韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제 1호, 2004. 1. 277-288.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 1, Jan. 2004. 277-288.

대학수학에서, 학습을 도와주는 기하학적 자료의 개발

김 병 무 (충주대학교)

수학 학습 능력이 낮고 의욕이 없는 학생들에게 수학에 대한 관심과 흥미를 불러일으키고 학습의욕을 유발하는 자료를 개발하여 제시함으로서 도움을 주려고 한다. 학습자료는 시각적으로 이해를 쉽게 하고 학생 수준에 적합한, 관심을 가질 수 있는 내용을 중심으로 실질적인 효과를 기대할 수 있도록 선택한다. 이들 자료에 대한 학생들의 반응을 알아보고 단원별로 체계적으로 학습에 도움을 주는 자료 개발에 활용하려고 한다.

I. 서 론

대학수학에서 교양으로서 수학은 위기를 맞고 있다. 선택하려는 학생수의 감소와 다른 과목 교수들의 냉대에 더하여 학교 당국도 어려운 수학을 구태여 할 필요가 없으므로 시간수를 줄이는데 가세하고 있다. 이에 대한 대책은 수학에 종사하는 모든 사람이 협조하고 대책을 강구해야 하는 심각한 상황이다. 조금이라도 학생들의 주의를 끌고 수학에 가까이 하게 하려면 폭 넓게 이해할 수 있는 수업, 흥미를 끄는 수업, 감동과 자극을 줄 수 있는 수업이 되도록 하며, 또 숫자 속에서 미와 우아함을 느끼도록 접근해 보는 것도 한 방법이 될 것이다(김병무, 1997). 많은 연구가 이루어져 학생들이 수학수업에 자발적으로 참여하게 하면 좋겠지만 현실은 수학이 갖고 있는 특성 때문에 쉬운 일이 아니다.

수업욕구나 동기가 침체된 학생들에게 활력을 불어넣는 방법으로 한가지 내용에 대해 다양한 접근을 통해 학생들은 배우고 싶어하므로(김병무, 1999) 이러한 자료의 개발에 대수적 방법이나 해석적 방법으로 증명이 알려진 내용에 대해 대학수학 수준에서 기하학적 방법(도형이나 그래프 이용)을 이용한 수업 자료를 개발하여 수업에 도움을 주려고 한다. 학생들의 학습을 도와주는 자료를 개발하기 위해, 또 학생들의 학습 스타일과 수준을 알아보기 위해 기초 대수능력과 학습스타일을 조사하여 분석하고 그에 맞는 자료를 찾아 제시하려고 한다. 학생이 학습을 받아들이는 방법은 공부에 접근하는 방법에 달려 있고 따라서, 학습결과의 질에 영향을 준다. 학생들의 학습을 도와주는 자료를 개발하려고 학생들의 기초 수학학습 능력을 <부록1>의 기초 대수 능력 시험을 통해 충주대학교 2003학년도 신입생 주간 209명, 야간 193명에 대해 알아본 결과는 <표 1>과 같고 학생들의 능력은 22점 중 5.60점을 얻어 낮은 학습 능력을 갖고 있음을 알 수 있다.

<표 1> 기초 대수 능력 시험(총점/평균)

	식의 표현 (5)	문자의 의미 설명 (3)	방정식 (3)	지수 (4)	종합문제 (7)	계 (22)
주간(209)	441/2.11	174/0.83	189/0.90	364/1.74	395/1.89	1563/7.48
야간(193)	299.5/1.55	65/0.34	68/0.35	100/0.52	154/0.45	686.5/3.56
합계	740.5/1.84	239/0.59	257/0.64	464/1.15	549/1.37	2249.5/5.60

한편, 학생들의 수학 학습스타일을 알아보기 위해 <부록2>에 대해 2002학년도 충주대학교 신입생 주간 108명, 야간 111명 학생들에게 수학학습 스타일을 조사한 결과는 각 문항에 대해 일관성 있게 A, B, C, D를 반응한 학생은 몇 명 안되고 거의 A, B, C, D를 결합하여 대답하였고 주,야간의 차이는 다음 <표 2>와 같다.

학생들이 구하기 어려운 자료를 구하여 제시하는 것이 도움을 주고 수학에 대한 흥미와 관심을 불러일으킬 수 있다. 학생의 학습하려는 태도가 가장 중요하고 학습 자료가 폭 넓게 교과서 이외에서 제공되면 수학 개념과 내용의 이해에 긍정적인 효과를 나타내며 학생들에게 생각할 여유를 주고 수학을 가까이 하는 촉매 역할을 할 것이라 생각된다. 여기서는 특히 도형을 이용한 자료를 학생 수준에 맞추어 몇 가지 경우에 제시하여 도움을 주며 다양한 접근을 생각해 보도록 하려고 한다.

<표 2> 수학 학습 스타일 알아보기 (학생수(%))

	주간(108 명)				야간(111 명)			
	A	B	C	D	A	B	C	D
1	3(2.8)	27(25)	39(36.1)	39(36.1)	10(9.0)	34(30.6)	21(19.4)	46(41.4)
2	53(49.1)	17(15.1)	14(13.0)	24(22.2)	60(54.1)	21(18.9)	11(9.9)	19(17.1)
3	58(53.7)	12(11.1)	25(23.1)	13(12.0)	70(63.1)	10(9.0)	28(25.2)	3(2.7)

II. 본 론

자료의 개발을 위해 이차방정식의 근을 원을 이용하여 해결하기, 부정적분과 넓이의 관계, 도함수의 유도등(E. John Horasky Jr. 1990/ A.S.Drawel and L. Godloza,1999/ John Alexopoulos and Cynthia Barb, 2001/ Selvartnam Sridharma,1999/ Craig Johnson, 1998)을 이용한다.

1. 이차방정식의 근과 원

이차방정식의 근 구하기는 중학교에서 배운다. 일반으로 그래프를 이용한 해는 $y=ax^2+bx+c$로 정의된 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 x좌표로 정해진다.

여기서는 원의 방정식 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$을 이용하여
이차방정식 $x^2-2xh+(h^2+k^2-r^2)=0$의 해를 구한다.

$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 해를 구하는 데 원의 방정식을 이용하기 위해

(1) 원점 O인 직교좌표를 그린다.

(2) $(-\frac{b}{2a},0)$를 지나고 x축에 수직인 직선을 그린다.

(3) y축 위에 점 C(0,1)을 정한다.

(4) 단계2에서 그은 수직선 위에 점 $F(-\frac{b}{2a},\frac{a+c}{2a})$를 표시한다.

(5) 중심을 F로 하고 점 C를 지나는 원을 그린다.

(6) x절편을 구한다. 이 들이 $ax^2+bx+c=0$의 근이다.

(주의) 원이 x축과 두 점에서 만나면 서로 다른 두 실근을 갖고 한 점에서 만나면 한 근만을 갖고 x축과 어느 점에서도 만나지 않으면 실근을 갖지 않는다.

위의 내용이 타당함을 다음과 같이 보인다.

점 (0,1)을 지나고 점 $(-\frac{b}{2a},\frac{a+c}{2a})$를 중심으로 하는 원의 방정식은

$(x+\frac{b}{2a})^2+(y-\frac{a+c}{2a})^2=(0+\frac{b}{2a})^2+(1-\frac{a+c}{2a})^2$이다.

$y=0$일 때, 이 원은 x축과 만난다.

$(x+\frac{b}{2a})^2+(0-\frac{a+c}{2a})^2=(0+\frac{b}{2a})^2+(1-\frac{a+c}{2a})^2$에서,

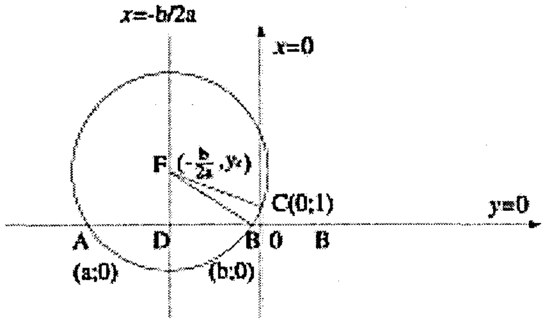
$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{a^2+2ac+c^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}+\frac{a^2-2ac+c^2}{4a^2}$이고,

정리하면 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{4ac}{4a^2}=0$에서, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$이다.

따라서, $ax^2+bx+c=0$이 된다.

이 원이 x축과 만나는 점은 이차방정식
$ax^2+bx+c=0$을 만족한다.

일반적으로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α와 β라고 할 때, 점$(\alpha,0)$, $(\beta,0)$과 점$(0,\lambda)$를 지나는 원이 중심$(-\frac{b}{2a},\ y_c)$를 갖는다고 하면<그림 1> y_c의 값을 a, c, λ로 나타낼 수 있다.



<그림 1>

$$\begin{aligned} r^2 &= FB^2 = FD^2 + BD^2 \\ &= y_c{}^2 + \frac{(\beta-\alpha)}{2}^2 \\ &= y_c{}^2 + \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \\ &= y_c{}^2 + \frac{\Delta}{4a^2}\ (\Delta = b^2-4ac) \cdots (1) \text{이고,} \end{aligned}$$

또, $r^2 = FC^2 = \left(-\frac{b}{2a}-0\right)^2 + (y_c-\lambda)^2 \cdots (2)$이다.

(1)과 (2)에서, $\frac{\Delta}{4a^2} + y_c{}^2 = \left(-\frac{b}{2a}-0\right)^2 + (y_c-\lambda)^2$이고 정리하면,

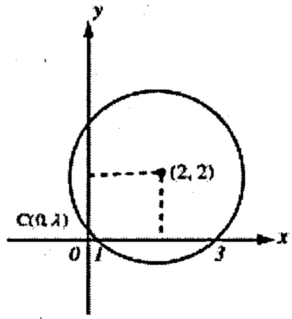
$-\frac{4ac}{4a^2} = -2y_c\lambda + \lambda^2$에서 $-\frac{c}{a} = -2y_c\lambda + \lambda^2$이고 $2y_c\lambda = \lambda^2 + \frac{c}{a}$이다.

따라서, $y_c = \dfrac{\lambda^2+\frac{c}{a}}{2\lambda} \cdots (3)$이다. (3)에서 $\lambda=0$일 수 없다.

일반으로 중심$\left(-\frac{b}{2a}, \dfrac{\lambda^2+\frac{c}{a}}{2\lambda}\right)$이고, 점 $(0,\lambda)$($\lambda\neq0, \lambda\in R$)을 지나는 원의 x절편이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근이다. 바꾸어 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y-\dfrac{\lambda^2+\frac{c}{a}}{2\lambda}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \left(\dfrac{\lambda^2-\frac{c}{a}}{2\lambda}\right)^2$ 으로 정의된 원의 x절편으로 주어진다.

구체적으로, $x^2-4x+3=0$*의 근을 원의 방정식의 그래프를 이용하여 구해보자.*



<그림 2>

풀이) $\lambda=1$이라 놓으면, 필요한 원의 중심은

$\left(-\frac{-4}{2\cdot1}, \frac{1+3}{2}\right)=(2,2)$이고 점 (0,1)을 지나므로

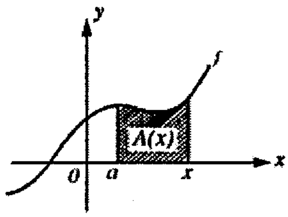
원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-2)^2=5$이다.

주어진 원을 그리면 <그림 2>와 같고 x절편은 1, 3이다. 따라서, 근은 x=1, x=3이다.

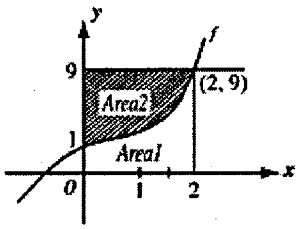
(참고) a, b, c가 실수인 경우 $ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq0)$의 근을 구하는 데 원의 방정식을 이용하여 근을 구할 수 있다.

2. 원시함수를 기하학적으로 구하기

로그함수와 역삼각함수에 대한 적분의 시각적 표현을 알아본다. 이들 적분 문제는 미분적분학에서 부분적분이 소개될 때, 다루게 된다. 일대일대응, 로그함수, 넓이에 대한 기하학적 개념과 역함수의 지식을 이용하여 이들 적분을 구하려고 한다. <그림 3>은 $A(x)$가 f 의 그래프 아래 a에서 x까지 넓이라면 A의 도함수는 f임을 나타낸 것이다. 즉, $A'(x)=f(x)$이다.



<그림 3>



<그림 4>

f가 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$이다. 부분적분을 이용하지 않고 역함수의 원시함수를 구해보자.

우선 간단한 예제에 대해 알아보자.

(예제1) f는 연속이고 증가함수이며 $f(0)=1$, $f(2)=9$이고, $\int_0^2 f(r)dr=8$일 때, $\int_1^9 f^{-1}(s)ds$를 구하여라.

풀이) <그림 4>에서 $Area2=\int_1^9 f^{-1}(s)ds$이고 $Area1=\int_0^2 f(r)dr$이다.

Area1+Area2=18에서 $\int_1^9 f^{-1}(s)ds$=10이다.

(예제2) (로그함수의 원시함수)

자연로그의 원시함수의 하나는 $F(x)=\int_1^x \ln t dt$ (x>0)로 정의된 함수 F이다. 넓이를 이용하여 $F(x)$를 구하여라.

풀이) <그림 5>에서 $F(x)$는 어두운 부분(Area1)이고,

Area2= $\int_0^{\ln x} e^t dt$이다.

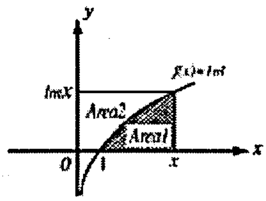
Area1+Area2= $x \ln x$에서

$$F(x)=x\ln x-\int_0^{\ln x} e^t dt$$

$$=x\ln x- e^{\ln x}+1=x\ln x-x+1$$

따라서, 원시함수의 일반적인 꼴은

$\int \ln x dx=x\ln x-x+C$ (C는 임의의 상수)이다.



<그림 5>

위의 아이디어를 이용하여 다음 원시함수를 구할 수 있다.

(1) $\int \tan^{-1}xdx$ (2) $\int \sin^{-1}xdx$ (3) $\int \sec^{-1}xdx$ (4) $\cos^{-1}x$

(5) $\text{cosec}^{-1}x$ 6) $\cot^{-1}x$

로그함수와 역삼각함수의 적분을 구하는 데 부분적분을 이용하지 않고 넓이 개념과 미분적분학의 기본정리를 이용하여 구할 수 있음을 알았다.

3. 그림의 도형을 이용하여 도함수 구하기

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$와 $\sin^{-1}\theta$ 의 도함수를 도함수의 정의에 의하지 않고 그림의 도형을 이용하여 알아본다. 우선 $\sin\theta$의 도함수를 알아보기 위해 <그림 6>에서 PQ의 길이는

$PQ=2\sin\frac{\Delta\theta}{2}$이고 $\sin\phi=\frac{\Delta y}{2\sin(\Delta\theta/2)}$이다. $Q\to P(\Delta\theta\to 0)$일 때, $\phi+\theta\to\frac{\pi}{2}$ 이다.

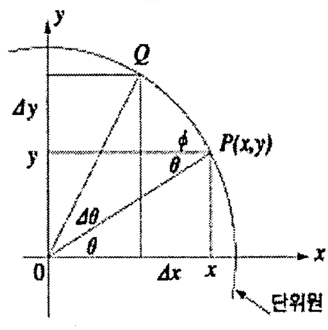
즉, $\phi\to\frac{\pi}{2}-\theta$이다. 따라서,

$$\frac{d(\sin\theta)}{d\theta}=\frac{dy}{d\theta}=\lim_{\Delta\theta\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta\theta}$$

$$=\lim_{\Delta\theta\to 0^+}\frac{\Delta y}{2\sin(\Delta\theta/2)}\cdot\frac{2\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta}$$

$$=\lim_{\Delta\theta\to 0^+}\sin\phi=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta\text{이다.}$$

$\cos\theta$의 도함수<그림 6>는 $\cos\phi=\frac{\Delta x}{2\sin(\Delta\theta/2)}$ 에서,



<그림 6>

$$\frac{d(\cos\theta)}{d\theta}=\frac{dx}{d\theta}=\lim_{\Delta\theta\to 0^+}\frac{-\Delta x}{\Delta\theta}=\lim_{\Delta\theta\to 0^+}\frac{-\Delta x}{2\sin(\Delta\theta/2)}\cdot\frac{2\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta}$$

$$=\lim_{\Delta\theta\to 0^+}(-\cos\phi)=-\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=-\sin\theta$$ 이다.

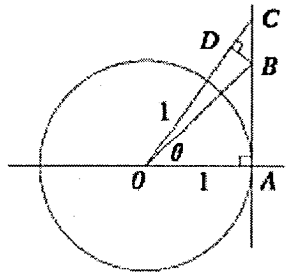
$\tan\theta$의 도함수를 <그림 7>에서 알아보자.

$\angle BOA=\theta$, $\angle DOB=\Delta\theta$, $\angle DBC=\theta+\Delta\theta$,

$AB=\tan\theta$, $BC=\Delta(\tan\theta)$, $OB=\frac{1}{\cos\theta}$,

$BD=\frac{1}{\cos\theta}\cdot\sin\Delta\theta$, $\cos(\theta+\Delta\theta)=\frac{BD}{BC}=\frac{BD}{\Delta(\tan\theta)}$,

$\Delta(\tan\theta)=\frac{BD}{\cos(\theta+\Delta\theta)}=\frac{\sin\Delta\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos(\theta+\Delta\theta)}$ 이다.



<그림 7>

따라서, $\frac{d(\tan\theta)}{d\theta}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta(\tan\theta)}{\Delta\theta}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos(\theta+\Delta\theta)}\cdot\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

이다.

$\sin^{-1}\theta$의 도함수를 <그림 8>에서 알아보자.

$\phi+\theta=\frac{\pi}{2}$에서 $\phi=\frac{\pi}{2}-\theta$이다.

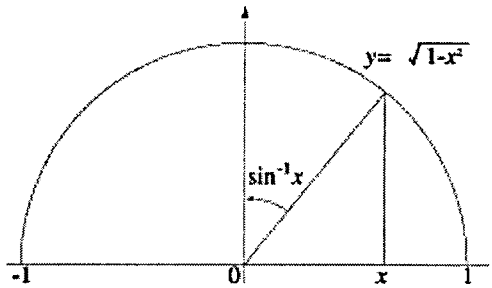
$\sin\phi=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta=x$에서

$\phi=\sin^{-1}x$이다.

호의 길이는

$$\sin^{-1}x=\int_0^x\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$$

$$=\int_0^x\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}})^2}\,dx=\int_0^x\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$ 이다.



<그림 8>

따라서, $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 이다.

III. 결 론

그래프나 도형을 이용한 방법이 학생들의 이해에 도움을 줄 것이라 예상하고 학생들이 구할 수 없는 자료를 구하여 제시하는 것이 어려움을 더 주는 경우도 있다. 그러나 인터넷을 통한 학생들의 의견 수렴에서 그림 또는 그래프를 이용하는 것이 구체적으로 나타내주고 이해에 도움이 되며 흥미를 끌 수 있다고 답하였으며 또한, 보충 설명도 필요하고 시간의 제약이 없다면 관련 내용을 배울 때 제시하는 것이 더욱 효과가 있을 것이라고 지적하였다.

교과서의 방법 이외에 또 다른 방법이 있을 수 있고 모르고 있는 세계가 많음을 알리고 가르치는 것도 교수의 역할이다. 어느 정도 수준에 도달하고 알려고 하는 노력이 있어야 이해할 수 있는 것이다. 수학을 배우고 이해하며 즐긴다는 것이 보통 사람에게 와 닿지 않아 사치로 보일 수도 있으나 즐길 내용을 수준별로 정리하여 제시하면 이해하는 대상도 넓어지고 그 효과는 상당할 것이라고 생각한다. 수학에 종사하는 사람들은 정신활동에 즐거움을 주는 자료를 수학이외의 대상에서 찾기가 쉽지 않을 것이라고 주장하고 자료개발에 최선을 다해야 할 것이다. 정신활동에 활력을 불러일으키고 새로운 것의 창조에 도움을 주는 내용이라 하더라도 수학에 대한 일정한 수준의 배경지식과 이해하려는 노력이 필요할 것이다. 간단한 문제의 해결에서, 남들이 못 푼 문제를 해결하여, 새로운 정리를 만들거나 같은 정리에 대해 새로운 접근으로 증명의 또 다른 방법을 제시하여 수학에 대한 이해를 도울 수 있다. 여기서는 대학수학 과정의 기초과정을 이수할 수 있는 능력이 있으면 이해할 수 있는 가벼운 수학내용을 제시하여 학습에 이용하려고 했다. 물론 이밖에도 여러 가지 자료가 있겠지만 하나하나 정리할 기회를 갖기로 하고 여기에서 제시된 예가 수업에 활력을 불어넣는 자료가 되었으면 한다. 수학에서 낮은 학습 능력을 갖고 있는 학생들이 이해하고 즐거움을 찾는 자료를 대하는 것은 힘든 일이기에 더욱 보람이 있고 성과가 크다고 할 수 있다. 쉽게 이해하는 데 도움을 유발하는 수학적 자료는 학생들의 수준에 따라 제시 내용과 방법이 다를 것이다. 체계적으로 연구하고 접근하면 많은 자료를 모을 수 있을 것이다. 수학에 관심을 갖고 있는 모든 사람에게 이들을 제시하여 쉽고 편하게 수학을 이해하는 기회를 제공하는 것이 수학을 하는 모든 사람의 몫이라고 생각한다. 학생들도 기회가 있으면 방학동안 해외 연수를 하며 외국의 도서관에서 자료를 찾는 것도 여행이상으로 보람있고 즐거움을 만들기 위한 하나의 기회일 것이다. 학생들에게도 이와 같은 자료 구하기를 프로젝트로 부여하여 수업에 적극 참여하고 내적 흥미를 일깨우는 데, 한 방편이 되었으면 한다. 대학수학의 수업 자료개발에 지금까지 알려진 내용을 정리하고 한편으로 창의적인 것을 개발하고 발전시키는 데 수학에 종사하는 모두가 참여하여 도움을 주었으면 한다.

좋아하는 학습스타일을 갖는 것은 꼭 한가지만을 이용하는 것으로 제한하지 않는다. 대부분의 학생들은 결합된 학습스타일을 이용하여 배우는 것을 알 수 있었다. 수학에서뿐만 아니라 다른 과목에서도 자신에 대하여 아는 것과 어떻게 배우는 것이 가장 좋은가 알아보고 대처할 필요가 있다. 학습스타일에 따른 강화법을 과목에 따라 적절하게 변형하여 학생들에게 소개하여 알리는 것이 학습에 도움을 줄 것이다. 소개하면 다음 <표 3>과 같다.

<표 3> 학습스타일에 따른 학습 강화법

학습스타일	학습 강화법
*독서에 의한 학습	* 매일 읽는 시간을 계획
	* 기다리는 동안 읽을 책 또는 잡지를 가지고 다닌다.
	* 읽고 싶은 것을 읽는다.
*시각적 단서를 이용한 학습	* 문제 상황을 시각화 한다.
	* 문제를 그래프로 해결하라.
	* 컴퓨터나 계산기의 도움을 받는다.
* 손을 이용한 탐구학습	* 문제를 풀 때 스케치를 만든다.
	* 문제를 푸는 것을 돕는 물건을 이용.
	* 탐구와 발견을 위한 도구로 과학 기술에 이용.
* 듣고 말하므로 학습	* 자진하여 발표한다.
	* 자신의 생각을 친구에게 설명한다.
	* 다른 학생들이 말하고 있을 때 의도적으로 귀를 기울인다.

이 밖에도 도형이나 기하학적 개념을 이용하여 해결할 수 있는 많은 예를 journal, American Mathematical Monthly(Jitan Lu, 1999), Mathematics Teacher(Lawrence H. Riddle, 1994), Teaching Mathematics and Its Applications(Kok Ming Teo, 2002), College Mathematics Journal(Roger B. Nelson, 2001), Mathematics Magazine(J. W. Orr, 1989), Mathematics and Computer Education(Eric Milou, 2000)과 International Journal of Mathematical Education in Science and Technology(H.K.Pathak and A.S.Grawel, 2001)에서 찾을 수 있다. 각 단원에 맞는 더 많은 자료를 재구성하여 제시하는 것은 다음 기회에, 좀 더 체계적인 학습 도움 자료를 만들어 활용할 예정이다.

참 고 문 헌

김병무 (1997). 흥미 및 동기유발을 위한 대학수학 수업 자료와 평가, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육> **36**(2), pp.127-133.

김병무 (1999). 대학수학 수업모델의 방향과 평가방법, 한국수학교육학회지 시리즈E 수학교육논문집 제**8**집, pp257-264.

John Alexopoulos & Cynthia Barb (2001). Discovering Integrals with Geometry, *Primus*, Vol.**11**, No.**1**, pp.79-88.

A. S. Drawel & L. Godloza (1999). Geometrical Solutions of Quadratic Equations, *Int. J. Math Educ. Sci. Technol.*,Vol.**30**, No.**4**, pp.573-579.

E. John Horasky Jr. (1990). Geometrical and Graphical Solutions of Quadratic Equations, *College Mathematics Journal*, Vol.**21**, No.**5**, pp.362-369.

Craig Johnson (1998). The Derivative of the Inverse Sine, *College Mathematics Journal*, Vol. **29**, No. **4**, pp.313.

Jitan Lu (1999). Is the Composite Function Integrable, *American Mathematical Monthly* **106**, pp.763-766.

Eric Milou (2000). A Glance at Hyperbolic Geometry Provides a Challenge to Students' Intuition, *Mathematics and Computer Education*, **34**, **1**, pp.42-52.

Roger B. Nelson (2001). Proof without word of Heron's Formula, *College Mathematics Journal*, Vol. 32, No. 4, pp290-292.

J. W. Orr (1989). A Geometrical Approach to Cramer's Rule, *Mathematics Magazine*, Vol.**62**, No. **1**, pp.35-37

H. K. Pathak & A. S. Grawel (2001). Geometrical Solutions of Some Quadratic Equations with Non-Real Roots, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, Vol.**32**, No.1, pp.150-156.

Lawrence H. Riddle (1994). Introducing the Derivative through the Iteration of Linear Functions, *Mathematics Teacher,* **87**, **5**, pp.377-381.

Selvartnam Sridharma (1999). The Derivative of $\sin\theta$, *College Mathemaics Journal*, Vol. **30**, No. **4**, pp.314-315.

Kok Ming Teo (2002). A Graphical Illustration of the Limit of a Composite Function, *Teaching Mathematics and Its Applications*, Vol. **21**, No. **4**, pp.139-143.

<부 록1>

기초 대수 능력 시험

* 다음 문제를 읽고 질문에 답하시오.

(Expressing Generalization)

질문1 : 성냥개비로 주어진 다음 모양에 대해(그림 생략)

1) 네 개의 삼각형, 다섯 개의 삼각형을 만드는데 몇 개의 성냥개비가 필요한가?
2) 대수적인 기호를 이용하여 이 패턴을 기술하는 규칙을 써라.
3) 15개의 삼각형을 만드는 데 몇 개의 성냥개비가 필요한가?
4) 규칙을 문장으로 써보아라.

질문2 : 다음 표에 대해 x와 y사이의 관계를 기술하여라.

x	1	3	6
y	1	7	16

(Interpretation of the meaning of letters)

질문1 : 다음 그림은 부분적으로만 완성되었다. n개의 변을 갖는 각 변의 길이 2인 다각형의 둘레의 길이를 구하여라. (그림 생략)

질문2 : 2n 또는 n+2중 어느 것이 큰가? 그 이유를 설명하여라.

질문3 : e+f=8 이면, e+f+g=?

(Solving equations)

질문1 : x=7 일 때, $(x+1)^3$+x=519를 만족한다면 $(5x+1)^3+5x=519$를 만족하는 x의 값은?

질문2 : $\frac{3x}{4}-5=21$을 풀어라.

질문3 : $4-\frac{1}{6}(x-2)=\frac{3}{4}x$ 를 풀어라.

(Indices)

질문1 : $3^0=$

질문2 : $8^{\frac{2}{3}}=$

질문3 : $5^{-2}=$

질문4 : $4^2 * 2^6=$

(종합문제)

1. 3n 과 2n+2는 어느 것이 큰가? 설명하여라.

2. x=6일 때, $(x+1)^3+x=349$이면 $(5x+1)^3+5x=349$인 x는?

3. $L+M+N=L+P+N$은 (1)항상 성립 (2) 때때로 성립 (3) 전혀 성립 안함

4. 파란 연필은 한 자루에 50원, 빨간 연필은 한 자루에 60원이다. 파란 연필, 빨간 연필 모두 합쳐 900원을 지불했다. 파란 연필 b개, 빨간 연필 r개 샀다면 b와 r의 관계식은?

5. c+d=10이고, c가 d보다 작다면 c에 대해 무엇이라 할 수 있는가?

6. 그림이 완성되지 않은 도형이 있다. 한 변의 길이가 3cm이다. 모두 n개의 변이라면 둘레 의 길이는?(그림 생략)

7. r=s+t이고 r+s+t=30이면 r의 값은?

<부록2>

<u>학습스타일 조사</u>

여러분이 수학을 공부하는 데 도움을 주려고 수학학습 스타일을 알아보려고 합니다. 가장 자신의 스타일에 가깝다고 생각하는 것을 한가지만 표시하시오.

여러분이 가장 좋아하는 학습 스타일은 무엇인가?

1. 나는 수학 개념을 다음 경우에 가장 잘 이해한다.

   A. 그것을 읽을 때.

   B. 그것을 보여주는 삽화, 그래프와 챠트를 보고 만들 때.

   C. 그것을 탐구하기 위해 손으로 조작하거나 스케치를 그릴 때.

   D. 그것을 설명하는 사람에게 귀를 기울일 때.

2. 나는 공부할 때, 다음 경우에 더 많이 배운다.

   A. 나의 노트와 교과서로 복습할 때.

   B. 어떤 그래프, 챠트, 도표 또는 다른 삽화를 연구할 때.

   C. 노트나 카드에 생각을 쓰고 그것을 연구할 때.

   D. 내가 아는 것을 다른 사람에게 설명할 때.

3. 나는 그룹으로 함께 일할 때, 다음 경우에 가장 마음이 편하다.

   A. 기록할 때.

   B. 전시를 위해 그래프와 도형을 이용하여 영상자료를 만들 때.

   C. 내가 아는 것을 다른 사람에게 설명할 때.

   D. 다른 그룹이나 학급에서 발표할 때.