* **16**, pp. 119-172.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Papert, S. (1993). *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas,* Cambridge, Massachusetts: Perseus Publishing.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics* **22**, pp.1-36.

Stroup, W. M. (2002). Understanding qualitative calculus: A structural synthesis of learning research, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **7(1)**, pp.167-215.

Sutherland, R. (1995). Mediating mathematical action, In Sutherland, R. & Mason, J.(Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education,* Berlin: Springer.

Wilensky, U. J. (1993). *Connected mathematics - Building concrete relationship with mathematical knowledge,* Thesis of doctor of philosophy at the Massachusetts Institute of Technology.